

НАЦИОНАЛЬНАЯ КАРТОГРАФИЧЕСКАЯ КОРПОРАЦИЯ

В.В. ГЛУШКОВ  
К.К. НАСРЕТДИНОВ  
А.А. ШАРАВИН

# КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ: МЕТОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ

НАЦИОНАЛЬНАЯ КАРТОГРАФИЧЕСКАЯ КОРПОРАЦИЯ

В.В. ГЛУШКОВ  
К.К. НАСРЕТДИНОВ  
А.А. ШАРАВИН

# **К**ОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ: МЕТОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ

МОСКВА•2002

Рецензенты:

**Г.Е. Лазарев**, доктор технических наук, профессор, действительный член Российской академии космонавтики имени К.Э. Циолковского;

**М.С. Урмаев**, доктор технических наук, профессор Московского Государственного университета геодезии и картографии.

Авторы:

**В.В. Глушков**, заведующий отделом Национальной картографической корпорации, доктор технических наук, профессор, действительный член Российской академии космонавтики имени К.Э. Циолковского;

**К.К. Насретдинов**, член научно-технического комитета Национальной картографической корпорации, кандидат технических наук, старший научный сотрудник;

**А.А. Шаравин**, генеральный директор Национальной картографической корпорации, доктор технических наук, профессор, действительный член Российской академии космонавтики имени К.Э. Циолковского.

Космическая геодезия: методы и перспективы развития.  
М.: Институт политического и военного анализа, 2002.  
448 с.: ил.

В монографии рассматриваются методы создания геоцентрической системы координат, современное состояние и перспективы развития космической геодезии. Главная ее особенность состоит в том, что в ней впервые подробно раскрыты относительный метод космической геодезии и сопутствующие практические вопросы, с которыми обычно сталкивается пользователь современной спутниковой геодезической аппаратуры. Теоретические выкладки метода сопровождаются множеством примеров из практики выполнения геодезических работ, алгоритмами программ и программами для ПЭВМ. Монография предназначена для широкого круга специалистов топографо-геодезического профиля.

5-93349-019-9

© Национальная картографическая корпорация, 2002

© Институт политического и военного анализа, 2002

В.В. ГЛУШКОВ  
К.К. НАСРЕТДИНОВ  
А.А. ШАРАВИН

# КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ: МЕТОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

---

9 **Введение**

### Часть I

13 **Создание геоцентрической системы координат**

#### Глава 1

##### **Системы координат, используемые в космической геодезии**

- 13 1.1. Инерциальная система координат.  
Редукция звездных положений
- 23 1.2. Геоцентрическая общеземная система координат
- 30 1.3. Орбитальная система координат. Элементы орбиты
- 31 1.4. Объектоцентрическая система координат
- 33 1.5. Понятие центра масс и осей инерции в физике
- 36 1.6. Геодезические системы координат
- 42 1.7. Горизонтальная система координат
- 43 1.8. Плоские прямоугольные системы координат

- 43 1.8.1. Место плоских прямоугольных систем координат  
в относительном методе космической геодезии
- 45 1.8.2. Связь плоских прямоугольных и геодезических  
координат
- 49 1.8.3. Пересчет геодезических координат в плоские  
прямоугольные и обратно

## **Глава 2**

### **Методы создания геоцентрической системы координат**

- 57 2.1. Гравиметрический метод
- 59 2.2. Астрономо-геодезический метод
- 63 2.3. Спутниковые методы создания геоцентрической  
системы координат
- 66 2.3.1. Предварительная обработка материалов  
наблюдений
- 69 2.3.2. Интегрирование и уточнение орбит
- 71 2.3.2.1. Метод Лагранжа вариации произвольных  
постоянных
- 74 2.3.2.2. Численные методы интегрирования дифференци-  
альных уравнений движения ИСЗ
- 95 2.3.2.3. Дифференциальное уточнение орбит
- 101 2.3.3. Орбитальное и динамическое решения
- 114 2.3.4. Анализ точности результатов орбитального  
и динамического решений
- 127 2.4. Навигационные методы определения координат  
пунктов
- 129 2.4.1. Информация, передаваемая с борта НИСЗ
- 134 2.4.2. Принципы измерения навигационного параметра
- 137 2.4.3. Методы дифференциальных определений
- 139 2.4.4. Методы относительных определений

## **Глава 3**

### **Совместное уравнивание наземных и космических геодезических сетей**

- 145 3.1. Определение элементов взаимного  
трансформирования координат пунктов  
наземных и космических геодезических сетей
- 153 3.2. Совместное уравнивание космической  
и наземной геодезических сетей
- 160 3.3. Анализ геоцентричности начала систем  
координат
- 162 3.3.1. Исследование ковариационной матрицы ЦМЗ
- 172 3.3.2. Построение космической геодезической сети  
по длинным и коротким орбитальным дугам

## 177 **Относительный метод космической геодезии**

### Глава 4

#### **Предварительные вычисления**

- 177 4.1. Первичная обработка результатов измерений и получение разностей координат в относительном методе
- 178 4.2. Последовательность предварительных вычислений
- 196 4.3. Проверка качества разностей координат
- 201 4.4. Приведение к центрам пунктов разностей геоцентрических координат
- 201 4.4.1. Приведение к центрам пунктов разностей координат за высоту
- 203 4.4.2. Аналитическое определение элементов приведения и высоты знака
- 210 4.4.3. Метод створных наблюдений
- 213 4.5. Приведение к центрам пунктов наземных измерений
- 218 4.6. Вычисление предварительных геоцентрических координат пунктов наземной сети

### Глава 5

#### **Уравнивание разностей координат**

- 223 5.1. Варианты уравнивания разностей координат
- 224 5.2. Уравнения поправок и нормальные уравнения спутниковых измерений
- 227 5.3. Уравнения поправок для наземных измерений
- 232 5.4. Ковариационный анализ ошибок результатов уравнивания

### Глава 6

#### **Некоторые проблемы пространственного уравнивания**

- 249 6.1. Получение пространственных прямоугольных координат исходных пунктов
- 249 6.1.1. Традиционные методы получения высот квазигеоида

- 251 6.1.2. Получение высот квазигеоида относительным  
методом космической геодезии
- 260 6.2. Вычисление и использование ключей местной  
системы координат
- 266 6.3. Получение нормальных высот определяемых  
пунктов

## **Глава 7**

### **Некоторые алгоритмические вопросы реализации относительного метода космической геодезии**

- 275 7.1. От алгоритмов к программам
- 283 7.2. Определение параметров трансформирования сетей.  
Метод Резави
- 288 7.3. Алгоритм решения системы нормальных уравнений  
по схеме Гаусса
- 296 7.4. Комплекс программ уравнивания разностей коорди-  
нат в прямоугольной геоцентрической  
системе координат
- 302 7.5. О возможности уравнивания разностей координат  
в геодезической и плоской прямоугольной системе  
координат

## **Глава 8**

### **Использование метода Резави в плоской системе координат**

- 309 8.1. Анализ результатов уравнивания 1995 года  
астрономо-геодезической сети России
- 310 8.2. Методика уточнения ключей местных систем  
координат
- 314 8.3. Алгоритм определения новых ключей местных  
систем координат
- 316 8.4. Алгоритм пересчета координат. пунктов из местных  
систем в СК–95 и обратно
- 317 8.5. Методика преобразования координат пунктов  
низших классов в СК–95
- 328 8.6. Вычисление геодезического азимута, дирекционного  
угла и расстояния по разностям пространственных  
прямоугольных координат
- 333 8.7. Метод вращений на сфере

## **Глава 9**

- 349 **Уравнивание разнородных измерений при неизвестном соотношении их весов**
- 351 9.1. Сущность метода максимального правдоподобия и достаточные статистики
- 353 9.2. Уравнивание разнородных измерений с неизвестными весами методом максимального правдоподобия
- 358 9.3. Сравнение способов определения весов измерений из уравнивания
- 364 9.4. Иерархическое уравнивание разнородных измерений

## **Часть III**

### **Перспективы развития космической геодезии**

## **Глава 10**

- 373 **Возможные направления уточнения геоцентрической системы координат**
- 374 10.1. Новый способ создания космической геодезической сети
- 380 10.2. Обоснование структуры баллистического построения многоцелевой космической геодезической системы третьего поколения ГЕОИК-2
- 384 10.3. Анализ точности определения положения СКА
- 386 10.4. Оценка точности построения космической геодезической сети с использованием космической геодезической системы ГЕОИК-2

## **Глава 11**

- 397 **Использование спутниковых технологий при решении геодезических задач**
- 398 11.1. Применение спутниковых технологий при развитии геодезических сетей
- 403 11.2. Определение площади земельных участков
- 406 11.3. Решение прямых и обратных геодезических задач
- 413 11.4. Спутниковые технологии – новая трехмерная геодезия

415	<b>Заключение</b>
417	<b>Список литературы</b>
425	<b>Приложение 1.</b> Некоторые сведения из математики
432	<b>Приложение 2.</b> Векторное и матричное дифференцирование
439	<b>Приложение 3.</b> Перспективы использования космической геодезической системы ГЕОИК-2 в международных проектах

## Введение

В последние три десятилетия в нашей стране мало издается работ, посвященных методам космической геодезии, и почти совсем не печатаются материалы, имеющие практическую направленность. Считается, что геодезисту достаточно иметь только инструкцию для пользователя приемной аппаратурой сигналов навигационных спутников и пакет программ по обработке соответствующей измерительной информации. Исключением, пожалуй, являются три работы [7, 55, 61], изданные в 70-х годах XX века, другие – посвящены в основном теоретическим или частным вопросам космической геодезии. Настоящая монография, на наш взгляд, восполняет этот недостаток. Она не только дает читателю необходимые теоретические знания, но и имеет практическую ценность.

Книга состоит из трех частей и приложений. В первой части изложены основные сведения по созданию и распространению геоцентрической системы координат различными методами космической геодезии, причем орбитальный и динамический методы освещены достаточно подробно: от предварительной обработки материалов измерений до анализа результатов уравнильных вычислений. Здесь также рассмотрен навигационный или абсолютный метод определения координат точек, являющийся основой более совершенных по точности относительного и дифференциального методов определения координат геодезических пунктов.

При рассмотрении методов создания геоцентрической системы координат большое внимание уделено совместному уравниванию наземной и космической геодезических сетей, анализу геоцентричности получаемых систем координат, методам интегрирования и уточнения орбит искусственных спутников Земли (ИСЗ). Наряду с известной аналитической теорией В.М. Каула определения параметров гравитационного поля Земли (ГПЗ) динамическим методом по элементам орбиты ИСЗ [30] показана возможность их определения непосредственно через траекторные измерения в пространственной прямоугольной системе координат. Такой подход позволил значительно упростить математический аппарат динамического метода космической геодезии и связать все определяемые неизвестные в единой системе нормальных уравнений, выполнить их строгое решение и оценку точности получаемых результатов.

Особое внимание в первой части труда уделено анализу точности результатов орбитального и динамического решений посредством градиентного метода представления остаточных уклонений, позволяющего сопоставить точности величин, выражаемых в различных единицах измерений.

Во второй части монографии рассмотрены относительный метод космической геодезии и связанные с ним вопросы. Как известно, относительный метод, основанный на траекторных измерениях ИСЗ космических навигационных систем (КНС), является одним из наиболее точных современных методов построения геодезических сетей. Он находит все более широкое применение на практике. Основное его отличие от других методов космической геодезии [3, 4, 6, 7, 10, 27, 29, 30, 55] состоит в том, что посредством его определяются не абсолютные координаты пунктов относительно начала координат, а разности координат пар пунктов, на которых выполняются синхронные наблюдения одних и тех же спутников. При реализации этого метода исключается основная линейная составляющая многих источников ошибок измерений, вследствие чего разности координат определяются с миллиметровой точностью.

В этой части также рассмотрены структура, состав, основные характеристики и возможности КНС GPS (США), общее устройство и принцип функционирования приемной аппаратуры сигналов спутников этой системы [9, 39, 49, 51, 65].

Поскольку при относительном методе конечным результатом измерений является определение разностей координат пунктов в общеземной системе координат и их ковариационной матрицы, а цель построения геодезических сетей – определение координат пунктов в государственной системе координат, то при реализации этого метода обязательным условием является использование нескольких исходных пунктов государственной геодезической сети (ГГС). Однако точность взаимного положения пунктов ГГС, как правило, гораздо ниже точности измеренных разностей координат. Поэтому во второй части монографии рассмотрены возможные схемы построения геодезических сетей, позволяющие сохранить реализуемую точность взаимного положения пунктов, определенных относительным методом, а также вопросы совместного уравнивания результатов спутниковых и наземных измерений.

Следует подчеркнуть, что в монографии не рассматриваются вопросы первичной обработки результатов измерений, они достаточно подробно изложены в инструкциях, прилагаемых к комплекту приемной аппаратуры конкретного типа. В ней рассмотрены вопросы последующей обработки разностей координат после их получения с помощью фирменных пакетов программ:

- составление рабочих файлов для уравнивания;
- приведение к центрам геодезических пунктов спутниковых и наземных измерений;
- вычисление предварительных геоцентрических координат пунктов;
- вывод уравнений поправок для рассматриваемых видов измерений;
- получение уравненных геоцентрических координат пунктов и их оценка;
- пересчет результатов уравнивания в государственную систему координат;
- оценка точности дирекционных углов и сторон в государственной системе координат;
- варианты совместного и отдельного уравнивания спутниковых и наземных измерений.

Наряду с процессом рассмотрения алгоритма уравнивательных вычислений во второй части приведены алгоритмы решения принципиальных и важных вопросов связи геодезических и нормальных высот без привлечения специальных карт высот квазигеоида, интерполяции нормальных высот с исходных на определяемые пункты, перехода от государственной системы координат к местным системам и обратно и др., рассмотрен оригинальный способ уравнивания разнородных измерений, базирующийся на методе максимального правдоподобия. Последний позволяет определять веса измерений в ходе уравнивания и получать несмещенные и эффективные оценки конечных результатов. Новации, предложенные в этой части монографии, проверены с помощью разработанных К.К. Насретдиновым комплексов программ уравнивания, проиллюстрированы примерами обработки реальных траекторных измерений спутников КНС GPS (США), выполненных различными типами аппаратуры.

Третья часть монографии посвящена рассмотрению перспектив развития известных и применения новых методов космической геодезии при решении задач в различных областях практической деятельности, а также возможности решения основных задач наземной геодезии с использованием методов космической геодезии в пространственной системе координат.

Особое внимание в третьей части уделено проблемам создания принципиально новой многоцелевой космической геодезической системы ГЕОИК–2. На основе модифицированного динамического метода космической геодезии, разработанного и защищенного в диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук В.В. Глушковым (научный консультант А.А. Шаравин), и

нового способа создания высокоточной геодезической сети, защищенного патентом на изобретение (авторы В.В. Глушков, К.К. Насретдинов), с помощью этой системы в ближайшие 5–10 лет предполагается решить важную для нужд обороны и экономического развития России научно-техническую проблему: радикально повысить точность системы геодезических Параметров Земли 1990 года (ПЗ–90), а также решить широкий круг задач в интересах различных ведомств страны, государств ближнего и дальнего зарубежья — участников совместных научно-технических проектов.

Завершается монография приложениями, в которых приведены необходимые сведения из области математики и дополнительные данные по разрабатываемой системе ГЕОИК-2.

Следует особо подчеркнуть, что материал каждой части монографии излагается в виде технологических процессов, начиная с предварительной обработки наблюдений, разработки теоретических основ каждого метода и заканчивая анализом получаемых результатов. Большая часть теоретических вопросов доведена до алгоритмов, иллюстрируется практическими примерами и может служить основой для разработки вычислительных производственных программ.

Значительная часть материалов, хотя и опробована авторами на практике, является новой, в печати не публиковалась. К ним, например, можно причислить вопросы отнесения начала геоцентрической системы координат к центру масс Земли; обработки измерительной информации в относительном методе; совместного уравнивания космических и наземных геодезических сетей; уравнивания наземных геодезических сетей в пространственной прямоугольной системе координат; получения высот квазигеоида и связи геоцентрических координат с условными системами координат в относительном методе и многие другие.

Настоящая монография, являющаяся итогом более чем 20-летней деятельности авторов на избранном поприще науки, базируется на добротном теоретическом фундаменте, заложенном отечественными и зарубежными учеными Е.П. Аксеновым, Е.Г. Бойко, В.В. Бойковым, М. Бурша, Г. Вейсом, И.Д. Жонголовичем, Л.П. Пеллиным, Ю.В. Плаховым, И.Я. Плешаковым, М.М. Машимовым, И. Меллером, М.С. Урмаевым, Г.А. Устиновым, П. Эскобалом и др. Она будет полезна специалистам, преподавателям, аспирантам и студентам вузов соответствующих специальностей, а также широкому кругу пользователей приемной аппаратуры сигналов КНС при решении различных геодезических, землеустроительных и других задач относительным и дифференциальным методами космической геодезии.

# Часть I

---

## Создание геоцентрической системы координат

### Глава I

---

## СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

---

### 1.1. Инерциальная система координат. Редукции звездных положений

---

Инерциальной системой отсчета называется такая система координат, в которой свободная материальная точка движется равномерно и прямолинейно. За такую систему принимается астрономическая система координат, начало которой совмещено с центром масс Солнца, ось  $x$  направлена в точку весеннего равноденствия в плоскости среднего экватора Земли на эпоху 1900–1905 гг., ось  $z$  перпендикулярна плоскости этого экватора, а ось  $y$  образует правую систему координат. В этой системе обычно даются координаты звезд  $\alpha_0$ ,  $\delta_0$  в фундаментальных каталогах на определенную эпоху  $T_0$ , где  $\alpha_0$  – прямое восхождение,  $\delta_0$  – склонение небесного объекта.

Для наблюдения космических объектов с Земли используется геоцентрическая инерциальная система координат, начало которой совмещено с центром масс Земли (ЦМЗ). Кроме сферических координат  $\alpha$ ,  $\delta$  для объектов Солнечной системы используется полярная система координат  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\rho$ , где  $\rho$  – геоцентрический радиус-вектор, или прямоугольная декартова система  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , а для околоземных объектов, например ИСЗ – инерциальная

декартова система  $x, y, z$ . Зависимость сферических и прямоугольных координат выражается формулами

$$\begin{aligned}x &= r \cos \delta \cos \alpha; \\y &= r \cos \delta \sin \alpha; \\z &= r \sin \delta,\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

где  $r$  — радиус-вектор объекта от начала координат.

Вместо прямого восхождения в космической триангуляции используется топоцентрическая координата  $\gamma = \alpha - S$ , где  $S$  — гринвичское звездное время.

Для наблюдения звезд с Земли, а также для обработки фотоснимков ИСЗ на фоне звезд, их координаты из каталога приводятся на видимые места в моменты наблюдений. При этом учитываются две группы факторов изменения в средних координатах звезд: во-первых, из-за перехода от эпохи каталога на момент наблюдения и, во-вторых, из-за переноса начала координат из центра масс Солнца в точку наблюдения.

Основные плоскости и оси координатных систем, к которым отнесены положения и скорости космических объектов, не сохраняют свои направления в пространстве неизменными с течением времени. Поэтому наблюдения космических объектов, выполненные в различные моменты, нуждаются в редукции к фиксированной эпохе. Движение наблюдателя вместе с Землей обуславливает необходимость введения поправок в наблюдения за приведение координат наблюдателя в ту же систему, в которой фиксируется положение наблюдаемого объекта. Кроме того, в наблюдения вводятся поправки за влияние внешней среды в процессе измерений (атмосферы, ионосферы). Редукционные вычисления учитывают влияние на наблюдения [54]:

- прецессии оси вращения Земли (период 25 725 лет);
- нутации оси вращения Земли (период около 19 лет);
- параллакса;
- абберации;
- рефракции.

Для перевода экваториальных сферических координат звезды эпохи  $t_0(\alpha_0, \delta_0)$  на эпоху  $t$  с учетом прецессии и собственного движения служат формулы

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha_0 + (VA)_\alpha (t - t_0) + (VS)_\alpha \frac{(t - t_0)^2}{200} + III_\alpha \left[ \frac{t - t_0}{100} \right]^3; \\ \delta(t) &= \delta_0 + (VA)_\delta (t - t_0) + (VS)_\delta \frac{(t - t_0)^2}{200} + III_\delta \left[ \frac{t - t_0}{100} \right]^3, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

где  $(VA)_\alpha = P_\alpha + \mu_\alpha$ ;  $(VA)_\delta = P_\delta + \mu_\delta$  – годовые изменения координат  $\alpha, \delta$  за прецессию ( $P_\alpha, P_\delta$ ) и за собственное движение ( $\mu_\alpha, \mu_\delta$ ) звезды;  $(VS)_\alpha, (VS)_\delta$  – вековые изменения координат за тропическое столетие;  $III_\alpha = \frac{100^3}{6} \frac{\partial^3 \alpha}{\partial t^3}$ ;

$III_\delta = \frac{100^3}{6} \frac{\partial^3 \delta}{\partial t^3}$ , а третьи производные координат находят-ся из сопоставления вековых изменений, определенных в разные эпохи  $t_1$  и  $t_2$  по формулам

$$\frac{\partial^3 \alpha}{\partial t^3} = \frac{(VS)_\alpha^{(2)} - (VS)_\alpha^{(1)}}{100(t_2 - t_1)}; \quad \frac{\partial^3 \delta}{\partial t^3} = \frac{(VS)_\delta^{(2)} - (VS)_\delta^{(1)}}{100(t_2 - t_1)}.$$

Изменения координат  $\alpha, \delta$ , обусловленные нутацией, выражаются формулами

$$\Delta \alpha = (\cos \varepsilon + \operatorname{tg} \delta \sin \alpha \sin \varepsilon) \Delta \psi_s - \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \Delta \varepsilon_s;$$

$$\Delta \delta = \sin \varepsilon \cos \alpha \Delta \psi_s + \sin \alpha \Delta \varepsilon_s,$$

где  $\varepsilon = 23^\circ 27' 08,26'' - 46,846'' T - 0,059'' T^2$  – средний наклон эклиптики к экватору;

$T = \frac{JD(t) - 2\,415\,020,3134}{36\,524,22}$  – время в тропических столетиях от фундаментальной эпохи 1900.0,  $JD(t)$  – юлианская дата;

$\Delta\Psi_s, \Delta\varepsilon_s$  – нутация по долготе и в наклоне соответственно.

В Астрономическом ежегоднике (АЕ) даются формулы для перехода от среднего места звезды (1.1.2) на начало бесселева года  $t$  к истинному месту с учетом совместного влияния прецессии, собственного движения и нутации для даты  $d$

$$\alpha_d = \alpha(t) + (A + A')a + (B + B')b + E + \mu_\alpha \tau;$$

$$\delta_d = \delta(t) + (A + A')a' + (B + B')b' + \mu_\delta \tau,$$

где  $\tau = d / 36524,22$  – доля тропического года от его начала до даты  $d$ ;  $d$  – число дней от момента  $t$ ;  $A, A', B, B', E, a, a', b, b'$  – редуцированные величины (даны в АЕ).

Для приведения звезды на видимое место к истинному месту  $\alpha_d, \delta_d$  необходимо добавить поправки за аберрацию и годичный параллакс. Поправки за годичный параллакс вычисляются по формулам

$$\Delta\alpha_\pi = C\Delta c + D\Delta d;$$

$$\Delta\delta_\pi = C\Delta c' + D\Delta d',$$

где  $\Delta c = 0,0532\pi d$ ;  $\Delta d = -0,0448\pi c$ ;  $\Delta d' = -0,0448\pi c'$ ;

$C, D$  – редуцированные величины из АЕ;  $\pi$  – годичный параллакс звезды; для учета годичной аберрации в форму-

лу вместо  $\Delta c, \Delta c', \Delta d, \Delta d'$  подставляют  $c = \frac{1}{15} \sec \delta \cos \alpha$ ;

$c' = \operatorname{tg} \varepsilon \cos \delta - \sin \delta \sin \alpha$ ;  $d = \frac{1}{15} \sec \delta \sin \alpha$ ;  $d' = \sin \delta \sin \alpha$ .

Более точно, чем с помощью редуцированных величин из АЕ, прецессия учитывается с помощью прецессионных параметров Ньюкома-Андуайе

$$\cos \delta_2 \sin(\alpha_2 - z) = \cos \delta_1 \sin(\alpha_1 + \zeta_0);$$

$$\cos \delta_2 \cos(\alpha_2 - z) = \cos \delta_1 \cos(\alpha_1 + \zeta_0) \cos \theta - \sin \delta_1 \sin \theta;$$

$$\sin \delta_2 = \cos \delta_1 \cos(\alpha_1 + \zeta_0) \sin \theta + \sin \delta_1 \cos \theta,$$

$$\begin{aligned} \text{где } \zeta_0 &= (2304,253'' + 1,3973'' T_1 + 0,00006'' T_1^2) \tau + \\ &+ (0,3023'' - 0,0027'' T_1) \tau^2 + 0,01800'' \tau^3; \\ z &= (2304,253'' + 1,3973'' T_1 + 0,00006'' T_1^2) \tau + 0,01832'' \tau^3; \\ \theta &= (2004,685'' - 0,8533'' T_1 - 0,00037'' T_1^2) \tau - \\ &- (0,4267'' + 0,00037'' T_1) \tau^2 - 0,041180'' \tau^3; \\ \tau &= T_2 - T_1. \end{aligned}$$

Учет астрономической рефракции в зенитном расстоянии выполняется по формуле

$$\Delta z = 58,20'' \operatorname{tg} z - 0,07'' \operatorname{tg}^3 z, \quad (1.1.3)$$

в экваториальных координатах – по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 \mp \Delta z \sin q \sec \delta; \\ \delta_1 &= \delta_0 \mp \Delta z \cos q, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

где для  $\alpha$  верхний знак для часового угла  $t < 12^h$ , нижний – для  $12^h < t < 24^h$ ; для  $\delta$  верхний знак для северных

широт, нижний – для южных;  $\cos q = \frac{\sin \varphi - \sin \delta \cos z}{\cos \delta \sin z}$ ;

$q$  – параллактический угол;  $\varphi$  – широта.

Более современная модель учета рефракции приводится в работе [68]

$$\begin{aligned} \Delta z_0 &= 16,27 \operatorname{tg} z \left[ 1 + 0,0000394 \operatorname{tg}^2 z \left( \frac{P - 0,156e}{T} \right) \right] \left( \frac{P - 0,156e}{T} \right) - \\ &- 0,0749 \left( \operatorname{tg}^3 z + \operatorname{tg} z \right) \left( \frac{P}{1000} \right) + \delta'', \end{aligned}$$

где  $z$  – видимое зенитное расстояние;  $P$  – атмосферное давление в миллибарах;  $e$  – парциальное давление паров воды в миллибарах;  $T$  – абсолютная температура по шкале Кельвина  $T = 273,16^\circ + t^\circ\text{C}$ ;  $\delta''$  – поправочное слагаемое в угловых секундах за отброшенные члены разложения в ряд, выбираемое из табл. 1.1.

Таблица 1.1

Видимое зенитное расстояние	Высота станции над уровнем моря, км					
	0	1	2	3	4	5
66°00'	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
70 00	0,04	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02
74 00	0,12	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06
76 00	0,23	0,20	0,18	0,16	0,14	0,12
77 00	0,33	0,29	0,26	0,23	0,20	0,17
77 30	0,40	0,35	0,31	0,27	0,24	0,21
78 00	0,48	0,43	0,38	0,33	0,29	0,25
78 20	0,55	0,49	0,43	0,38	0,33	0,29
78 40	0,63	0,56	0,49	0,44	0,38	0,33
79 00	0,73	0,64	0,57	0,50	0,44	0,38
79 10	0,78	0,69	0,61	0,54	0,47	0,41
79 20	0,84	0,75	0,66	0,58	0,51	0,45
79 30	0,91	0,80	0,71	0,63	0,55	0,48
79 40	0,98	0,87	0,77	0,68	0,59	0,52
79 50	1,05	0,94	0,83	0,73	0,64	0,56
80 00	1,14	1,01	0,90	0,79	0,69	0,61

В работе [79] выведены формулы для лазерной и радиодальностей, учитывающие реальные метеоусловия,

$$\Delta s_l = 0,002357 \sec z (P + 0,06e - B \operatorname{tg}^2 z) + \delta_s; \quad (1.1.5)$$

$$\Delta s_r = 0,002277 \sec z [P + (1255/T + 0,05) e - B \operatorname{tg}^2 z] + \delta_s,$$

где  $B$  выбирается из табл. 1.2, а поправочный член  $\delta_s$  и табл. 1.3.

Таблица 1.2

Высота станции над уровнем моря, км	В, мб	Высота станции над уровнем моря, км	В, мб
0,0	1,156	2,0	0,874
0,5	1,079	2,5	0,813
1,0	1,006	3,0	0,757
1,5	0,938	4,0	0,654
2,0	0,874	5,0	0,563

Таблица 1.3

Видимое зенитное расстояние	Высота станции над уровнем моря, км							
	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5
60,00°	0,003	0,003	0,002	0,002	0,002	0,002	0,001	0,001
66,00	6	6	5	5	4	3	3	2
70,00	12	11	10	9	8	6	5	4
73,00	20	18	17	15	13	11	9	7
75,00	31	28	25	23	21	17	14	11
76,00	39	35	32	29	26	21	17	14
77,00	50	45	41	37	33	27	22	18
78,00	65	59	54	49	44	36	30	24
78,50	75	68	62	56	51	42	34	28
79,00	87	79	72	65	59	49	40	33
79,50	102	93	85	77	70	58	47	39
79,75	111	101	92	83	76	63	52	43
80,00	0,121	0,110	0,100	0,091	0,083	0,068	0,056	0,047

Формула для лазерной дальности выведена для рубинового лазера с длиной волны 0,6943  $\mu$ , для других систем первый коэффициент в формуле (1.1.5) вычисляется по формуле

$$\frac{0,3946(173,3 + 1/\lambda^2)}{(173,3 - 1/\lambda^2)^2},$$

где  $\lambda$  – эффективная длина волны в микронах.

Учет прецессии и нутации в прямоугольных координатах  $x, y, z$  выполняется по формуле

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \mathbf{NP} \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}, \quad (1.1.6)$$

где  $x, y, z$  – инерциальные координаты в эпоху  $t$ ,  $x_0, y_0, z_0$  – в эпоху  $t_0$ ; матрица нутации

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\psi_s \cos \epsilon & -\Delta\psi_s \sin \epsilon \\ \Delta\psi_s \cos \epsilon & 1 & -\Delta\epsilon_s \\ \Delta\psi_s \sin \epsilon & \Delta\epsilon_s & 1 \end{bmatrix},$$

где  $\Delta\psi_s, \Delta\epsilon_s$  – нутация в долготе и наклоне соответственно (выбирают из АЕ на дату);  $\epsilon$  – истинный наклон эклиптики к экватору; матрица прецессии

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{bmatrix},$$

где  $X_x = \cos \zeta_0 \cos z \cos \theta - \sin \zeta_0 \sin z$ ;  
 $Y_x = -\sin \zeta_0 \cos z \cos \theta - \cos \zeta_0 \sin z$ ;  
 $Z_x = -\cos z \sin \theta$ ;

$$\begin{aligned}
X_Y &= \cos \zeta_0 \sin z \cos \theta + \sin \zeta_0 \cos z; \\
Y_Y &= -\sin \zeta_0 \sin z \cos \theta + \cos \tau_0 \cos z; \\
Z_Y &= -\sin z \sin \theta; \\
X_Z &= \cos \zeta_0 \sin \theta; \\
Y_Z &= -\sin \zeta_0 \sin \theta; \\
Z_Z &= \cos \theta
\end{aligned}$$

После введения указанных поправок мы получаем координаты космических объектов в геоцентрической инерциальной системе.

Начиная с 1986 года в АЕ при вычислении видимых мест звезд используются численные эфемериды DE200/LE200 [81], которые основаны на наиболее точной в настоящее время динамической модели движения Солнца, планет и барицентра Земля-Луна относительно барицентра Солнечной системы (DE200) и движения Луны относительно геоцентра (LE200) в прямоугольной системе координат, определенной геоэкватором и равноденствием стандартной эпохи J2000.0. Эфемериды получены в результате численного интегрирования с учетом модели приливов в коре Земли, морских приливов, солнечного излучения, современной модели ГПЗ на период с 1985 по 2060 год. При этом использовались наблюдения Солнца и планет меридиональным кругом, радиодальномерные наблюдения планет и космических аппаратов, лазерные наблюдения отражателей на Луне по международной программе MERIT.

Видимые места звезд с использованием указанных эфемерид вычисляются в следующем порядке.

1. Всемирное время наблюдений приводится в шкалу барицентрического динамического времени TDB, которое мало отличается от земного динамического времени TDT.

2. На момент наблюдения из АЕ выбираются координаты барицентрического положения  $\mathbf{E}_\odot$  и составляющие скорости  $\mathbf{E}_\odot$  Земли, а также координаты гелиоцентричес-

кого положения Земли  $\mathbf{E}$ , отнесенные к экватору и равноденствию J2000.0. Компоненты векторов  $\mathbf{E}_b$  и  $\mathbf{E}$  выражены в астрономических единицах, вектора  $\mathbf{E}_b$  – в астрономических единицах в сутки. Вычисляются направляющие косинусы вектора барицентрического положения звезды  $\mathbf{q}$ , отнесенные к экватору и равноденствию эпохи J2000.0

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\cos \alpha_0 \cos \delta_0 \quad \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \quad \sin \delta_0).$$

Определяются проекции вектора собственного движения звезды  $\mathbf{m}$ , выраженные в радианах в столетие, по формуле

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} -\mu_\alpha \cos \delta_0 \sin \alpha_0 - \mu_\delta \sin \delta_0 \cos \alpha_0 + v\pi \cos \delta_0 \cos \alpha_0 \\ \mu_\alpha \cos \delta_0 \cos \alpha_0 - \mu_\delta \sin \delta_0 \sin \alpha_0 + v\pi \cos \delta_0 \sin \alpha_0 \\ \mu_\delta \cos \delta_0 + v\pi \sin \delta_0 \end{bmatrix}$$

где радиальная скорость звезды  $v$  выражена в астрономических единицах за столетие, собственные движения  $\mu$  и параллакс  $\pi$  – в радианах. На момент наблюдения  $t$  вычисляется геоцентрический вектор звезды  $\mathbf{P} = \mathbf{q} + T\mathbf{m} - \pi\mathbf{E}_b$ , где  $T = (JD(t) - 2451545.0)/36525$  – интервал времени между моментом наблюдения и стандартной эпохой J2000.0, выраженный в юлианских столетиях. Далее вычисляются направляющие косинусы векторов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{E}$   $\mathbf{p} = \mathbf{P}/|\mathbf{P}|$ ;  $\mathbf{e} = \mathbf{E}/|\mathbf{E}|$ , где  $|\mathbf{P}|$  и  $|\mathbf{E}|$  – норма соответствующего вектора.

3. При особо точных вычислениях в вектор геоцентрического направления на звезду вводится поправка за гравитационное отклонение света

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p} + \frac{2\mu(\mathbf{e} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e})\mathbf{p})}{c^2|\mathbf{E}|(1 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{e})},$$

где  $2\mu/c^2 = 19,74 \cdot 10^{-9}$  а. е., точка означает скалярное произведение векторов.

4. Далее учитывается абберация в геоцентрической инерциальной системе координат, движущейся со скоростью  $\mathbf{V}$  относительно истинной системы отсчета,

$$\mathbf{p}_2 = \left( \beta^{-1} \mathbf{p}_1 + \mathbf{V} + \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{V})\mathbf{V}}{1 + \beta^{-1}} \right) / (1 + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{V}),$$

где  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{E}}_b/c = 0,0057755\dot{\mathbf{E}}_b$ ;  $\beta = (1 - V^2)^{-1/2}$ ;  $c$  – скорость света.

5. Наконец, по формуле (1.1.6) учитывается влияние прецессии и нутации и осуществляется переход обратно к сферическим координатам  $\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_3(x \ y \ z)$ ;  $\alpha = \text{arctg}(y/x)$ ;  $\delta = \text{arcsin } z$ .

---

## 1.2. Геоцентрическая общеземная система координат

---

В космической геодезии используется, в основном, геоцентрическая декартова система координат  $X, Y, Z$ , начало которой совмещено с центром масс Земли. Направления ее осей впервые были зафиксированы на XIV Генеральной ассамблее Международной ассоциации геодезии (МАГ) в 1967 году [47]. Направление полярной оси  $Z$  номинально соответствует направлению от ЦМЗ на средний полюс Земли в период 1900–1905 годов – Международному условному началу (МУН или СИО – Conventional International Origin – согласованное международное начало). Начало счета долгот реализуется косвенным образом, как результат обработки долготных наблюдений национальных служб времени, сотрудничающих в рамках Международного бюро времени (ВН – Bureau International de l'Heure), и задается принятыми долготами этих служб после учета поправок за движение полюса. Оно соответствует точке на среднем экваторе в период 1900–1905 годов вблизи Гринвичского меридиана. Одно из требований к установлению геоцентрической системы координат, выдвинутое на Международном коллоквиуме по отсчетным системам координат для динамики Земли (Торунь, Польша, 1974), – ее малая чувстви-

тельность к изменениям в распределении станций наблюдений за геодезическими ИСЗ или в частоте наблюдения с отдельных станций.

В соответствии с последним требованием большинство исследователей считали наиболее целесообразным использовать при реализации геоцентрической системы координат систему большого числа пунктов космической геодезической сети (КГС), расположенных на различных тектонических плитах, поскольку такая система устойчива к изменениям в числе и распределении наблюдательных станций, к объему и точности наблюдений с них, к “собственным” их движениям. Точность реализации геоцентрической системы оценивалась в результате сравнения координат станций, полученных спутниковым динамическим методом из различных выводов. Например, в работе [69] выявлены расхождения систем координат Стандартной Земли II и модели GEM–6 до 11,5 м. Позже был сделан вывод [80], что эти расхождения связаны с неравномерным распределением станций наблюдения на поверхности Земли, т. е. реализовать требование геоцентричности системы координат оказалось не так просто.

Редуцирование звездных положений, описанное в разделе 1.1, приводит их экваториальные координаты к началу геоцентрической системы координат. Для приведения инерциальных координат околоземных объектов геоцентрическим необходимо также учесть вращение Земли, движение полюса и ввести поправки за перенос начала координат в точку наблюдения. Инерциальные координаты ИСЗ приводятся к геоцентрическим с помощью матрицы вращения по формуле

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos S & -\sin S & 0 \\ \sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_0, \quad (1.2.1)$$

где  $S$  – гринвичское звездное время.

Определим производные по времени и найдем формулу для составляющих скорости

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_e \sin S & -\omega_e \cos S & 0 \\ \omega_e \cos S & -\omega_e \sin S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_0 + \begin{bmatrix} \cos S & -\sin S & 0 \\ \sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}_0,$$

где  $\omega_e$  — угловая скорость вращения Земли в радианах.

Теперь гринвичские координаты и скорость ИСЗ могут быть вычислены от инерциальных по формуле

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos S & -\sin S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin S & \cos S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_e \sin S & -\omega_e \cos S & 0 & \cos S & -\sin S & 0 \\ \omega_e \cos S & -\omega_e \sin S & 0 & \sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}_0. \quad (1.2.2)$$

Инерциальные координаты по гринвичским вычисляются по формуле

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} \cos S & -\sin S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin S & \cos S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_e \sin S & -\omega_e \cos S & 0 & \cos S & -\sin S & 0 \\ \omega_e \cos S & -\omega_e \sin S & 0 & \sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}, \quad (1.2.3)$$

где матрица преобразования представляет собой произведение двух матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_e & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega_e & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos S & -\sin S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin S & \cos S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos S & -\sin S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Первая из них имеет блочный вид, при обращении по формуле Фробениуса она принимает вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{E} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A} & \mathbf{E} \end{bmatrix},$$

т. е. недиагональный блок просто меняет знак на обратный.

Вторая — ортогональная матрица вращения, обратной к которой является транспонированная. Перемножив обращенные таким образом матрицы, убеждаемся, что общую обратную матрицу можно получить, используя простое мнемоническое правило [4], транспонируя независимо каждый блок  $3 \times 3$  исходной матрицы.

Для приведения средних координат к мгновенному полюсу применяется формула

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -u \\ 0 & 1 & v \\ u & -v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_m, \quad (1.2.4)$$

где  $u = x_p/b$ ;  $v = y_p/b$  — координаты полюса в радианной мере;  $x_p, y_p$  — плоские прямоугольные координаты полюса;  $b$  — малая полуось земного эллипсоида.

Координаты полюса могут учитываться в координатах как ИСЗ, так и пунктов КГС. В экваториальные координаты ИСЗ необходимо ввести поправки за суточный параллакс при уравнивании фотографических наблюдений.

Топоцентрические координаты  $\alpha'$ ,  $\delta'$  вычисляются по геоцентрическим  $\alpha$ ,  $\delta$  с помощью формул

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha') = \frac{\rho \cos \varphi \sin \pi \sin(s - \alpha)}{\cos \delta - \rho \cos \varphi \sin \pi \cos(s - \alpha)};$$

$$\operatorname{tg}(\delta' - \delta) = \frac{\rho \sin \pi \sin \varphi \cos e \gamma \sin(\delta - \gamma)}{1 - \rho \sin \pi \sin \varphi \cos e \gamma \cos(\delta - \gamma)};$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \varphi \cos \frac{t' - t}{2} \sec \frac{t' + t}{2},$$

где  $t = s - \alpha$ ;  $t' = s - \alpha'$ ;  $s$  — местное звездное время; геоцентрический (суточный) параллакс  $\pi = \operatorname{arcsin} a_e / \Delta$ ;  $a_e$  — большая полуось земного эллипсоида;  $\Delta$  — геоцентрическое расстояние объекта;  $\rho = r/a_e$ ;  $r$  — геоцентрическое расстояние точки наблюдения;  $\varphi$  — геоцентрическая широта;  $\operatorname{tg} \varphi = (1 - e^2) \operatorname{tg} B$ ;  $e$  — первый эксцентриситет земного эллипсоида;  $B$  — геодезическая широта.

Выше была рассмотрена связь общеземной геоцентрической системы координат с геоцентрической инерциальной. Связь общеземной системы координат с референцной в общем случае выражается формулой

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{ОЗЭ}} = (1 + m) \begin{bmatrix} 1 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 1 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{P}} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}, \quad (1.2.5)$$

где нижние индексы означают: ОЗЭ — общеземные координаты, P — геоцентрические с началом в центре референц-эллипсоида.

В частности, Параметры Земли 1990 года, связывающие общеземную геоцентрическую систему координат России с системой 1942 года, имеют следующие значения:

- масштабная поправка  $m = 0$ ;
- углы поворота вокруг соответствующих осей равны  $\omega_x = 0''$ ;  $\omega_y = 0,35''$ ;  $\omega_z = 0,66''$ ;
- координаты начала ОЗЭ относительно системы 1942

года равны  $\Delta X = 25$  м;  $\Delta Y = -141$  м;  $\Delta Z = -80$  м.

Из формулы (1.2.5) легко получить формулу обратного перехода от общеземной системы к системе 1942 года

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{42} = \frac{1}{1+m} \begin{bmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - \Delta X \\ Y - \Delta Y \\ Z - \Delta Z \end{bmatrix}_{033}, \quad (1.2.6)$$

где матрица вращения на малые углы поворота является ортогональной, т. е. обратной к ней является транспонированная матрица.

В этом легко убедиться, если вспомнить, что эта матрица является произведением трех элементарных матриц вращения на углы  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  вокруг соответствующих осей. Действительно, перемножив матрицы

$$\mathbf{G}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_x & -\sin \omega_x \\ 0 & \sin \omega_x & \cos \omega_x \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_Y = \begin{bmatrix} \cos \omega_y & 0 & \sin \omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \omega_y & 0 & \cos \omega_y \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{G}_Z = \begin{bmatrix} \cos \omega_z & -\sin \omega_z & 0 \\ \sin \omega_z & \cos \omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

получим

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \cos \omega_y \cos \omega_z & & \\ \cos \omega_x \sin \omega_z + \sin \omega_x \sin \omega_y \cos \omega_z & & \\ \sin \omega_x \sin \omega_z - \cos \omega_x \sin \omega_y \cos \omega_z & & \\ & -\cos \omega_y \sin \omega_z & \sin \omega_y \\ \cos \omega_x \cos \omega_z - \sin \omega_x \sin \omega_y \sin \omega_z & -\sin \omega_x \cos \omega_y & \\ \sin \omega_x \cos \omega_z + \cos \omega_x \sin \omega_y \sin \omega_z & \cos \omega_x \cos \omega_y & \end{bmatrix}.$$

Учитывая малость углов  $\omega$ , можно пренебречь произведениями синусов. Тогда получим матрицу вращения,

использованную в формуле (1.2.5). Может возникнуть вопрос, почему в матрице  $G_y$  принято обратное направление вращения. Так как существуют различные выводы и интерпретации этой формулы, здесь принимается версия, выдвинутая при выводе параметров ПЗ–90. Во-первых, за положительное значение углов  $\omega_i$  принято направление против хода часовой стрелки при взгляде с конца положительного направления соответствующей оси на начало координат. Во-вторых, в начальном положении ось  $X$  референционной системы координат предполагается находящейся в первом октанте, когда все координаты орты абсцисс положительны. Ось  $Y$  в это время находится в октанте, где координаты орты ординат положительны, кроме отрицательной абсциссы, а ось  $Z$  находится в октанте с отрицательными абсциссой и ординатой и положительной аппликатой. Вначале поворачиваем референционную систему координат вокруг оси  $Z$  геоцентрической системы на угол  $\omega_z$  по ходу часовой стрелки до совмещения оси  $X$  с плоскостью  $XOZ$ . Затем вращаем ее вокруг оси  $Y$  геоцентрической системы на угол  $\omega_y$  против хода часовой стрелки до совмещения оси  $x$  референционной системы с соответствующей осью геоцентрической системы. При этом плоскости  $YOZ$  обеих систем координат окажутся совмещенными. Остается повернуть оси  $Y$  и  $Z$  по ходу часовой стрелки на угол  $\omega_x$  до совмещения с соответствующими осями геоцентрической системы координат.

Если определены только линейные элементы, формулы (1.2.5), (1.2.6) упрощаются и принимают вид

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{033} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{42} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{42} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{033} - \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}. \quad (1.2.7)$$

До сих пор не упоминались земные эллипсоиды, так как, в принципе, космическая геодезия не нуждается в поверхностях относимости и все ее задачи решаются на физической поверхности Земли. Однако геоцентрическая

декартова система координат связана также с геодезической системой, что будет рассмотрено в разделе 1.6. Именно с помощью геоцентрической системы координат удастся связать наземные и космические геодезические сети.

---

### 1.3. Орбитальная система координат. Элементы орбиты

---

Орбитальную систему координат определяют плоскость орбиты, эксцентрическая аномалия  $E$ , девиация  $D$  и радиальное расстояние  $r_0$ . Девиация определяет угловое отклонение объекта в эпоху  $t$  от плоскости орбиты в начальную эпоху  $t_0$  из-за возмущений в его движении. Для перехода от орбитальной системы координат в прямоугольную необходимо знание элементов орбиты. Элементы орбиты характеризуют положение орбиты в пространстве, ее размер и форму, а также положение небесного тела на орбите.

В космической геодезии наиболее часто используют следующие элементы эллиптической орбиты:

$a$  – большая полуось;

$e$  – эксцентриситет;

$i$  – наклон плоскости орбиты к экватору;

$M_0$  – средняя аномалия в эпоху  $t_0$ ;

$\omega$  – аргумент перигея (угловое расстояние перицентра от узла);

$\Omega$  – долгота восходящего узла орбиты.

Для перехода от орбитальной системы координат в эпоху  $t_0$  к инерциальной прямоугольной в эпоху  $t$  используются формулы

$$\begin{aligned}x &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i); \\y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i); \\z &= r \sin u \sin i,\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

где  $u = v + \omega$  – аргумент широты;

$r = a (1 - e^2) / (1 + e \cos u)$  – радиус-вектор объекта;

истинная аномалия  $\nu$  вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2};$$

эксцентрическая аномалия  $E$  вычисляется итерациями из уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = M,$$

где средняя аномалия  $M = n(t - t_0) + M_0$ ;  $n = \sqrt{\mu / a^3}$  – среднее движение;  $\mu$  – геоцентрическая гравитационная постоянная.

Если формулы (1.3.1) про дифференцировать по времени  $t$ , то получим формулы для составляющих скорости движущегося объекта

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x}{r} V_r - (\sin u \cos \Omega + \cos u \sin \Omega \cos i) V_n; \\ \dot{y} &= \frac{y}{r} V_r - (\sin u \sin \Omega - \cos u \cos \Omega \cos i) V_n; \\ \dot{z} &= \frac{z}{r} V_r + \cos u \sin i V_n, \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

где  $V_r = \sqrt{\mu / a(1-e^2)} e \sin \nu$  – радиальная скорость;

$V_n = \sqrt{\mu / a(1-e^2)} (1 + e \cos \nu)$  – трансверсальная (касательная к орбите) скорость; полная скорость

$$\dot{S} = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{V_r^2 + V_n^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

---

#### **1.4. Объектоцентрическая система координат**

---

В работе [54] под объектоцентрической системой

координат понимается система, отнесенная к центру масс ИСЗ с осями, направленными по радиусу-вектору и к точкам юга и востока в плоскости местного горизонта. Однако для анализа точности вычисления положения ИСЗ и остаточных уклонений измеренных величин чаще используется система координат, оси которой направлены вдоль радиуса-вектора и перпендикулярно к нему по движению ИСЗ в плоскости и поперек орбиты так, чтобы система оказалась правой.

Направляющие косинусы осей такой системы координат относительно инерциальной равны

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i \\ \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i \\ \sin u \sin i \end{bmatrix}; \quad (1.4.1)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i \\ -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i \\ \cos u \sin i \end{bmatrix}; \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \sin \Omega \sin i \\ -\cos \Omega \sin i \\ \cos i \end{bmatrix},$$

где  $u = \omega + v$  — аргумент широты;  $v$  — истинная аномалия.

Направляющие косинусы связаны с инерциальными координатами и составляющими скорости формулами

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} x & y & z \\ r & r & r \end{bmatrix}^T; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \dot{S} & \dot{S} & \dot{S} \end{bmatrix}^T; \quad \dot{S} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2};$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{U} \times \mathbf{S}; \quad \mathbf{V} = \mathbf{W} \times \mathbf{U},$$

где переход к ортогональным векторам  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$  осуществляется через вектор скорости  $\mathbf{S}$ , касательный к орбите.

Инерциальные координаты и составляющие скорости ИСЗ в этой системе координат выражаются формулами

$$\mathbf{r} = r\mathbf{U} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{U} + r\dot{\theta}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix},$$

где  $r = a(1 - e\cos E)$ ;  $\dot{r} = \frac{a^2 n e \sin E}{r}$ ;  $r\dot{\theta} = \frac{a^2 n \sqrt{1 - e^2}}{r}$ .

### 1.5. Понятие центра масс и осей инерции в физике

Центром инерции, или центром масс системы материальных точек в физике [68] называется точка  $C(x_c, y_c, z_c)$ , радиус-вектор  $\mathbf{r}_c$  которой связан с массами  $m_i$  и радиусами-векторами  $\mathbf{r}_i$  всех  $k$  точек системы соотношением

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^k m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^k m_i},$$

так что

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^k m_i x_i}{\sum_{i=1}^k m_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^k m_i y_i}{\sum_{i=1}^k m_i}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^k m_i z_i}{\sum_{i=1}^k m_i}.$$

Координаты центра инерции тела равны

$$x_c = \frac{\int x dm}{m} = \frac{\int \rho x dv}{m}; \quad y_c = \frac{\int y dm}{m} = \frac{\int \rho y dv}{m};$$

$$z_c = \frac{\int z dm}{m} = \frac{\int \rho z dv}{m},$$

где  $\rho$  — плотность тела в объеме  $dv$ , так что  $dm = \rho dv$ .

Если тело однородное, то

$$x_c = \frac{1}{V} \int x dv; \quad y_c = \frac{1}{V} \int y dv; \quad z_c = \frac{1}{V} \int z dv,$$

т. е. в этом случае координаты центра инерции зависят только от его геометрической формы.

Однако Земля не является ни однородным, ни симметричным телом, а распределение масс внутри нее оказывается известным весьма приближенно<sup>1</sup>, поэтому приведенные формулы являются практически бесполезными. Кроме того, Земля совершает вращательное движение вокруг своей главной оси инерции.

Моментом инерции тела относительно оси называется величина, являющаяся мерой инертности тела во вращательном движении вокруг этой оси и равная сумме произведений масс всех частиц тела на квадраты их расстояний от той же оси

$$J_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm = \int_{(v)} (y^2 + z^2) dv = \iiint_{(v)} (y^2 + z^2) \rho dx dy dz;$$

$$J_y = \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm = \int_{(v)} (x^2 + z^2) dv = \iiint_{(v)} (x^2 + z^2) \rho dx dy dz;$$

$$J_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm = \int_{(v)} (x^2 + y^2) dv = \iiint_{(v)} (x^2 + y^2) \rho dx dy dz,$$

где  $m$ ,  $\rho$  и  $v$  — масса, плотность и объем тела;  $x$ ,  $y$  и  $z$  — координаты элементарной частицы тела, имеющей объем  $dv$  и массу  $dm$ .

---

<sup>1</sup> Модель внутреннего строения Земли, предложенная в 1975 г. Международной группой сейсмологов в составе Dziewonski, Hales и Lapwood и пользующаяся большой популярностью у геофизиков, принята в работе [77] за основу при вычислении сжатия, постоянной прецессии и моментов инерции для гидростатической Земли.

Момент инерции зависит только от формы тела и расположения масс в нем. Центробежными моментами инерции тела по отношению к осям прямоугольной системы координат ( $O_x, O_y, O_z$ ) называются выражения

$$J_{xy} = \int_{(m)} xydm = \int_{(v)} xypdv = \iiint_{(v)} xypdx dy dz;$$

$$J_{xz} = \int_{(m)} xzdm = \int_{(v)} xzpdv = \iiint_{(v)} xzpdx dy dz;$$

$$J_{yz} = \int_{(m)} yzdm = \int_{(v)} yzpdv = \iiint_{(v)} yzpdx dy dz.$$

Моменты инерции твердого тела  $J_a$  относительно всевозможных осей  $a$ , проходящих через какую-либо точку  $O$ , связаны с моментами инерции этого тела по отношению к осям координатной системы ( $O_x, O_y, O_z$ ), начало которой совпадает с  $O$ , соотношением

$$J_a = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - \\ - 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma,$$

где  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  – углы, образуемые осью  $a$  соответственно с осями  $O_x, O_y$  и  $O_z$ .

Ось  $O_x$  называется главной осью инерции тела, если центробежные моменты инерции  $J_{xy}$  и  $J_{xz}$  одновременно равны нулю. Через каждую точку тела можно провести три взаимно перпендикулярные главные оси инерции  $O_x, O_y$  и  $O_z$  так, что

$$J_a = J_1 \cos^2 \alpha' + J_2 \cos^2 \beta' + J_3 \cos^2 \gamma',$$

где  $\alpha', \beta'$  и  $\gamma'$  – углы, образуемые осью  $a$  с осями  $O_x, O_y$  и  $O_z$ ;  $J_1, J_2, J_3$  – моменты инерции тела по отношению к главным осям инерции в точке  $O$ , называемые главными моментами инерции.

Если через точку  $O$  твердого тела провести всевозможные оси  $a$  и вдоль каждой из них отложить отрезки  $OA$ , численно равные  $1/\sqrt{J_a}$ , то геометрическое место точек  $A$  будет представлять собой эллипсоид инерции тела в точке  $O$ .

Главные оси эллипсоида инерции совпадают с главными осями инерции тела в точке  $O$ . Центральным эллипсоидом инерции твердого тела называется эллипсоид инерции, соответствующий центру инерции этого тела. Главные оси центрального эллипсоида инерции тела называются главными центральными осями инерции, моменты инерции тела относительно этих осей – главными центральными моментами инерции. Центральная ось инерции является главной осью инерции во всех точках тела, принадлежащих этой оси. Если однородное тело имеет ось симметрии, то эта ось является одной из его центральных осей инерции.

Сила притяжения Земли в совокупности с центробежной силой вращения создает на ее поверхности силу тяжести, изучение которой дает возможность определить направление осей ее инерции и положение ЦМЗ.

---

## 1.6. Геодезические системы координат

---

Геодезические системы координат могут быть определены как на общеземном эллипсоиде, так и на референц-эллипсоиде. Геодезическая широта  $B$  отсчитывается от плоскости экватора и равна углу между нормалью к поверхности эллипсоида в данной точке и плоскостью экватора. Геодезическая долгота  $L$  отсчитывается от начального меридиана до меридиана данной точки  $A$  (рис. 1.1), геодезическая высота – по нормали от поверхности эллипсоида до данной точки. Поверхность эллипсоида задается его большой полуосью  $a$  и сжатием  $\alpha$  или первым эксцентриситетом  $e$ . Между сжатием и первым эксцентриситетом существует следующая зависимость

$$e^2 = (2 - \alpha) \alpha. \quad (1.6.1)$$

Например, сжатие референц-эллипсоида Красовского  $\alpha = 1 : 298,3$ , квадрат первого эксцентриситета  $e^2 = 0,006693421623$ . Рис. 1.1 позволяет легко установить зависимость между геоцентрическими и геодезическими

координатами, что было сделано Э. Пуччи в работе [78] еще в 1886–1887 годах

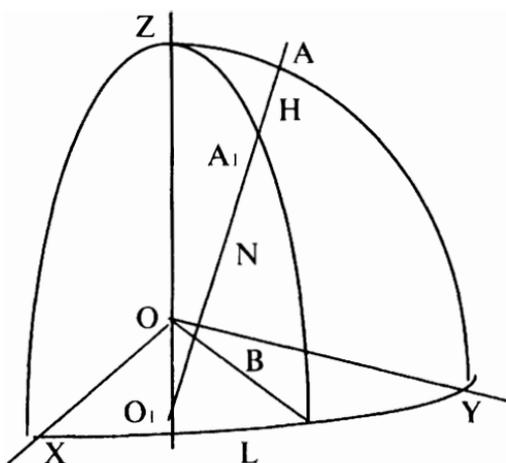


Рис. 1.1. Геодезические координаты

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L; \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L; \\ Z &= (N + H - N e^2) \sin B, \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

где  $N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$  – длина нормали на широте  $B$ , называемая радиусом кривизны первого вертикала.

В дальнейшем нам понадобится также радиус кривизны меридиана в данной точке  $A_1$ , вычисляемый по формуле

$$M = a(1 - e^2) / (1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}. \quad (1.6.3)$$

Обратный переход от геоцентрических координат к геодезическим осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} L &= \arctg \frac{Y}{X}; \\ \operatorname{tg} B &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2} - a e^2 / \sqrt{1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 B}}; \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

$$H = \sqrt{X^2 + Y^2} \cos B + (Z + Ne^2 \sin B) \sin B - N,$$

где четверть для  $L$  определяется по знакам  $X$  и  $Y$ ; второе уравнение решается приближениями до заданной точности;  $N$  вычисляется по формуле (1.6.2).

После первичной обработки спутниковых наблюдений наряду с предварительными координатами пунктов и разностями координат между ними в геоцентрической системе координат даются также координаты и их разности в геодезической системе координат на общем земном эллипсоиде. Поэтому наряду с формулами пересчета координат из одной системы в другую ниже будут рассмотрены формулы для пересчета разностей координат.

Подставив выражения (1.6.2) в формулу (1.2.5), найдем формулы для пересчета геодезических координат с референц-эллипсоида на общий земной эллипсоид. Обозначим величины, относящиеся к общеземному эллипсоиду, с нижним индексом  $0$ , тогда

$$\begin{aligned} & (N_0 + H_0) \cos B_0 \cos L_0 - (N + H) \cos B \cos L = \\ & = (N + H)m \cos B \cos L - (1 + m)(N + H)\omega_z \cos B \sin L + \\ & + (1 + m)(N + H - Ne^2)\omega_y \sin B + \Delta X; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (N_0 + H_0) \cos B_0 \sin L_0 - (N + H) \cos B \sin L = \\ & = (N + H)m \cos B \sin L + (1 + m)(N + H)\omega_z \cos B \cos L - \\ & - (1 + m)(N + H - Ne^2)\omega_x \sin B + \Delta Y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (N_0 + H_0 - N_0 e_0^2) \sin B_0 - (N + H - Ne^2) \sin B = \\ & = (N + H - Ne^2)m \sin B - (1 + m)(N + H)\omega_y \cos B \cos L + \\ & + (1 + m)(N + H)\omega_x \cos B \sin L + \Delta Z. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $B_0 = B + dB$ ;  $L_0 = L + dL$ ;  $H_0 = H + dH$ ;  $a_0 = a + da$ ;  $e_0^2 = e^2 + de^2$ , в результате дифференцирования формул (1.6.2) по  $a_0$ ,  $e_0^2$ ,  $B_0$ ,  $L_0$ ,  $H_0$  найдем уравнения

$$\begin{aligned}
& \left[ N \frac{da}{a} + \frac{a \sin^2 B de^2}{2(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}} + dH \right] \cos B \cos L - (M + H) \sin B \cos L dB - \\
& - (N + H) \cos B \sin L dL = (N + H) m \cos B \cos L - \\
& - (1 + m)(N + H) \omega_z \cos B \sin L + (1 + m)(N + H - Ne^2) \omega_y \sin B + \Delta X; \\
& \left[ N \frac{da}{a} + \frac{a \sin^2 B de^2}{2(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}} + dH \right] \cos B \sin L - (M + H) \sin B \sin L dB + \\
& + (N + H) \cos B \cos L dL = (N + H) m \cos B \sin L + \\
& + (1 + m)(N + H) \omega_z \cos B \cos L - (1 + m)(N + H - Ne^2) \omega_x \sin B + \Delta Y; \\
& \left[ N(1 - e^2) \frac{da}{a} + \frac{1 - e^2 \sin^2 B + \cos^2 B}{2(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}} a de^2 + dH \right] \sin B + \\
& + (M + H) \cos B dB = (N + H - Ne^2) m \sin B - \\
& - (1 + m)(N + H) \cos B (\omega_y \cos L - \omega_x \sin L) + \Delta Z.
\end{aligned}$$

Решая полученную систему уравнений относительно  $dB$ ,  $dL$  и  $dH$ , найдем окончательные формулы

$$\begin{aligned}
B_0 = B + \frac{1}{M + H} & \left[ Ne^2 \sin B \cos B \frac{da}{a} + \left( N + \frac{M}{1 - e^2} \right) \sin B \cos B \frac{de^2}{2} - \right. \\
& - (\Delta X \cos L + \Delta Y \sin L) \sin B + \Delta Z \cos B + \left( \frac{a^2}{N} + H \right) (\omega_x \sin L - \\
& \left. - \omega_y \cos L) - Ne^2 m \sin B \cos B \right]; \tag{1.6.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_0 = L + \frac{1}{(N + H) \cos B} & \left[ \Delta Y \cos L - \Delta X \sin L - \right. \\
& \left. - (N + H - Ne^2) \sin B (\omega_x \cos L + \omega_y \sin L) \right] + \omega_z;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_0 = H - \frac{a}{N} da + N \sin^2 B \frac{de^2}{2} & + (\Delta X \cos L + \Delta Y \sin L) \cos B + \\
& + \Delta Z \sin B + Ne^2 \sin B \cos B (\omega_x \sin L - \omega_y \cos L) + \\
& + \left( a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} + H \right) m
\end{aligned}$$

для пересчета геодезических координат с референц-эллипсоида на общеземной эллипсоид.

Для вывода формул обратного пересчета выражения (1.6.2) необходимо подставить в формулу (1.2.6) и проделать предыдущие операции. Так как теперь известны координаты не в Системе 1942 года, а в общеземной системе, то дифференцировать надо по  $a$ ,  $e^2$ ,  $B$ ,  $L$ ,  $H$ , а также принимается  $B = B_0 + dB$ ;  $L = L_0 + dL$ ;  $H = H_0 + dH$ ;  $a = a_0 + da$  и  $e^2 = e_0^2 + de^2$ . Окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 B = B_0 + \frac{1}{M_0 + H_0} & \left\{ N_0 e_0^2 \sin B_0 \cos B_0 \frac{da}{a} + \right. \\
 + \left( N_0 + \frac{M_0}{1 - e_0^2} \right) & \sin B_0 \cos B_0 \frac{de^2}{2} + (\Delta X \cos L_0 + \Delta Y \sin L_0) \sin B_0 - \\
 - \Delta Z \cos B_0 - \left[ \left( \frac{a_0^2}{N_0} + H_0 \right) & \sin L_0 - \Delta Z \sin B_0 \sin L_0 - \Delta Y \cos B_0 \right] \omega_x + \\
 + \left[ \left( \frac{a_0^2}{N_0} + H_0 \right) \cos L_0 - \Delta Z \sin B_0 \cos L_0 - \Delta X \cos B_0 \right] & \omega_y + \\
 + (\Delta Y \cos L_0 - \Delta X \sin L_0) \omega_z \sin B_0 + N_0 e_0^2 m \sin B_0 \cos B_0 & \left. \right\}; \\
 L = L_0 + \frac{1}{(N_0 + H_0) \cos B_0} & \left\{ \Delta X \sin L_0 - \Delta Y \cos L_0 + \right. \\
 + \left[ (N_0 + H_0 - N_0 e_0^2) \sin B_0 \cos L_0 - \Delta Z \cos L_0 \right] \omega_x + & \left[ (N_0 + H_0 - N_0 e_0^2) \right. \\
 \times \sin B_0 \sin L_0 - \Delta Z \sin L_0 \left. \right] \omega_y & \left. - \left[ 1 - \frac{\Delta X \cos L_0 + \Delta Y \sin L_0}{(N_0 + H_0) \cos B_0} \right] \omega_z; \right. \\
 H = H_0 + \frac{a}{N_0} da - N_0 \sin^2 B_0 \frac{de^2}{2} - & (\Delta X \cos L_0 + \Delta Y \sin L_0) \cos B_0 - \\
 - \Delta Z \sin B_0 - \left( N_0 e_0^2 \sin B_0 \cos B_0 \sin L_0 + \Delta Z \cos B_0 \sin L_0 - \right. & \left. \right.
 \end{aligned}
 \tag{1.6.6}$$

$$\begin{aligned}
 & - \Delta Y \sin B_0) \omega_x + (N_0 e_0^2 \sin B_0 \cos B_0 \cos L_0 + \Delta Z \cos B_0 \cos L_0 - \\
 & - \Delta X \sin B_0) \omega_y - (\Delta Y \cos L_0 - \Delta X \sin L_0) \omega_z - (a_0 \sqrt{1 - e_0^2 \sin^2 B_0} + \\
 & + H_0) m.
 \end{aligned}$$

В формулах (1.6.5) и (1.6.6) разности полуосей и квадратов первых эксцентриситетов берутся как разность параметров эллипсоидов, на который переходят, минус исходный, а параметры ПЗ–90 берутся в обоих случаях с тем знаком, как они используются в формуле (1.2.5).

Если формулы (1.2.5) написать для координат двух пунктов и взять их разницу, то получится формула для пересчета разностей координат из Системы 1942 года в общеземную систему

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}_{039} = (1+m) \begin{bmatrix} 1 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 1 & \omega_x \\ -\omega_z & \omega_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}_{42}. \quad (1.6.7)$$

Выполнив те же операции с формулой (1.2.6), получим формулу для обратного пересчета

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}_{42} = \frac{1}{1+m} \begin{bmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}_{039} \quad (1.6.8)$$

В формулах (1.6.7) и (1.6.8)  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  обозначают уже не элементы ПЗ–90, которые исключены, а разности координат пунктов.

С формулами (1.6.5) и (1.6.6) задача значительно осложняется тем, что коэффициенты при параметрах на разных пунктах будут разными и необходимо снова дифференцировать их по геодезическим координатам, а их приращения заменить разностями геодезических координат. Тогда коэффициенты при параметрах могут вычисляться

только по координатам начального пункта, но полученные формулы будут слишком громоздкими. Вместо этого координаты обоих пунктов можно перевычислить в нужную систему, а затем вычислить разность координат.

---

### 1.7. Горизонтальная система координат

---

Большинство измерений на земной поверхности выполняются в горизонтальной системе координат, связанной с отвесной линией. В данной работе горизонтальной системой координат будет считаться система, вертикальная ось которой направлена по нормали к поверхности эллипсоида, а горизонтальные оси — по касательным к меридиану и параллели в сторону возрастания широт и долгот. Эта система координат отличается от системы, связанной с отвесной линией, на величины составляющих уклонения отвесной линии, поэтому в наблюдения необходимо вводить соответствующие поправки.

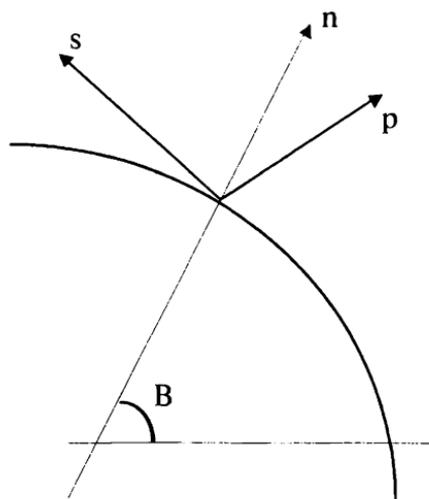


Рис. 1.2. Горизонтальные координаты

Направляющие косинусы оси  $\mathbf{n}$  равны

$$\mathbf{n} = (\cos B \cos L \quad \cos B \sin L \quad \sin B)$$

(рис. 1.2). Определив производные от них по широте, получим направляющие косинусы направления на север  $\mathbf{s}$ ,

$$\mathbf{s} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial B} = (-\sin B \cos L \quad -\sin B \sin L \quad \cos B),$$

а взяв производные по долготе, получим направляющие косинусы третьей оси  $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\cos B \partial L} = (-\sin L \quad \cos L \quad 0).$$

В этой системе координат геодезические азимуты отсчитываются в горизонтальной плоскости от оси  $\mathbf{s}$ , зенитные расстояния – от оси  $\mathbf{n}$ . Геодезические азимуты и зенитные расстояния в свою очередь представляют собой сферическую топоцентрическую систему координат, а при добавлении расстояния от начала координат – полярную топоцентрическую систему.

---

## **1.8. Плоские прямоугольные системы координат**

---

### **1.8.1. Место плоских прямоугольных систем координат в относительном методе космической геодезии**

В практике геодезических и картографических работ, как правило, используются плоские системы координат. Они получаются при отображении эллипсоида на плоскости с помощью формул картографических проекций. Наиболее употребительными из них являются проекции Гаусса и Ламберта. Существуют также условные плоские системы координат, которые отличаются нестандартными началами или приближенно аппроксимируют некоторую условную систему.

Поэтому геоцентрические координаты пунктов, определенные относительным методом, необходимо перевычислить в требуемую плоскую систему координат. Эти перевычисления ведутся в следующей последовательности:

- общеземные координаты  $X, Y, Z$  или  $B, L, H$  перевычисляются в референционную систему с помощью трех или семи элементов трансформирования, которые определяются при совместном уравнивании КГС и местных геодезических сетей;

- если в первой операции участвовали декартовы координаты  $X, Y, Z$ , то они перевычисляются в геодезические  $B, L, H$  на заданном референц-эллипсоиде;

- геодезические координаты перевычисляются в плоские прямоугольные;

- последние могут перевычисляться в условную систему координат.

Если уравнивание измерений выполняется в общеземной системе координат, исходные пункты перевычисляются в эту систему в обратном порядке. Если уравнивание измерений выполняется в какой-либо другой системе координат, необходимо перевычислить в нее измерения, их оценки и координаты исходных пунктов. В данной работе будет рассматриваться уравнивание измерений в общеземной пространственной декартовой системе координат  $X, Y, Z$ , поэтому понадобятся как прямая схема перевычислений, так и обратная – для перевычисления в общеземную систему координат исходных пунктов.

Перевычисление координат  $X, Y, Z$  в референционную систему и обратно, их перевычисление в геодезические системы и обратно выполняются по формулам, приведенным в разделах 1.2 и 1.6. Здесь будут рассмотрены вопросы пересчета геодезических координат в плоские и обратно, а также в некоторые условные системы координат. При этом, в основном, будут использованы обозначения и формулы, приведенные в работе [41].

### 1.8.2. Связь плоских прямоугольных и геодезических координат

Плоские прямоугольные координаты  $x, y$  получаются из геодезических координат  $B, L$  с помощью конформного отображения поверхности эллипсоида на плоскости в проекции Гаусса. Две непрерывные и дифференцируемые функции  $x$  и  $y$  двух независимых переменных  $q, L$ , которые являются координатными системами на плоскости и эллипсоиде, соответственно

$$x = f_1(q, L); \quad y = f_2(q, L) \quad (1.8.1)$$

образуют конформное отображение поверхности эллипсоида на плоскость, если они удовлетворяют уравнениям Коши-Римана

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial L}; \quad \frac{\partial y}{\partial q} = -\frac{\partial x}{\partial L}, \quad (1.8.2)$$

где  $q$  — изометрическая широта.

Геодезические координаты  $B, L$  не удовлетворяют этим условиям, поэтому вместо геодезической вводится изометрическая широта

$$q = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin B}{1 - \sin B} - \frac{e}{2} \ln \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B},$$

откуда

$$dq = \frac{M dB}{N \cos B}. \quad (1.8.3)$$

Теперь условия (1.8.2) могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial x}{\partial B} = \frac{M}{M \cos B} \frac{\partial y}{\partial L}; \quad \frac{\partial y}{\partial B} = -\frac{M}{N \cos B} \frac{\partial x}{\partial L}. \quad (1.8.4)$$

Если уравнения (1.8.1) записать в виде рядов от разности долгот  $l = L - L_0$ , где  $L$  — долгота текущей точки;  $L_0$  — долгота осевого меридиана зоны,

$$\begin{aligned} x &= X + a_2 l^2 + a_4 l^4 + a_6 l^6 + a_8 l^8 + \dots \\ y &= b_1 l + b_3 l^3 + b_5 l^5 + b_7 l^7 + \dots, \end{aligned} \quad (1.8.5)$$

и подставить в уравнения (1.8.4), то найдем выражения для вычисления коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$ . Здесь  $X$  — длина дуги меридиана от экватора до широты  $B$ .

Найдем от выражений (1.8.5) необходимые частные производные и подставим в уравнения (1.8.4)

$$\frac{\partial X}{\partial B} + \frac{\partial a_2}{\partial B} l^2 + \frac{\partial a_4}{\partial B} l^4 + \dots = \frac{M}{N \cos B} (b_1 + 3b_3 l^2 + 5b_5 l^4 + \dots);$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial B} l + \frac{\partial b_3}{\partial B} l^3 + \frac{\partial b_5}{\partial B} l^5 + \dots = -\frac{M}{N \cos B} (2a_2 l + 4a_4 l^3 + 6a_6 l^5 + \dots).$$

Приравняв члены с одинаковыми степенями  $l$ , найдем формулы для последовательного вычисления коэффициентов рядов (1.8.5), учитывая, что

$$\frac{\partial X}{\partial B} = M,$$

$$b_1 = \frac{N \cos B}{M} \frac{\partial X}{\partial B}; \quad a_2 = -\frac{N \cos B}{2M} \frac{\partial b_1}{\partial B}; \quad (1.8.6)$$

$$b_3 = \frac{N \cos B}{3M} \frac{\partial a_2}{\partial B}; \quad a_4 = -\frac{N \cos B}{4M} \frac{\partial b_3}{\partial B} \text{ и т. д.}$$

Через производные изометрических широт эти коэффициенты получаются по формуле

$$c_i = \frac{(-1)^{i+1}}{i!} \frac{\partial^i X}{\partial q^i},$$

где  $c$  поочередно обозначает коэффициенты  $b$  и  $a$  с соответствующими нижними индексами;  $\partial X / \partial q = N \cos B$ ; кроме того,

$$\frac{\partial X}{\partial q} = \frac{\partial X}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial q},$$

где

$$\frac{\partial X}{\partial B} = M; \quad \frac{\partial B}{\partial q} = \frac{N \cos B}{M}.$$

В работе [41] сделана попытка применить аналогичный способ для обратного пересчета плоских прямоугольных координат в геодезические. Для этого условия конформности представлены в виде

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{N \cos B}{M} \frac{\partial L}{\partial y}; \quad \frac{\partial B}{\partial y} = - \frac{N \cos B}{M} \frac{\partial L}{\partial x}, \quad (1.8.7)$$

а зависимость между координатами записана в виде

$$\begin{aligned} B &= B_x + A_2 y^2 + A_4 y^4 + A_6 y^6 + A_8 y^8 + \dots; \\ l &= B_1 y + B_3 y^3 + B_5 y^5 + B_7 y^7 + \dots \end{aligned} \quad (1.8.8)$$

Из (1.8.7) и (1.8.8) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial X} + \frac{\partial A_2}{\partial X} y^2 + \frac{\partial A_4}{\partial X} y^4 + \dots &= \frac{N \cos B}{M} (B_1 + 3B_3 y^2 + 5B_5 y^4 + \dots); \\ 2A_2 y + 4A_4 y^3 + \dots &= - \frac{N \cos B}{M} \left( \frac{\partial B_1}{\partial X} y + \frac{\partial B_3}{\partial X} y^3 + \frac{\partial B_5}{\partial X} y^5 + \dots \right) \end{aligned}$$

откуда следуют формулы

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{M}{N \cos B} \frac{\partial B}{\partial X}; \quad A_2 = - \frac{N \cos B}{2M} \frac{\partial B_1}{\partial X}; \\ B_3 &= \frac{M}{3N \cos B} \frac{\partial A_2}{\partial X}; \quad A_4 = - \frac{N \cos B}{4M} \frac{\partial B_3}{\partial X} \quad \text{и т. д.,} \end{aligned}$$

где

$$\frac{\partial B}{\partial X} = \frac{1}{M}.$$

Однако при дифференцировании легко убедиться в том, что этим способом получить коэффициенты  $A_i$  и  $B_i$  не удастся, кроме  $B_1$  и  $A_2$ , на которые наложены условия конформности (1.8.7).

Для выяснения причин неудачи рассмотрим соответствующие выражения от изометрических широт

$$B = B_x + \frac{\partial B}{\partial q}(q - q_x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial q^2}(q - q_x)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 B}{\partial q^3}(q - q_x)^3 + \dots;$$

$$l = \frac{\partial q}{\partial X} y - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 q}{\partial X^3} y^3 + \frac{1}{120} \frac{\partial^5 q}{\partial X^5} y^5 - \frac{1}{5040} \frac{\partial^7 q}{\partial X^7} y^7 + \dots, \quad (1.8.9)$$

где

$$q - q_x = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial X^2} y^2 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 q}{\partial X^4} y^4 - \frac{1}{720} \frac{\partial^6 q}{\partial X^6} y^6 + \dots$$

Как видно из выражений (1.8.9), только для  $q - q_x$  и  $l$  можно вычислить последовательные производные

$$C_i = \frac{(-1)^{i+1}}{i!} \frac{\partial^i q}{\partial X^i},$$

которые и являются искомыми коэффициентами  $A'_i$  и  $B'_i$ .

Затем для широты  $B$  следует вычислить новые коэффициенты  $A_i = \phi(A'_i)$ , в частности,

$$B_1 = B'_1; \quad A_2 = A'_2; \quad A_4 = \frac{\partial B}{\partial q} A'_4 + \frac{\partial^2 B}{\partial q^2} A'^2_2 \quad \text{и т. д.}$$

Следовательно, в рядах (1.8.8) произошла подмена изометрических широт геодезическими, хотя конечные формулы в работе [41] верны, так как они взяты из предыдущего издания книги [40], где для вывода соответствующих коэффициентов применялись исключительно изометрические широты. Ниже приводятся уточненные формулы и коэффициенты, позволяющие пересчитывать геодезические координаты в плоские прямоугольные и обратно с точностью лучше 1 мм при ширине зон до 9°.

### 1.8.3. Пересчет геодезических координат в плоские прямоугольные и обратно

Плоские прямоугольные координаты  $x$ ,  $y$  в конформной проекции Гаусса по геодезическим координатам на любом эллипсоиде вычисляются по формулам

$$x = d_0 B - \sin B \cos B \{a_0 - N / ^2 [0,5 + / ^2 (a_2 + / ^2 [a_4 + / ^2 (a_6 + a_8 / ^2)])]\}; \quad (1.8.10)$$

$$y = N / \cos B [1 + / ^2 (b_1 + / ^2 [b_3 + / ^2 (b_5 + b_7 / ^2)])],$$

где  $B$ ,  $L$  – геодезические координаты точки;

$/ = L - L_0$  – разность долгот точки и осевого меридиана зоны  $L_0$ , в которой вычисляются плоские координаты;

$N = a / (1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}$  – радиус кривизны первого вертикала;

$a$ ,  $e^2$  – большая полуось и квадрат первого эксцентриситета эллипсоида, на котором даны геодезические координаты;

$$a_0 = c_2 - c_4 \cos^2 B + c_6 \cos^4 B; \quad c_2 = d_2 + d_4 + d_6 + d_8;$$

$$c_4 = 2d_4 + \frac{16}{3} d_6; \quad c_6 = \frac{16}{3} d_6;$$

$$d_0 = m_0 + \frac{m_2}{2} + \frac{3}{8} m_4 + \frac{5}{16} m_6 + \frac{35}{128} m_8 + \frac{63}{256} m_{10};$$

$$d_2 = \frac{m_2}{2} + \frac{m_4}{2} + \frac{15}{32} m_6 + \frac{7}{16} m_8 + \frac{105}{256} m_{10};$$

$$d_4 = \frac{m_4}{8} + \frac{3}{16} m_6 + \frac{7}{32} m_8 + \frac{15}{64} m_{10}; \quad d_6 = \frac{m_6}{32} + \frac{m_8}{16} + \frac{45}{512} m_{10};$$

$$d_8 = \frac{m_8}{128} + \frac{5}{256} m_{10}; \quad d_{10} = \frac{m_{10}}{512};$$

$$m_0 = a (1 - e^2); \quad m_2 = 1,5 m_0 e^2; \quad m_4 = \frac{5}{4} m_2 e^2; \quad m_6 = \frac{7}{6} m_4 e^2;$$

$$m_8 = \frac{9}{8} m_6 e^2; \quad m_{10} = 1,1 m_8 e^2;$$

$$a_2 = -\frac{1}{24} + \frac{1}{4} \cos^2 B + \frac{3}{8} e'^2 \cos^4 B + \frac{e'^4}{6} \cos^6 B;$$

$$a_4 = \frac{1}{720} - \frac{1}{12} \cos^2 B + \left( \frac{1}{6} - \frac{11}{24} e'^2 \right) \cos^4 B + \left( \frac{5}{6} e'^2 - \frac{17}{18} e'^4 \right) \cos^6 B;$$

$$a_6 = -\frac{1}{40320} + \frac{91}{6720} \cos^2 B - \left( \frac{35}{336} - \frac{3073}{13440} e'^2 \right) \cos^4 B +$$

$$+ \left( \frac{7}{56} - \frac{61}{48} e'^2 + \frac{197}{160} e'^4 \right) \cos^6 B;$$

$$a_8 = \frac{1}{3628800} - \frac{41}{30240} \cos^2 B + \frac{161}{5040} \cos^4 B - \frac{10579}{90720} \cos^6 B;$$

$$b_1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cos^2 B + \frac{e'^2}{6} \cos^4 B;$$

$$b_3 = \frac{1}{120} - \frac{1}{6} \cos^2 B + \left( \frac{1}{5} - \frac{29}{60} e'^2 \right) \cos^4 B + (9e'^2 - 8e'^4) \frac{\cos^6 B}{15};$$

$$b_5 = -\frac{1}{5040} + \frac{91}{2520} \cos^2 B - \left( \frac{1}{6} - \frac{1771}{5040} e'^2 \right) \cos^4 B +$$

$$+ \left( \frac{1}{7} - \frac{171}{126} e'^2 + \frac{76}{63} e'^4 \right) \cos^6 B;$$

$$b_7 = \frac{1}{362880} - \frac{41}{90720} \cos^2 B + \left( \frac{161}{2520} - \frac{11797}{90720} e'^2 \right) \cos^4 B -$$

$$- \left( \frac{1}{6} - \frac{1001}{840} e'^2 \right) \cos^6 B,$$

где  $e'^2 = e^2/(1 - e^2)$ ;  $\alpha = (a - b)/a$ .

При вычислении коэффициентов  $d_i$  часто применяют экономизацию степенных рядов (см. приложение 1).

Для референц-эллипсоида Красовского с параметрами

$$a = 6\,378\,245 \text{ м}; e^2 = 0,006693421623; e'^2 = 0,006738525415;$$

$$m_0 = 6\,335\,552,717; d_0 = 6\,367\,558,4968746;$$

$$m_2 = 63\,609,7883244; d_2 = 32\,072,9605384359;$$

$$m_4 = 532,208916; d_4 = 67,312267161;$$

$$m_6 = 4,1560151; d_6 = 0,13185167;$$

$$m_8 = 0,0312952; d_8 = 0,000249;$$

$$m_{10} = 0,00023042; d_{10} = 4,5 \cdot 10^{-7};$$

$$a_0 = 32\,140,40494648 - 135,327743195 \cos^2 B + \\ + 0,703208929 \cos^4 B;$$

$$a_2 = -0,04166667 + 0,25 \cos^2 B + 0,00252695 \cos^4 B + \\ + 0,00000757 \cos^6 B;$$

$$a_4 = 0,00138889 - 0,08333333 \cos^2 B + 0,1635782 \cos^4 B + \\ + 0,00557255 \cos^6 B;$$

$$a_6 = -0,0000248 + 0,0135416 \cos^2 B - 0,102626 \cos^4 B + \\ + 0,1164924 \cos^6 B;$$

$$a_8 = 0,0000003 - 0,0013558 \cos^2 B + 0,0319444 \cos^4 B - \\ - 0,1166005 \cos^6 B;$$

$$b_1 = -0,16666667 + 0,33333333 \cos^2 B + 0,00112309 \cos^4 B;$$

$$b_3 = 0,00833333 - 0,16666667 \cos^2 B + 0,196743 \cos^4 B + \\ + 0,0040189 \cos^6 B;$$

$$b_5 = -0,0001984 + 0,0361111 \cos^2 B - 0,1642988 \cos^4 B + \\ + 0,1337668 \cos^6 B;$$

$$b_7 = 0,0000028 - 0,0004519 \cos^2 B + 0,0630126 \cos^4 B - \\ - 0,1586366 \cos^6 B.$$

По формулам (1.8.10) получаются действительные координаты. Для определения условных координат используются формулы

$$x' = x + x_0; y' = y + y_0 + n \cdot 10^6 \text{ м}, \quad (1.8.11)$$

где  $x_0, y_0$  – координаты условного начала,  $n$  – номер зоны.

Номер зоны равен

$$n = \text{int} \frac{\Delta L - L_1 + L}{\Delta L},$$

где  $\Delta L$  – ширина зоны в градусах;  $L_1$  – средний меридиан первой зоны;  $\text{int}$  – означает целую часть последующего выражения.

В Системе координат 1942 года принято  $x_0 = 0$  м,  $y_0 = 500\,000$  м;  $L_1 = 3^\circ$ ;  $\Delta L = 6^\circ$ , таким образом,  $n$  может принимать значения от 1 до 60. Долготы считаются положительными от начального меридиана на восток. Масштаб на осевых меридианах равен 1. В проекции Меркатора (UTM) масштаб на осевых меридианах равен 0,9996.

Некоторые условные системы координат (например, система 1963 года) отличаются от системы 1942 года лишь начальным меридианом первой зоны, их числом, шириной зоны (чаще всего используются трехградусные зоны) и координатами условного начала. Поэтому для них применимы в полной мере формулы (1.8.10) и (1.8.11).

Для обратного пересчета плоских координат в геодезические используются следующие формулы

$$B = B_0 - A_2 z^2 (1 - z^2 [A_4 - z^2 (A_6 - z^2 A_8)]);$$

$$l = z [1 + z^2 (B_1 + z^2 [B_3 + z^2 (B_5 + z^2 B_7)])], \quad (1.8.12)$$

где  $B_0 = \beta + \sin\beta \cos\beta (p_1 + p_2 \cos^2\beta + p_3 \cos^4\beta)$ ;

$$\beta = \frac{x' - x_0}{d_0}; z = \frac{y' - y_0 - n \cdot 10^6}{N_0 \cos B_0}; N_0 - \text{радиус кривизны}$$

первого вертикала на широте  $B_0$ ;

$$p_1 = \frac{d_2}{d_0} \left( 1 + \frac{d_4}{4d_0} - \frac{d_2^2}{8d_0^2} \right) + \frac{d_4}{d_0} - \frac{d_2^2}{d_0^2} + \frac{d_6}{d_0} - 2,25 \frac{d_2 d_4}{d_0^2} + 1,125 \frac{d_2^3}{d_0^3};$$

$$p_2 = 2 \frac{d_2^2 - d_0 d_4}{d d_0^2} - \frac{16d_6}{3d_0} + \frac{12d_2 d_4}{d_0^2} - \frac{6d_2^3}{d_0^3};$$

$$p_3 = \frac{16d_6}{3d_0} - \frac{12d_2 d_4}{d_0^2} + \frac{6d_2^3}{d_0^3} - \text{коэффициенты } p_i \text{ получаются}$$

обращением тригонометрического ряда (см. приложение 1), используемого для вычисления величины  $X$  в формуле (1.8.5);

$$A_2 = 0,5 \sin B_0 \cos B_0 (1 + e'^2 \cos^2 B_0);$$

$$A_4 = 0,25 + \left( \frac{1}{6} - \frac{3}{4} e'^2 \right) \cos^2 B_0 + \frac{5}{6} e'^2 \cos^4 B_0 - \frac{e'^4}{3} \cos^6 B_0;$$

$$A_6 = \frac{1}{8} - \frac{e'^2}{4} \cos^2 B_0 + \left( \frac{2}{45} - \frac{e'^2}{5} + \frac{5}{8} e'^4 \right) \cos^4 B_0 +$$

$$+ \left( \frac{26}{45} e'^2 - \frac{5}{4} e'^4 \right) \cos^6 B_0;$$

$$A_8 = \frac{325}{4032} - \left( \frac{1}{32} - \frac{9}{64} e'^2 \right) \cos^2 B_0 + \left( \frac{1}{120} - \frac{63}{1120} e'^2 -$$

$$- \frac{45}{64} e'^4 \right) \cos^4 B_0 + \left( \frac{17}{1260} + \frac{99}{320} e'^2 + \frac{945}{448} e'^4 \right) \cos^6 B_0;$$

$$B_1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cos^2 B_0 - \frac{e'^2}{6} \cos^4 B_0;$$

$$B_3 = 0,2 - \frac{1}{6} \cos^2 B_0 + \left( \frac{1}{120} + \frac{e'^2}{15} \right) \cos^4 B_0 - \left( \frac{e'^2}{60} - \frac{e'^4}{30} \right) \cos^6 B_0;$$

$$B_5 = -\frac{1}{7} + \frac{1}{6} \cos^2 B_0 - \frac{91 + 168e'^2}{2520} \cos^4 B_0 + \frac{1 + 332e'^2}{5040} \cos^6 B_0;$$

$$B_7 = \frac{1}{9} - \frac{1}{6} \cos^2 B_0 + \frac{463 + 504e'^2}{7560} \cos^4 B_0 - \frac{205 + 3096e'^2}{45360} \cos^6 B_0$$

Для референц-эллипсоида Красовского

$$P_1 = 5,02217466287666 \cdot 10^{-3}; \quad P_2 = 2,936089290296 \cdot 10^{-5};$$

$$P_3 = 2,3826170831 \cdot 10^{-7};$$

$$A_2 = \sin B_0 \cos B_0 (0,5 + 0,0033692627 \cos^2 B_0);$$

$$A_4 = 0,25 + 0,16161277 \cos^2 B_0 + 0,00561544 \cos^4 B_0 - \\ - 0,00001514 \cos^6 B_0;$$

$$A_6 = 0,125 + 0,00168463 \cos^2 B_0 + 0,04312512 \cos^4 B_0 + \\ + 0,00383661 \cos^6 B_0;$$

$$A_8 = 0,08060516 - 0,03030239 \cos^2 B_0 + 0,00792236 \cos^4 B_0 + \\ + 0,01567258 \cos^6 B_0;$$

$$B_1 = -0,33333333 + 0,16666667 \cos^2 B_0 - 0,00112309 \cos^4 B_0$$

$$B_3 = 0,2 - 0,16666667 \cos^2 B_0 + 0,00878257 \cos^4 B_0 - \\ - 0,0001108 \cos^6 B_0;$$

$$B_5 = -0,142857 + 0,16666667 \cos^2 B_0 - 0,0365603 \cos^4 B_0 + \\ + 0,0006423 \cos^6 B_0;$$

$$B_7 = 0,1111111 - 0,16666667 \cos^2 B_0 + 0,0616926 \cos^4 B_0 - \\ - 0,0049793 \cos^6 B_0.$$

Долгота  $L$  вычисляется по формуле

$$L = L_1 + (n - 1) \Delta L + l \quad (1.8.13)$$

В некоторых городских системах координат на ограниченной территории используются действительные координаты с началом в центре города, т. е. координаты  $x$ ,  $y$  могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Пересчет координат точек из Системы 1942 года в городскую и обратно выполняется без перехода через геодезические координаты по некоторым аппроксимирующим формулам [56]

$$\begin{aligned}x_r &= (\Delta x \cos \gamma + \Delta y \sin \gamma) - (a + d + b \Delta y) \Delta x; \\y_r &= (\Delta y \cos \gamma - \Delta x \sin \gamma) - (a + c \Delta y) \Delta y + f \Delta x^2,\end{aligned}\quad (1.8.14)$$

где  $\Delta x = x_{42} - x_0$ ;  $\Delta y = y_{42} - y_0$ ;  $\gamma$  — сближение меридианов в начале координат;  $x_0, y_0$  — координаты начала в Системе 1942 года;  $a, b, c, d, f$  — малые коэффициенты, аппроксимирующие изменение масштаба в проекции Гаусса по мере удаления от осевого меридиана.

Обратный пересчет координат из городской системы в Систему 1942 года осуществляется по формулам

$$\begin{aligned}x_{42} &= x_0 + x' (1 + a + d + b y'); \\y_{42} &= y_0 + y' (1 + a + c y') - f x'^2,\end{aligned}\quad (1.8.15)$$

где  $x' = x_r \cos \gamma - y_r \sin \gamma$ ;  $y' = y_r \cos \gamma + x_r \sin \gamma$ .

Точность аппроксимации координат проекции Гаусса формулами (1.8.14) и (1.8.15) невысока из-за ограниченности рядов разложения — примерно 4 см на 10 км. Если к  $x_r, y_r$  добавить члены  $\epsilon \Delta y$  и  $-\epsilon \Delta x$  соответственно, то точность аппроксимации повысилась бы до миллиметрового уровня ( $\epsilon = 4 \cdot 10^{-6}$ ).

В некоторых местных системах координат масштаб вообще принимается постоянным. Такие системы координат могут применяться на весьма ограниченных территориях и при выполнении геодезических работ невысокой точности или для картографических целей.

## МЕТОДЫ СОЗДАНИЯ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

### 2.1. Гравиметрический метод

Гравиметрический метод состоит в изучении различными способами (гравиметрическим, астрономо-геодезическим, спутниковым альтиметрическим, градиентометрическим и др.) гравитационного поля Земли и представлении его в виде разложения по сферическим функциям

$$U = -\frac{fm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin \varphi) + \frac{fm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda], \quad (2.1.1)$$

где  $fm$  – геоцентрическая гравитационная постоянная;  $m$  – масса Земли;  $J_n$ ,  $C_{nk}$ ,  $S_{nk}$  – зональные и незональные коэффициенты ГПЗ, зависящие от формы и распределения масс внутри Земли;  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $r$  – полярные координаты точки вне поверхности Земли, в которой определяется потенциал;  $P_n(\sin \varphi)$  и  $P_n^{(k)}(\sin \varphi)$  – полиномы и присоединенные функции Лежандра;  $r_0$  – средний экваториальный радиус Земли.

Коэффициенты этого разложения получаются в результате решения системы нормальных уравнений для различных трансформант ГПЗ – аномалий силы тяжести, высот квазигеоида, уклонений отвесных линий, гравитационных возмущений в орбитах ИСЗ и т. п., выраженных как функции от потенциала. В этом разложении [2]  $J_0 = -fm/r$ , коэффициенты  $J_1$ ,  $C_{11}$ ,  $S_{11}$  соответственно равны координатам ЦМЗ  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ ; коэффициент  $J_2 = [2C - (A + B)]/2m r_0^2$ ,

где  $A, B, C$  – главные центральные моменты инерции Земли. Если начало полярной системы координат находится в центре инерции тела, то  $J_1 = 0$ ;  $C_{11} = 0$ ;  $S_{11} = 0$ , если ось  $z$  совпадает с осью вращения Земли, т. е. с одной из главных центральных осей инерции, то  $C_{21} = S_{21} = 0$ . Поэтому потенциал (2.1.1) обычно записывают в виде

$$U = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda] \right\}. \quad (2.1.2)$$

В практических гравиметрических работах в третьем члене выражения (2.1.2) присоединенные функции и коэффициенты  $C_{nk}$  и  $S_{nk}$  обычно заменяются их нормированными значениями.

Если бы земная поверхность, включая акватории Мирового океана, была покрыта равномерной и равноточной гравиметрической съемкой и гравиметрические данные были отнесены в общеземную систему координат с началом ЦМЗ, то запись потенциала в виде (2.1.2) была бы действительно верной и для практических работ по выводу моделей ГПЗ. Однако не все районы земного шара покрыть гравиметрической съемкой достаточно высокой точности поэтому при выводе моделей ГПЗ с учетом весов значений гравиметрических трансформант (например высот квазигеоида) на равновеликих трапециях (см. раздел 3.1) возможно появление ненулевых запретных коэффициентов в модели геопотенциала. В этом случае коэффициенты  $J_1, C_{11}, S_{11}$  указывали бы на координаты центра разложения относительно начала принятой при обработке данных системы координат, а коэффициенты  $C_{21}$  и  $S_{21}$  – на непараллельности оси вращения Земли и главной центральной оси инерции  $z$ . Представляется, что их игнорирование (запрет) при выводе моделей ГПЗ не означает, что их не существует, наоборот необходимо накладывать условие их равенства нулю.

В настоящее время при выводе моделей ГПЗ совместно с гравиметрическими используются и спутниковые данные. Спутниковые методы создания геоцентрической системы координат рассматриваются в разделе 2.3.

## **2.2. Астрономо-геодезический метод**

Астрономо-геодезический метод впервые был доведен до практического применения в работе И.Д. Жонголовича [24], где уравнение поправок для большой полуоси  $\Delta a$  и координат центра общеземного эллипсоида  $x_0, y_0, z_0$  относительно центра некоторого референц-эллипсоида записывается в виде

$$-\Delta a + \cos B_i \cos L_i x_0 + \cos B_i \sin L_i y_0 + \sin B_i z_0 - (N + \zeta - N_0) = v_{\Delta N}, \quad (2.2.1)$$

а коэффициенты при координатах ЦМЗ есть направляющие косинусы радиуса-вектора  $i$ -го пункта;  $N, N_0$  – радиусы кривизны первого вертикала референц-эллипсоида и общеземного эллипсоида;  $\zeta$  – высота квазигеоида над референц-эллипсоидом, получаемая по гравиметрическим данным. Если принять предварительное значение  $N_0 = N$ , то свободный член уравнения (2.2.1) равен  $\zeta$ .

В этом случае рассматриваемый метод реализует следующую идею. Если достаточно точно определить фигуру квазигеоида и аппроксимировать ее эллипсоидом вращения при условии минимума отклонений фигуры квазигеоида от эллипсоида по методу наименьших квадратов, то этот эллипсоид и будет общеземным, а его центр будет совмещен с ЦМЗ. Но, как известно, результат такого решения зависит от точности и объема доступной гравиметрической информации. Использование этого метода в пределах некоторых стран и регионов привело к созданию множества референц-эллипсоидов и национальных систем координат.

Метод разрабатывался в течение всего развития наземной геодезии, так как геодезисты всегда стремились изучать реальную физическую поверхность Земли, и только из-за ограни-

ченности доступной измерительной информации получали референцную систему координат. В настоящее время опыт развития космической геодезии и нового уравнивания астрономо-геодезической сети (АГС) СССР дает основания для уточнения некоторых положений работы [24], в которой по уравнениям поправок градусных измерений предлагалось определить поправку к большой полуоси референц-эллипсоида  $\Delta a$  и координаты центра общеземного эллипсоида (ОЗЭ)  $x_0, y_0, z_0$ . Речь должна идти о большем числе определяемых параметров.

При развитии геодезической сети на некоторой территории и обработке астрономо-геодезических данных предварительно принимается некоторый эллипсоид относимости, на который редуцируются все измерения. Его параметры ориентирования обычно задаются координатами исходного пункта, высотой геоида (квазигеоида) и исходным азимутом, которые, как правило, устанавливаются из астрономических определений. Для редукции измерений на эллипсоид относимости развиваются сети нивелирования и выполняется гравиметрическая съемка. Для исключения накопления ошибок измерений определяются пункты Лапласа с астрономическими координатами и азимутами, которые связаны не с эллипсоидом относимости, а с физической поверхностью Земли. На этом этапе предполагается, что это и есть ОЗЭ.

Поэтому для вычисления составляющих уклонения отвесных линий  $\xi, \eta$  и геодезических азимутов  $A$  используются известные формулы

$$\xi = \varphi - B; \eta = (\lambda - L) \cos \varphi; \quad (2.2.2)$$

$$A = a - (\lambda - L) \sin \varphi + (\eta \cos A - \xi \sin A) \operatorname{ctg} z, \quad (2.2.3)$$

где  $a, \varphi, \lambda$  – астрономические азимут и координаты в точке наблюдения на физической поверхности Земли;  $B, L$  – геодезические координаты той же точки на эллипсоиде относимости;  $z$  – зенитное расстояние на местный предмет.

Для определения высот квазигеоида на пунктах АГС применяется астрономо-гравиметрическое нивелирование. Полученные данные используются для редуцирования измерений на эллипсоид относимости.

Формулы (2.2.2), (2.2.3) дают относительные составляющие уклонения отвеса, связывают астрономический азимут с геодезическим азимутом на конкретном эллипсоиде относимости и из-за ошибок в астрономических измерениях исходный пункт закрепляет только референционную систему координат. Действительно, после уравнивания 1942 года точность астрономических азимутов оценивалась средней квадратической ошибкой (СКО)  $\pm 1,5''$ , после уравнивания 1995 года – СКО  $\pm 1,2''$ . Однако формулы (2.2.2), (2.2.3) однозначно связывают принятый референц-эллипсоид с астрономическими данными и способствуют правильному уравниванию АГС в принятой системе координат.

После того как АГС уравнена в референционной системе может быть поставлен вопрос об определении параметров ОЗЭ и его ориентировки относительно референц-эллипсоида. Основополагающими при этом будут являться формулы, устанавливающие связь между общеземными (астрономическими) и референчными координатами

$$\begin{aligned}
 B_0 = B' + \frac{1}{M' + H'} & \left[ N' e'^2 \sin B' \cos B' \frac{da}{a'} + \left( N' + \frac{M'}{1 - e'^2} \right) \times \right. \\
 & \times \sin B' \cos B' \frac{de^2}{2} - (\Delta X \cos L' + \Delta Y \cos L') \sin B' + \Delta Z \cos B' + \\
 & \left. + \left( \frac{a'^2}{N'} + H' \right) (\omega_x \sin L' - \omega_y \cos L') \right]; \\
 L_0 = L' + \frac{1}{(N' + H') \cos B'} & \left[ \Delta Y \cos L' - \Delta X \sin L' - \right. \\
 & \left. - (N' + H' - N' e'^2) \sin B' (\omega_x \cos L' + \omega_y \sin L') \right] + \omega_Z; \quad (2.2.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_0 = H' - \frac{a'}{N'} da + N' \sin^2 B' \frac{de^2}{2} & + (\Delta X \cos L' + \Delta Y \sin L') \cos B' + \\
 + \Delta Z \sin B' + N' e'^2 \sin B' \cos B' & (\omega_x \sin L' - \omega_y \cos L'),
 \end{aligned}$$

где все величины со штрихами относятся к референц-

эллипсоиду, а с нулевыми нижними индексами – к ОЗЭ. Здесь  $da = a_0 - a'$ ;  $de^2 = e_0^2 - e'^2$  – разности больших полуосей и квадратов эксцентриситетов ОЗЭ и референц-эллипсоида;  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \omega_x, \omega_y, \omega_z$  – линейные и угловые элементы трансформирования двух систем координат;  $N, M$  – радиусы кривизны первого вертикала и меридиана;  $B, L, H$  – геодезические координаты.

Если шесть элементов трансформирования (для пространственной прямоугольной декартовой системы координат – их семь, включая масштабную поправку  $m$ ) и разности параметров эллипсоидов известны, например, по данным космической геодезии, то формулы (2.2.4) позволяют перевычислять референчные координаты пунктов АГС в общеземную систему и затем по формулам (2.2.2) получать составляющие абсолютных уклонений отвесной линии и геодезические азимуты на ОЗЭ. Кроме того, референчная система координат может быть преобразована в систему, оси которой параллельны осям ОЗЭ или даже совмещена с общеземной системой. В таком случае это будет не астрономо-геодезический метод, а метод космической геодезии.

Если вышеуказанные параметры неизвестны, то формулы (2.2.4) должны быть приняты в качестве уравнений связи и на их основе выведены уравнения поправок, в которых в качестве дополнительных неизвестных параметров будут указанные восемь элементов. В этом случае для широты и долготы на пунктах Лапласа при уравнивании АГС дополнительно должны быть составлены уравнения поправок

$$\frac{1}{M+H} \left[ \frac{N}{a} e^2 \sin B \cos B \cdot da + 0,5 \left( N + \frac{M}{1-e^2} \right) \sin B \cos B \cdot de^2 - \right. \\ \left. - \sin B \cos L \cdot \Delta X - \sin B \sin L \cdot \Delta Y + \cos B \cdot \Delta Z + \left( \frac{a^2}{N} + H \right) \left( \sin L \cdot \omega_x - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos L \cdot \omega_y \right) \right] - \xi' = \xi \quad , \quad P_\xi ; \quad (2.2.5)$$

$$\frac{1}{N+H} \left[ \cos L \cdot \Delta Y - \sin L \cdot \Delta X + (N+H - Ne^2) \sin B (\cos L \cdot \omega_x + \right. \\ \left. + \sin L \cdot \omega_y) \right] + \cos B \cdot \omega_z - \eta' = \eta \quad , \quad P_\eta,$$

где  $\xi' = \varphi - B$ ;  $\eta' = (\lambda - L)\cos B$  — относительные составляющие уклонения отвесной линии на эллипсоиде относимости;  $\xi, \eta$  — абсолютные составляющие на ОЗЭ.

Для пунктов, на которых по гравиметрическим данным вычислены высоты квазигеоида  $\zeta$ , а над эллипсоидом относимости они получены из астрономо-гравиметрического нивелирования, могут быть составлены уравнения поправок вида

$$-\frac{a}{N} \cdot da + 0,5N\sin^2 B de^2 + \cos B \cos L \cdot \Delta X + \cos B \sin L \cdot \Delta Y + \sin B \cdot \Delta Z + Ne^2 \sin B \cos B (\sin L \cdot \omega_x - \cos L \cdot \omega_y) - (\zeta - \zeta') = v_\zeta, P_\zeta, \quad (2.2.6)$$

где  $\zeta'$  — высота квазигеоида над эллипсоидом относимости.

Для азимутов составляются уравнения поправок вида

$$\cos B \cos L \cdot \omega_x + \cos B \sin L \cdot \omega_y + \sin B \cdot \omega_z - [A + (\lambda - L) \sin \varphi - (\eta' \cos A - \xi' \sin A) \operatorname{ctg} z - a] = v_A, P_A, \quad (2.2.7)$$

где  $A$  и  $a$  — геодезический и астрономический азимуты соответственно.

Включение уравнений (2.2.5) — (2.2.7) в нормальные уравнения поправок для пунктов АГС позволит определить параметры и ориентирование ОЗЭ относительно эллипсоида относимости. В настоящее время АГС уравнивается совместно с космическими геодезическими сетями, поэтому эти уравнения должны быть включены в общую систему нормальных уравнений, что будет способствовать лучшему согласованию астрономо-геодезических и спутниковых данных.

---

### **2.3. Спутниковые методы создания геоцентрической системы координат**

---

Спутниковые методы создания геодезических сетей — геометрический, орбитальный, динамический и навигационный, а также их сочетания и разновидности.

Например, метод коротких дуг является разновидностью орбитального метода. Геоцентрические системы координат создаются только орбитальным и динамическим методами.

Орбитальный и динамический методы позволяют в короткие сроки, наряду с другими определяемыми параметрами, получить координаты пунктов на земной поверхности в единой геоцентрической системе координат. Отличие этих методов от наземных способов создания геодезических сетей состоит в глобальности получения и обработки измерительных данных. В наземных геодезических сетях наблюдения выполняются в отдельных топоцентрических системах координат, связанных с плоскостью горизонта и отвесной линией. Поэтому для их совместной обработки требуется отнесение измерений на общую поверхность относимости (редуцирование) — эллипсоид или плоскость. Спутниковые наблюдения сразу выполняются в единой системе координат, связанной с движением спутника в инерциальном пространстве в шкале атомного времени.

При обработке любых наблюдений используется некоторая модель исследуемого объекта. Например, в наземных сетях совокупность координат исходных пунктов и предварительных координат определяемых является моделью создаваемой геодезической сети, которая затем оптимизируется методом наименьших квадратов под имеющиеся измерения.

В спутниковых сетях, кроме предварительных координат пунктов, используются модель сил, воздействующих на движение спутника, фундаментальные геодезические и геофизические постоянные и другие величины, совокупность которых составляет так называемую Стандартную Землю. Отличие орбитального метода от динамического состоит в том, что в орбитальном методе модель движения ИСЗ и параметры ГПЗ считаются исходными, а определяемыми, кроме координат пунктов, являются только начальные условия орбитальных дуг. В динамическом методе, кроме неизвестных орбитального метода, определяются параметры ГПЗ. Однако это не означает, что в орбитальном методе не могут определяться некоторые дополнительные неизвестные (например, баллистический коэффициент или координаты полюса), а в

динамическом методе нет никаких принятых за исходные величин. Деление на модельные и определяемые параметры весьма условно и главное отличие динамического и орбитального методов состоит все же в определении, прежде всего, параметров ГПЗ, но исходная модель Стандартной Земли в них одна и та же.

При создании КГС используется следующая общая технология:

- проектирование и создание космического геодезического комплекса;
- планирование и выполнение наблюдений;
- предварительная обработка материалов наблюдений;
- интегрирование и предварительное уточнение начальных условий орбитальных дуг;
- общее орбитальное или динамическое решение;
- анализ и оценка точности результатов решения;
- распространение полученных результатов на другие параметры Стандартной Земли и при необходимости повторение общего решения с уточнённой моделью Земли.

В проекте создания модели Стандартной Земли предусматривается проектная точность получения ее параметров, число намеченных к запуску геодезических ИСЗ, количество и расположение пунктов КГС, их оснащение измерительными средствами, длительность периода наблюдений, порядок и сроки обработки материалов и получения окончательных результатов.

После запуска ИСЗ и испытания функционирования бортовых систем в его управляющий процессор (БЦВМ) периодически закладывается программа работы бортовых систем, обеспечивающая включение и выключение бортовых передатчиков и другой аппаратуры в зонах видимости наблюдательных пунктов или при выходе из них. Центральный пункт управления комплексом (ЦУП) осуществляет постоянный радиоконтроль орбиты ИСЗ, поэтому практически не возникает задачи предварительного определения параметров орбиты. Эфемериды ИСЗ могут быть рассчитаны на длительное время вперед и тем или иным способом доведены до наблюдателей.

### **2.3.1. Предварительная обработка материалов наблюдений**

По мере поступления материалов наблюдений в Центр обработки они проходят предварительную обработку [6]. Дело в том, что материалы непосредственных наблюдений ИСЗ еще не содержат включаемые в уравнивание измерения, как, например, астронегативы или пластинки, или содержат настолько большие массивы числовых характеристик радиотехнических устройств, что их требуется усреднить и отнести на “нормальные места”, т. е. на середину интервала аппроксимации. Кроме того, вычисленные “измерения” требуется исправить за инструментальные постоянные и влияние внешней среды, а также привязать к единой шкале атомного времени (UTC). В ходе предварительной обработки также выявляются и отбраковываются некачественные измерения, выполняется оценка точности принятых для уравнивания измерений по внутренней сходимости результатов обработки. На станции наблюдений различные виды измерительных средств установлены в различных павильонах, поэтому наблюдения ИСЗ с их помощью должны быть отнесены к единому центру пункта.

Фотографические наблюдения ИСЗ являются основным средством ориентирования КГС относительно звездной инерциальной системы координат. Предварительная обработка материалов фотографических наблюдений ИСЗ включает следующие процессы:

а) “отождествление” изображений ИСЗ и опорных звезд, окружающих изображение ИСЗ на негативе, заключающееся в опознавании изображений звезд, координаты которых имеются в фундаментальных каталогах звезд;

б) разметка на негативе геометрического центра снимка, который принимается за его оптический центр, изображений ИСЗ и опорных звезд;

в) измерение их прямоугольных плоских координат  $x'_i$ ,  $y'_i$  в системе координат измерительной машины;

г) каталожные координаты опорных звезд редуцируются

на видимые места и по ним вычисляются идеальные координаты звезд на негативе

$$\xi = F \frac{\operatorname{ctg} \delta \sin(\alpha - A)}{\operatorname{ctg} \delta \cos(\alpha - A) \cos D + \sin D};$$

$$\eta = F \frac{\cos D - \operatorname{ctg} \delta \cos(\alpha - A) \sin D}{\operatorname{ctg} \delta \cos(\alpha - A) \cos D + \sin D},$$

где  $F$  – фокусное расстояние объектива фотоустановки;  $\alpha, \delta$  – видимые координаты опорной звезды;  $A, D$  – экваториальные координаты оптического центра негатива, которые вычисляются по установочным азимуту и высоте над горизонтом  $A', h$  фотокамеры во время съемки

$$A = s - \operatorname{arctg} \frac{\sin A'}{\cos \varphi \operatorname{tg} h - \sin \varphi \cos A'};$$

$$D = \operatorname{arcsin}(\sin \varphi \sinh + \cos \varphi \cosh \cos A'),$$

где  $s$  – местное звездное время;  $\varphi$  – широта станции наблюдения; азимут отсчитывается от точки севера;

д) так как принятый геометрический центр негатива, как правило, не совпадает с его оптическим центром, система идеальных координат не совпадает с системой координат измерительной машины и, кроме того, искажена влиянием дисторсии оптической системы, то преобразование измеренных координат за сдвиг начала и разворот систем координат выполняется в виде алгебраических полиномов

$$a_0 + a_1 x + a_2 xy + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 (x^2 + y^2) x - \xi = v; \quad (2.3.1.1)$$

$$b_0 + b_1 x + b_2 xy + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 y^2 + b_6 (x^2 + y^2) y - \eta = v_\eta,$$

где  $a_i, b_i$  – определяемые коэффициенты ( $a_0, b_0$  – за сдвиг начала);  $x_i = x'_i - x'_0$ ;  $y_i = y'_i - y'_0$ ;  $x'_0, y'_0$  – измеренные координаты геометрического центра негатива;

е) из решения системы нормальных уравнений, соответствующих системе уравнений поправок (2.3.1.1), определяются коэффициенты  $a_i, b_i$  и выполняется оценка их точности;

ж) подставив в полиномы (2.3.1.1) вместо координат звезд измеренные координаты изображений ИСЗ, находят их идеальные координаты, а затем экваториальные координаты по формулам

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\xi}{F \cos D - \eta \sin D} + A; \quad \delta = \operatorname{arctg} \frac{\eta \cos D + F \sin D}{F \cos D - \eta \sin D} \cos(\alpha - A)$$

с оценкой их точности.

Так как экваториальные координаты ИСЗ были получены по видимым местам звезд с учетом рефракции, то теперь влияние рефракции на координаты ИСЗ необходимо устранить в результате введения поправки за рефракцию с обратным знаком. В зенитное расстояние ИСЗ поправка за рефракцию равна [12]

$$\Delta z = 58,20'' \operatorname{tg} z - 0,07'' \operatorname{tg}^3 z - \frac{435''}{d} \operatorname{tg} z \operatorname{sec} z (1 - e^{0,1385 \cos z}), \quad (2.3.1.2)$$

где  $d$  – расстояние до ИСЗ в километрах.

Исправленные экваториальные координаты ИСЗ будут равны

$$\delta_1 = \delta_0 \pm \Delta z \cos q; \quad \alpha_1 = \alpha_0 \pm \Delta z \sin q \operatorname{sec} \delta,$$

где для  $\delta$  верхний знак для северных широт, нижний – для южных; для  $\alpha$  верхний знак для часового угла  $t < 12^h$ ,

нижний – для  $12^h < t < 24^h$ ;  $q = \operatorname{arctg} \frac{\sin t}{\operatorname{tg} \varphi \cos \delta - \sin \delta \cos t}$  –

параллактический угол; последний член в формуле (2.3.1.2) – рефракционный параллакс, который учитывает отличие влияния рефракции на бесконечно удаленные звезды и на ИСЗ.

Более точно с учетом отличия температуры, атмосферного давления и влажности от нормальных условий рефракция учитывается по формулам Саастамойнена [79] (см. раздел 1.1).

По впечатанным на негатив показаниям часов наблюдательного пункта определяется средний момент экспозиции снимка, а по телеметрическим данным – поправка к бортовым часам ИСЗ, по которым подавались световые

вспышки (учитывая аппаратные задержки). И бортовая и шкала времени пункта приводятся к атомному времени UTC по сигналам, передаваемым радиостанциями, а затем к всемирному времени UT1, пользуясь ежемесячными бюллетенями службы точного времени.

Предварительная обработка радиотехнических измерений состоит в расшифровке полученных числовых характеристик измеряемого параметра движения ИСЗ, вычислении его номинального значения, введении аппаратных поправок и поправок за рефракцию в атмосфере и задержки в ионосфере. Если радиосигнал измерялся на двух несущих частотах, то ионосферные поправки вычисляются не по модели, а ее линейная часть исключается с учетом разности прохождения радиосигнала на разных частотах.

При предварительной обработке лазерных измерений расстояния до ИСЗ учитывается рефракция в атмосфере и аппаратные задержки. Для отнесения измеренного расстояния к центру масс ИСЗ учитывается расстояние от лазерных отражателей на поверхности спутника до его центра масс.

### **2.3.2. Интегрирование и уточнение орбит**

Орбитальное или динамическое решения выполняются в следующей последовательности:

- предварительное уточнение начальных условий каждой дуги;
- составление уравнений поправок и нормальных уравнений для каждой дуги и суммирование последних;
- решение общей системы нормальных уравнений;
- анализ результатов решения и при необходимости выполнение следующего приближения с учетом уточненной модели параметров, входящих в решение.

При предварительном уточнении начальных условий составление уравнений поправок и нормальных уравнений выполняется только для данной дуги, в качестве неизвест-

ных служат только поправки к начальным условиям. В первых двух пунктах данной технологии значительный объем времени занимает интегрирование дифференциальных уравнений движения ИСЗ. Оно состоит в вычислении координат ИСЗ на моменты наблюдений на основании заданных начальных условий (составляющих положения и скорости ИСЗ в начальную эпоху дуги  $t_0$ ) и модели движения ИСЗ.

Существует два основных вида интегрирования: в орбитальных элементах и в прямоугольных инерциальных координатах — в зависимости от того, в каком виде заданы начальные условия. В обоих случаях может применяться как аналитическое, так и численное интегрирование.

Аналитическое интегрирование возможно в сравнительно простых случаях — задачи двух тел или разложении уравнений движения в ряды по элементам орбиты. Обычно аналитическое интегрирование применяется для определения эталонных орбит и расчета малых возмущений в движении ИСЗ от Солнца, Луны и больших планет или расчете орбит высоких ИСЗ на небольших интервалах времени. Численное интегрирование может применяться без ограничений.

Если силовое поле рассматриваемой задачи отличается от поля сил задачи двух тел (кеплеровых орбит), то силы, приводящие в результате интегрирования к отклонению орбиты от эталонной (невозмущенной), называются возмущающими. Методы интегрирования, в результате которых получаются основные соотношения, разделяются на методы специальных возмущений, если они используют численное интегрирование, и общих возмущений, если они используют разложения в ряды и аналитическое интегрирование. При этом необязательно, чтобы возмущения интегрировались — могут интегрироваться полные ускорения. Например, в методе интегрирования Коуэлла получается реальная орбита без использования промежуточной эталонной орбиты.

В методе Энке в начальный момент считается, что возмущенная и кеплерова невозмущенная орбиты совпадают. В результате интегрирования возмущений реальная

орбита все дальше отходит от эталонной и наступает момент, когда приходится использовать новые элементы орбиты, совпадающие в данной точке с реальной орбитой. Элементы кеплеровой орбиты, изменяющиеся под воздействием возмущений и описывающие реальную орбиту, называются оскулирующими.

Метод вариации параметров, обеспечивающий в результате учета вековых возмущений постоянное совпадение реальной и оскулирующей орбит, можно представить как качение кеплеровой орбиты по реальной и выполнять расчет положения и скорости объекта по формулам задачи двух тел.

### 2.3.2.1. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных

Этот метод имеет несколько вариантов. Рассмотрим вариант для эллиптических кеплеровых оскулирующих элементов. Дифференциальные уравнения невозмущенного движения имеют вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}; \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3}, \quad (2.3.2.1)$$

где  $\mu = f(m + m_0)$ ;  $m_0$  – масса центрального тела;  $m$  – масса внешнего тела, в данном случае – ИСЗ, из-за относительной малости  $m \ll m_0$  за  $\mu$  принимается геоцентрическая гравитационная постоянная Земли. Общее решение этих уравнений выражается формулами (1.3.1) и (1.3.2). Согласно методу Лагранжа решение уравнений возмущенного движения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3} + R_x; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3} + R_y; \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3} + R_z, \quad (2.3.2.2)$$

где  $R_x, R_y, R_z$  – проекции возмущающего ускорения на оси координат, отыскивается в том же виде, что и решение уравнений невозмущенного движения, с той разницей, что элементы орбиты рассматриваются не как постоянные, а как некоторые функции от начальных условий и времени.

Следовательно, формулы (1.3.1) и (1.3.2) можно рассматривать как формулы перехода к переменным  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  от переменных  $a(t), e(t), i(t), M(t), \omega(t), \Omega(t)$ . Тогда дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0}; \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega}; \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\text{ctgi}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\text{coseci}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega}; \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}; \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\text{ctgi}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}; \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\text{coseci}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \end{aligned} \tag{2.3.2.3}$$

где  $n$  – оскулирующее среднее движение;  $M = \overline{M}_0 + \int_{t_0}^t n(t) dt$

Здесь возмущающие силы необходимо выразить с помощью элементов орбиты.

При использовании оскулирующих элементов орбиты их представляют в виде сумм постоянной части и изменяющейся во времени

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \dot{a}(t - t_0); & M &= M_0 + \dot{M}(t - t_0); \\ e &= e_0 + \dot{e}(t - t_0); & \omega &= \omega_0 + \dot{\omega}(t - t_0); \\ i &= i_0 + \dot{i}(t - t_0); & \Omega &= \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0). \end{aligned}$$

Например, в работе [30] предлагается следующий метод учета влияния второго зонального коэффициента  $C_{20}$  ГПЗ на элементы орбиты. Так как его влияние по крайней мере в 100 раз превышает влияние других коэффициентов ГПЗ, возмущающую функцию предлагается представить в виде  $V = f(C_{20})$ . Тогда дифференциальные уравнения Лагранжа принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \dot{e} = \dot{i} = 0; \\ \dot{M} &= n - \frac{3nC_{20}a_c^2}{4(1-e^2)^2 a^2} (3\cos^2 i - 1); \\ \dot{\omega} &= \frac{3nC_{20}a_c^2}{4(1-e^2)^2 a^2} (1 - 5\cos^2 i); \\ \dot{\Omega} &= \frac{3nC_{20}a_c^2}{2(1-e^2)^2 a^2} \cos i. \end{aligned} \quad (2.3.2.4)$$

Продифференцировав уравнения (2.3.2.4) по элементам орбиты в эпоху  $t_0$  (начальных условий), найдем матрицу изохронных производных

$$D = \begin{bmatrix} E & 0 \\ R\Delta t & E \end{bmatrix}, \quad (2.3.2.5)$$

где  $E$  – единичные матрицы;  $0$  – нулевая матрица размером  $3 \times 3$ ;  $\Delta t = t - t_0$ ;

$$R = \begin{bmatrix} -\frac{3n}{2a} + \frac{21nC_{20}a_c^2(3\cos^2 i - 1)}{8a^3(1-e^2)^2} & \frac{9nC_{20}a_c^2(3\cos^2 i - 1)}{4a^2(1-e^2)^2} & \frac{9nC_{20}a_c^2 \sin 2i}{4a^2(1-e^2)^2} \\ \frac{21nC_{20}a_c^2(1 - 5\cos^2 i)}{8a^3(1-e^2)^2} & \frac{3nC_{20}a_c^2(1 - 5\cos^2 i)}{a^2(1-e^2)^3} & \frac{15nC_{20}a_c^2 \sin 2i}{4a^2(1-e^2)^2} \\ -\frac{21nC_{20}a_c^2 \cos i}{4a^3(1-e^2)^2} & \frac{6nC_{20}a_c^2 \cos i}{a^2(1-e^2)^3} & -\frac{3nC_{20}a_c^2 \sin i}{2a^2(1-e^2)^2} \end{bmatrix}.$$

Теперь оскулирующие элементы орбиты в эпоху  $t$  будут равны

$$\begin{bmatrix} a \\ e \\ i \\ M \\ \omega \\ \Omega \end{bmatrix} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} a_0 \\ e_0 \\ i_0 \\ M_0 \\ \omega_0 \\ \Omega_0 \end{bmatrix}.$$

По полученным элементам орбиты с использованием формул (1.3.1) и (1.3.2) вычисляются координаты и составляющие скорости на момент  $t$  выполнения измерения. Достоинство рассмотренного метода интегрирования – возможность вычисления положения ИСЗ непосредственно на момент измерения. Более подробное изложение метода вариации параметров можно найти в работе [61].

### 2.3.2.2. Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений движения ИСЗ

Численное интегрирование обычно выполняется в прямоугольных инерциальных координатах и сводится к умножению постоянной скорости на постоянный интервал времени для получения приращения расстояния (однократное интегрирование) или к умножению постоянного ускорения на постоянный интервал времени для получения приращения скорости, а затем умножения последовательно получающихся значений скорости на тот же интервал времени для получения приращений расстояния (двойное интегрирование). Более точные формулы численного интегрирования отличаются от описанной процедуры возможностью учета производных более высоких порядков. Численное интегрирование основано на исчислении конечных разностей и на интерполяционной формуле Ньютона

$$\begin{aligned} x_{i+n} = & x_i + n\delta x_{i\pm\frac{1}{2}} + N_2\delta^2 x_{i\pm 1} + N_3\delta^3 x_{i\pm\frac{3}{2}} + \\ & + N_4\delta^4 x_{i\pm 2} + N_5\delta^5 x_{i\pm\frac{5}{2}} + \dots; \end{aligned} \quad (2.3.2.6)$$

где  $n = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{t - t_i}{h}$  – интерполирующий множитель,

связанный с шагом интегрирования  $h$ ;  $N_2 = \frac{n(n \mp 1)}{2!}$ ;

$$N_3 = \frac{n(n \mp 1)(n \mp 2)}{3!}; \quad N_4 = \frac{n(n \mp 1)(n \mp 2)(n \mp 3)}{4!};$$

$$N_5 = \frac{n(n \mp 1)(n \mp 2)(n \mp 3)(n \mp 4)}{5!};$$

$\delta^j$  — соответствующие разности вперед или назад, связанные формулами

$$x_{i \pm 1} = x_i \pm \delta x_{i \pm 1/2};$$

$$\delta x_{i \pm 3/2} = \delta x_{i \pm 1/2} \pm \delta^2 x_{i \pm 1};$$

$$\delta^2 x_{i \pm 2} = \delta^2 x_{i \pm 1} \pm \delta^3 x_{i \pm 3/2} \pm \dots;$$

$$x_{i \pm 2} = x_{i \pm 1} \pm \delta x_{i \pm 3/2} = x_i \pm 2\delta x_{i \pm 1/2} + \delta^2 x_{i \pm 1};$$

$$\delta x_{i \pm 5/2} = \delta x_{i \pm 1/2} \pm 2\delta^2 x_{i \pm 1} + \delta^3 x_{i \pm 3/2} \pm \dots;$$

$$x_{i \pm 3} = x_i \pm 3\delta x_{i \pm 1/2} + 3\delta^2 x_{i \pm 1} \pm \delta^3 x_{i \pm 3/2};$$

$$x_{i \pm 4} = x_i \pm 4\delta x_{i \pm 1/2} + 6\delta^2 x_{i \pm 1} \pm 4\delta^3 x_{i \pm 3/2} + \delta^4 x_{i \pm 2} \pm \dots$$

Легко заметить, что коэффициенты  $N_j$  связаны с биномиальными коэффициентами Ньютона и могут быть последовательно вычислены с помощью треугольника Паскаля. Ниже приведены варианты начальных значений этих коэффициентов для разностей вперед (—) и назад (+).

n - 1								n + 1						
1	2	3	4	5	6	...	n	1	2	3	4	5	6	...
0	1	3	6	10	15	...	$N_2$	1	3	6	10	15	21	...
0	0	1	4	10	20	...	$N_3$	1	4	10	20	35	56	...
0	0	0	1	5	15	...	$N_4$	1	5	15	35	70	126	...
0	0	0	0	1	6	...	$N_5$	1	6	21	56	126	252	...
0	0	0	0	0	1	...	$N_6$	1	7	28	84	210	462	...
.	.	.	.	.	.	...	.	.	.	.	.	.	.	...

Диагонали первого варианта (треугольник Паскаля) являются столбцами второго. На основе фундаментальной формулы Ньютона выводятся различные формулы с центральными разностями, из которых наибольшее применение при численном дифференцировании и интегрировании находит формула Стирлинга

$$x_{i+n} = x_i + n\delta x_i + S_2\delta^2 x_i + 2S_3\delta^3 x_i + S_4\delta^4 x_i + 2S_5\delta^5 x_i + \dots, \quad (2.3.2.7)$$

$$\text{где } \delta x_i = \frac{1}{2}(\delta x_{i+1/2} + \delta x_{i-1/2}); \quad \delta^3 x_i = \frac{1}{2}(\delta^3 x_{i+1/2} + \delta^3 x_{i-1/2}), \dots;$$

$$S_2 = \frac{n^2}{2!}; \quad 2S_3 = \frac{n(n^2-1)}{3!}; \quad S_4 = \frac{n^2(n^2-1)}{4!};$$

$$2S_5 = \frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{5!}; \quad S_6 = \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{6!}.$$

Так как из обозначений к формуле (2.3.2.6) следует, что  $dt = h dn$ , то для производных от координат по времени можно написать

$$h\dot{x} = dx/dn; \quad h^2\ddot{x} = d^2x/dn^2, \quad x \rightarrow y, z.$$

Тогда из интерполяционной формулы Стирлинга следует

$$h\dot{x}_{i+n} = \delta x_i + n\delta^2 x_i + \frac{3n^2-1}{3!}\delta^3 x_i + \frac{4n^3-2n}{4!}\delta^4 x_i +$$

$$+ \frac{15n^4-15n^2+4}{5!}\delta^5 x_i + \frac{6n^5-20n^3+8n}{6!}\delta^6 x_i + \dots;$$

$$h^2\ddot{x}_{i+n} = \delta^2 x_i + n\delta^3 x_i + \frac{12n^2-2}{4!}\delta^4 x_i + \frac{20n^3-30n}{5!}\delta^5 x_i +$$

$$+ \frac{30n^4-60n^2+8}{6!}\delta^6 x_i + \dots$$

Здесь дифференцирование выполняется по интерполирующему множителю  $n$ , считая  $x_i$ , а при повторном дифференцировании и  $\delta x_i$ , постоянными. Для  $n = 0$  имеем

$$h\dot{x}_i = \delta x_i - \frac{\delta^3 x_i}{3!} + \frac{4\delta^5 x_i}{5!} - \dots = \delta x_i - \frac{\delta^3 x_i}{6} + \frac{\delta^5 x_i}{30} - \frac{\delta^7 x_i}{140} + \frac{\delta^9 x_i}{630} - \dots; \quad (2.3.2.8)$$

$$h^2 \ddot{x}_i = \delta^2 x_i - \frac{2\delta^4 x_i}{4!} + \frac{8\delta^6 x_i}{6!} - \dots = \delta^2 x_i - \frac{\delta^4 x_i}{12} + \frac{\delta^6 x_i}{90} - \frac{\delta^8 x_i}{560} + \frac{\delta^{10} x_i}{3150} - \dots$$

Для вывода “разностных формул” численного интегрирования используются общие формулы интегрирования по времени

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t); \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \int_{t_0}^t \ddot{\mathbf{r}} dt; \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + (t - t_0)\dot{\mathbf{r}} + \iint \ddot{\mathbf{r}} dt^2. \quad (2.3.2.9)$$

Учитывая предыдущие обозначения, можно написать

$$\dot{x}_{i+n} = \dot{x}_i + h \int_0^n \ddot{x} dn; \quad x_{i+n} = x_i + nh\dot{x}_i + h^2 \iint_0^n \ddot{x} dn^2. \quad (2.3.2.10)$$

Для второй производной формулу (2.3.2.7) Стирлинга можно записать в виде

$$\ddot{x} = \ddot{x}_{i+n} = \ddot{x}_i + n\delta\ddot{x}_i + \frac{n^2}{2!}\delta^2\ddot{x}_i + \frac{n^3-n}{3!}\delta^3\ddot{x}_i + \frac{n^4-n^2}{4!}\delta^4\ddot{x}_i + \frac{n^5-5n^3+4n}{5!}\delta^5\ddot{x}_i + \dots \quad (2.3.2.11)$$

Тогда

$$\int_0^n \ddot{x} dn = n\ddot{x}_i + \frac{n^2}{2!}\delta\ddot{x}_i + \frac{n^3}{3!}\delta^2\ddot{x}_i + \frac{n^4-2n^2}{4!}\delta^3\ddot{x}_i + \frac{1}{5!}\left(n^5 - \frac{5}{3}n^3\right)\delta^4\ddot{x}_i + \frac{1}{6!}\left(n^6 - \frac{15}{2}n^4 + 12n^2\right)\delta^5\ddot{x}_i + \dots; \quad (2.3.2.12)$$

$$\iint_0^n \ddot{x} dn^2 = \frac{n^2}{2!}\ddot{x}_i + \frac{n^3}{3!}\delta\ddot{x}_i + \frac{n^4}{4!}\delta^2\ddot{x}_i + \frac{1}{5!}\left(n^5 - \frac{10}{3}n^3\right)\delta^3\ddot{x}_i +$$

$$+ \frac{1}{6!} \left( n^6 - \frac{5}{2} n^4 \right) \delta^4 \ddot{x}_i + \frac{1}{7!} \left( n^7 - \frac{21}{2} n^5 + 28 n^3 \right) \delta^5 \ddot{x}_i + \dots$$

Центральные разности зависят в интервале  $-1 \leq n \leq 1$  от свойств функции как до, так и после точки  $t_i$ , поэтому, если в формулах (2.3.2.10) вместо  $n$  подставим  $\pm 1$ , то получим

$$\delta^2 x_i = x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} = h^2 \left[ \int_0^1 \ddot{x} dn^2 + \int_0^{-1} \ddot{x} dn^2 \right];$$

$$\delta \dot{x}_{i+\frac{1}{2}} = \dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i = h \int_0^1 \dot{x} dn. \quad (2.3.2.13)$$

Теперь из второй формулы (2.3.2.12) получаем

$$\int_0^{\pm 1} \ddot{x} dn^2 = \frac{1}{2} \ddot{x}_i \pm \frac{1}{6} \delta \ddot{x}_i + \frac{1}{24} \delta^2 \ddot{x}_i \mp \frac{7}{360} \delta^3 \ddot{x}_i - \frac{1}{480} \delta^4 \ddot{x}_i \pm$$

$$\pm \frac{37}{10080} \delta^5 \ddot{x}_i + \dots$$

Подставив эти значения интегралов в первую формулу (2.3.2.13), получим “формулу  $\delta_c^2$ ” интегрирования со вторыми центральными разностями

$$\delta^2 x_i = h^2 \left[ \ddot{x}_i + \frac{1}{12} \delta^2 \ddot{x}_i - \frac{1}{240} \delta^4 \ddot{x}_i + \frac{31}{60480} \delta^6 \ddot{x}_i - \frac{289}{3628800} \delta^8 \ddot{x}_i + \dots \right]. \quad (2.3.2.14)$$

Формула численного интегрирования с “суммами” Гаусса-Джексона получается в результате суммирования разностной формулы (2.3.2.14)

$$x_{i+1} = h^2 \left[ \sum^2 \ddot{x}_{i+1} + \frac{1}{12} \ddot{x}_{i+1} - \frac{1}{240} \delta^2 \ddot{x}_{i+1} + \frac{31}{60480} \delta^4 \ddot{x}_{i+1} - \right.$$

$$\left. - \frac{289}{3628800} \delta^6 \ddot{x}_{i+1} + \dots \right]. \quad (2.3.2.15)$$

Для однократного интегрирования из второй формулы (2.3.2.13) аналогично получается формула  $\Sigma_c$

$$\dot{x}_{i+1} = h \left[ \sum \ddot{x}_{i+1} - \frac{1}{12} \delta \ddot{x}_{i+1} + \frac{11}{720} \delta^3 \ddot{x}_{i+1} - \frac{191}{60480} \delta^5 \ddot{x}_{i+1} + \frac{2497}{3628800} \delta^7 \ddot{x}_{i+1} - \dots \right]. \quad (2.3.2.16)$$

Для интегрирования уравнений движения обычно используют метод Адамса, а для “разгонного” участка (составления начальной таблицы) применяют метод Рунге-Кутта. В последнее время начали применять более эффективный метод Эверхарта. По исследованиям в работе [61] метод двойного интегрирования Гаусса с “суммами” признается в 50 раз эффективнее (по скорости и объему вычислений), чем метод Рунге-Кутта 4-го порядка и имеет преимущества перед остальными, так как не требует предикторного цикла. Однако этот метод почему-то мало применяется для интегрирования уравнений движения ИСЗ. Для иллюстрации этого метода и сравнения его с методом  $\delta_c^2$  ниже приводится численный пример интегрирования простого уравнения  $\ddot{x} = -x$ .

Аналитическое интегрирование этого уравнения дает  $x = \sin \tau$ , действительно  $\dot{x} = \cos \tau$ ;  $x = -\sin \tau = -x$ . Примем шаг интегрирования равным  $h = \tau_{i+1} - \tau_i = 0,1$ ;  $h^2 = 0,01$ , а начальные условия равными  $x_0 = \sin 0 = 0$ ;  $\dot{x}_0 = \cos 0 = 1$ . В начальную таблицу вводятся ошибки, пропорциональные приблизительно  $\tau^2$  и рассчитанные по формуле  $0,1(1 - \cos \tau)$ .

$\tau$	$\sin \tau$	“ошибки”	$x$
- 0,3	- 0,2955202	0,0044664	- 0,2910538
- 0,2	- 0,1986693	0,0019933	- 0,1966760
- 0,1	- 0,0998334	0,0004996	- 0,0993338
0,0	0,0000000	0,0000000	0,0000000

0,1	0,0998334	0,0004996	0,1003330
0,2	0,1986693	0,0019933	0,2006626
0,3	0,2955202	0,0044664	0,2999866

Будем считать эти значения полученными из предыдущего цикла вычислений и внесем их в начальную таблицу 2.1 (четвертая колонка – х). Значения правее этой колонки получаются как разности между соседними значениями в предыдущей колонке (порядок действий указан в скобках наверху таблицы). В столбцах 5, 7 и 9 в скобках приведены средние значения, которые используют в дальнейших вычислениях вместе со значениями в столбцах 4, 6, 8. Далее по формулам

$$\sum^2 \ddot{x}_0 = h^{-2} x_0 - \frac{1}{12} \ddot{x}_0 + \frac{1}{240} \delta^2 \ddot{x}_0 - \frac{31}{60480} \delta^4 \ddot{x}_0 + \dots;$$

$$\sum \ddot{x}_0 = h^{-1} \dot{x}_0 + \frac{1}{12} \delta \ddot{x}_0 - \frac{11}{720} \delta^3 \ddot{x}_0 + \frac{191}{60480} \delta^5 \ddot{x}_0 - \dots,$$

которые получены из формул (2.3.2.15) и (2.3.2.16) соответственно, вычисляем центральные величины с аргументом  $\tau = 0$  для колонок 2 и 3. Для колонки 3 определяются значения

$\sum \ddot{x}_{1/2} = \sum \ddot{x}_0 \pm \frac{1}{2} \ddot{x}_0$ , которые округляются

и вносятся в таблицу вместе со значением (эти значения отмечены звездочкой). Остальные значения в таблице 2.1 в колонках 2 и 3 получаются при суммировании (нижняя половина) или вычитании (верхняя половина).

Далее по формулам (2.3.2.15) вычисляются величины  $x_i$  (все промежуточные вычисления приведены в табл. 2.2 и 2.3) и подставляются в исходное дифференциальное уравнение (см. колонку 4 табл. 2.4).

## Интегрирование в первом цикле приближений

$\tau$	$\sum^2 \ddot{x}$	$\sum \ddot{x}$	$\ddot{x}$ (1)	$\delta \ddot{x}$ (2)	$\delta^2 \ddot{x}$ (3)	$\delta^3 \ddot{x}$ (4)	$\delta^4 \ddot{x}$ (5)	$\delta^5 \ddot{x}$ (6)	$\delta^6 \ddot{x}$ (7)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-0,3	-29,5796565	9,6956555	0,2910538	-0943778					
-0,2	-19,8840010	9,8923315	0,1966760	-0973422	29644	09728			
-0,1	-9,9916695	9,9916653*	0,0993338	-0993338	19916	09924	196	-094	
0,0	-0,0000042*	9,9916653*	0,0000000	(-0998334)	09992	(09975)	102	(-100)	12
0,1	9,9916611	9,8913323	0,1003330	-1003330	00034	10026	-004		
0,2	19,8829934	9,6906697	0,2006626	-1003296	10056	10022			
0,3	29,5736631		0,2999866	-0993240					

Таблица 2.2

Вычисление  $\sum \ddot{x}_0$ ,  $\sum \ddot{x}_0$ ,  $\sum \ddot{x}_{1/2}$ 

Формула	1-й цикл	2-й цикл	3-й цикл
$\sum \ddot{x}_0 \cdot h^2 x_0$	0/0,1 = 0,0000000 <sub>x</sub> 00	0,0000000 <sub>x</sub> 00	0,0000000 <sub>x</sub> 00
$\frac{1}{12} \ddot{x}_0$	$\frac{0}{12} = 0,00$	0,00	0,00
$\frac{1}{240} \delta^2 \ddot{x}_0$	$\frac{9992}{240} = -41,63$	0,03	0,00
$\frac{31}{60480} \delta^4 \ddot{x}_0$	$\frac{31 \cdot 102}{60480} = 0,05$	-0,05	0,00
	-0,0000041 <sub>x</sub> 68	-0,0000000 <sub>x</sub> 02	0,0000000 <sub>x</sub> 00
$\sum \ddot{x}_0 \cdot h^1 \ddot{x}_0$	1/0,1=10,0000000 <sub>x</sub> 00	Нет изменений	Нет изменений
$\frac{1}{12} \delta \ddot{x}_0$	$\frac{998334}{12} = 83194,50$		
$\frac{11}{720} \delta^3 \ddot{x}_0$	$\frac{11 \cdot 9975}{720} = -152,40$		
$\frac{191}{60480} \delta^5 \ddot{x}_0$	$\frac{191 \cdot 100}{60480} = 0,32$		
	9,9916652 <sub>x</sub> 78		
$\sum \ddot{x}_{1/2} \sum \ddot{x}_0 \cdot \frac{1}{2} \ddot{x}_0$	9,9916652 <sub>x</sub> 78	9,9916652 <sub>x</sub> 78	9,9916652 <sub>x</sub> 78

Таблица 2.3

Вычисление  $x_{\pm 1}$ ,  $x_{\pm 2}$ ,  $x_{\pm 3}$ 

Формула	1-й цикл	2-й цикл	3-й цикл
1	2	3	4
$x_1 \square h^2 \sum \ddot{x}_{-1}$	-0,0999166 <sub>x</sub> 95	-999166 <sub>x</sub> 53	-999166 <sub>x</sub> 53
$\square \frac{h^2}{12} \ddot{x}_{-1}$	827 <sub>x</sub> 78	831 <sub>x</sub> 95	831 <sub>x</sub> 95
$\square \frac{h^2}{240} \delta^2 \ddot{x}_{-1}$	0,83	0,41	0,42
$x_1 \square h^2 \sum \ddot{x}_1$	-0,0998338 <sub>x</sub> 34	-998334 <sub>x</sub> 17	-998334 <sub>x</sub> 16

1	2	3	4
$\square \frac{h^2}{12} \ddot{x}_1$	0,0999166 <sub>x</sub> 11 – 836 <sub>x</sub> 11	999166 <sub>x</sub> 53 – 831 <sub>x</sub> 94	999166 <sub>x</sub> 53 – 831 <sub>x</sub> 95
$\square \frac{h^2}{240} \delta^2 \ddot{x}_1$	0 <sub>x</sub> 00	– 0 <sub>x</sub> 42	– 0 <sub>x</sub> 42
$x_{.2} \square h^2 \sum^2 \ddot{x}_{.2}$	0,0998330 <sub>x</sub> 00	998334 <sub>x</sub> 17	998334 <sub>x</sub> 16
$\square \frac{h^2}{12} \ddot{x}_{.2}$	– 0,1988400 <sub>x</sub> 00 1638 <sub>x</sub> 97	– 1988349 <sub>x</sub> 68 1655 <sub>x</sub> 63	– 1988349 <sub>x</sub> 72 1655 <sub>x</sub> 58
$\square \frac{h^2}{240} \delta^2 \ddot{x}_{.2}$	1 <sub>x</sub> 24	0 <sub>x</sub> 82	0 <sub>x</sub> 83
$x_2 \square h^2 \sum^2 \ddot{x}_2$	– 0,1986759 <sub>x</sub> 89	– 1986693 <sub>x</sub> 23	– 1986693 <sub>x</sub> 31
$\square \frac{h^2}{12} \ddot{x}_2$	0,1988299 <sub>x</sub> 34 – 1672 <sub>x</sub> 19	1988349 <sub>x</sub> 76 – 1655 <sub>x</sub> 52	1988349 <sub>x</sub> 72 – 1655 <sub>x</sub> 58
$\square \frac{h^2}{240} \delta^2 \ddot{x}_2$	– 0 <sub>x</sub> 44	– 0 <sub>x</sub> 84	– 0 <sub>x</sub> 83
$x_{.3} \square h^2 \sum^2 \ddot{x}_{.3}$	0,1986626 <sub>x</sub> 70	1986693 <sub>x</sub> 40	1986693 <sub>x</sub> 31
$\square \frac{h^2}{12} \ddot{x}_{.3}$	– 0,2957965 <sub>x</sub> 65 2425 <sub>x</sub> 45	– 2957665 <sub>x</sub> 23 2462 <sub>x</sub> 95	– 2957665 <sub>x</sub> 98 2462 <sub>x</sub> 67
$\square \frac{h^2}{240} \delta^2 \ddot{x}_{.3}$	1 <sub>x</sub> 64	1 <sub>x</sub> 22	1 <sub>x</sub> 24
$x_3 \square h^2 \sum^2 \ddot{x}_3$	– 0,2955538 <sub>x</sub> 56	– 2955201 <sub>x</sub> 06	– 2955202 <sub>x</sub> 07
$\square \frac{h^2}{12} \ddot{x}_3$	0,2957366 <sub>x</sub> 31 – 2499 <sub>x</sub> 89	2959666 <sub>x</sub> 73 – 2462 <sub>x</sub> 39	2957665 <sub>x</sub> 98 – 2462 <sub>x</sub> 67
$\square \frac{h^2}{240} \delta^2 \ddot{x}_3$	– 0 <sub>x</sub> 84	– 1 <sub>x</sub> 25	– 1 <sub>x</sub> 24
	0,2954865 <sub>x</sub> 58	2955203 <sub>x</sub> 09	2955202 <sub>x</sub> 07

**Примечания.** Для сокращения записи в табл. 2.1 – 2.5 в колонках продолжения место десятичной точки опущено. В табл. 2.2 и 2.3 значок  $x$  обозначает позицию округления.

## Интегрирование во втором цикле приближений

$\tau$	$\sum^2 \ddot{x}$	$\sum \ddot{x}$	$\dot{x}$	$\delta \ddot{x}$	$\delta^2 \ddot{x}$	$\delta^3 \ddot{x}$	$\delta^4 \ddot{x}$	$\delta^5 \ddot{x}$	$\delta^6 \ddot{x}$
-0,3	-29,5766523		0,2955538						
		9,6931555		-968778					
-0,2	-19,8834968		0,1986760		-19644				
		9,8918315		-988422		09728			
-0,1	-9,9916653		0,0998338		-09916		196		
		9,9916653		-998338		09924		-094	
0,0	0,0000000		0,0000000	(-998334)	00008	(09975)	102	-100	-12
		9,9916653		-998330		10026			
0,1	9,9916653		-0,0998330		10034		-004		
		9,8918323		-988296		10022			
0,2	19,8834976		-0,1986626		20056				
		9,6931697		-968240					
0,3	29,5766673		-0,2954866						

## Интегрирование в третьем цикле приближений

$\tau$	$\sum^2 \ddot{x}$	$\sum \ddot{x}$	$\dot{x}$	$\delta \dot{x}$	$\delta^2 \ddot{x}$	$\delta^3 \ddot{x}$	$\delta^4 \dot{x}$	$\delta^5 \dot{x}$	$\delta^6 \ddot{x}$
-0,3	-29,5766598		0,2955201						
		9,6931626		-968508					
-0,2	-19,8834972		0,19866983		-19851				
		9,8918319		-988359		09876			
-0,1	-9,9916653		0,0998334		-09975		099		
		9,9916653		-998334		09975		-099	
0,0	0,0000000		0,0000000	(-998334)	00000	(09975)	000	-100	-2
		9,9916653		-998334		09975		-101	
0,1	9,9916653		-0,0998334		09975		-101		
		9,8918319		-988359		09874			
0,2	19,8834972		-0,1986693		19849				
		9,6931626		-968510					
0,3	29,5766598		-0,2955203						

**Интегрирование от шага  $t_i = 0,9$  к шагу  $t_i = 1,0$  методом сумм**

$\tau$	$\sum^2 \ddot{x}$	$\sum \ddot{x}$	$\ddot{x}$	$\delta \ddot{x}$	$\delta^2 \ddot{x}$	$\delta^3 \ddot{x}$	$\delta^4 \ddot{x}$	$\delta^5 \ddot{x}$
0,0	0,0000000		0,0000000		00000		000	
0,1	9,9916653	9,9916653	- 0,0998334	- 998334	09975	9975	- 100	- 100
0,2	19,8834972	9,8918319	- 0,1986693	- 988359	19850	9875	- 197	- 097
0,3	29,5766598	9,6931626	- 0,2955202	- 968509	29528	9678	- 297	- 100
0,4	38,9743022	9,3976424	- 0,3894183	- 938981	38909	9381	- 388	- 091
0,5	47,9825263	9,0082241	- 0,4794255	- 900072	47902	8993	- 477	- 089
0,6	56,5113249	8,5287986	- 0,5656425	- 852170	56418	8516	- 566	- 089
0,7	64,4754810	7,9641561	- 0,6442177	- 795752	64368	7950	- 566	- 076
0,8	71,7954194	7,3199384	- 0,7173561	- 731384	71676	7308	- 642	
0,9	78,3980017	6,6025823	- 0,7833269	- 659708				
1,0	84,2172571	5,8192554						

На этом заканчивается первый цикл вычислений. После выполнения второго и третьего циклов вычислений (табл. 2.4 и 2.5) возникает необходимость выбора критерия остановки вычислений.

Самый простой критерий – повторяемость значений  $\ddot{x}$  между последовательными циклами. Выбор других критериев остановки приближений, начального шага и критериев его изменения, а также оценка точности интегрирования достаточно подробно рассмотрены в работе [61].

В приведенном выше численном примере третий цикл вычислений можно считать началом интегрирования от шага к шагу. В табл. 2.6 подготовлены данные для перехода от шага  $i = 9$  (данные выше ломаной линии) к шагу  $i = 10$ . Вычисления идут в таком порядке.

Сначала вычисляются величины

$$\delta^3 \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}} = \delta^3 \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}} + \delta^4 \ddot{x}_{i-2} = 7950 - 566 = 7384;$$

$$\delta^2 x_i = \delta^2 x_{i-1} + \delta^3 \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}} = 64368 + 7384 = 71752;$$

$$\ddot{x}_{i+1} = \ddot{x}_i + \delta \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}} + \delta^2 \ddot{x}_i = -0,7173561 - 731384 + 71752 = -0,7833193;$$

$$\delta^2 \ddot{x}_{i+1} = \delta^2 \ddot{x}_i + \delta^2 \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}} = 71752 + 7384 = 79136.$$

Затем, используя уравнение (2.3.2.15), вычисляем

$$\begin{array}{r} x_{i+1} = h^2 \sum^2 \ddot{x}_{i+1} \\ + \frac{1}{12} h^2 \ddot{x}_{i+1} \\ - \frac{1}{240} h^2 \delta^2 \ddot{x}_{i+1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 0,01 * 78,3980017 = 0,7839800_x 2 \\ - 0,01 * 0,7833193 = -0006527_x 7 \\ \hline - 0,01 * 0,0079136 = -0000003_x 3. \\ 0,7833269_x 2 \end{array}$$

После этого значение  $\ddot{x}_{i+1} = -x_{i+1} = -0,7833269_x 2$  округляется и вносится в таблицу, остальные величины под ломаной линией получаются суммированием или вычитанием.

Теперь проиллюстрируем метод  $\delta_c^2$  на том же примере при переходе от шага интегрирования  $i = 8$  к шагу  $i + 1 = 9$ . В табл. 2.7 приведены результаты интегрирования за пер-

Интегрирование способом  $\delta^2$  в начале шага от  $\tau_1 = 0,8$  до  $\tau_{i+1} = 0,9$ 

$\tau$	$x$	$\delta x$	$\delta^2 x$	$\ddot{x} = -x$	$\delta \dot{x}$	$\delta^2 \ddot{x}$	$\delta^3 \ddot{x}$	$\delta^4 \ddot{x}$	$\delta^5 \ddot{x}$	$\epsilon = x - \sin \tau$
0,0	0,00000000		0000000	0,0000000		00000		000		0 0
		99833417			- 998334		9975		- 100	0
0,1	0,099833417		- 0977503	- 0,0998334		09975		- 100		0 0
		98835914			- 988359		9875		- 097	0
0,2	0,198669331		- 1985038	- 0,1986693		19850		- 197		0 0
		96850876			- 968509		9678		- 100	0
0,3	0,295520207		- 2952740	- 0,2955202		29528		- 297		0 1
		93898136			- 938981		9381		- 091	1
0,4	0,389418343		- 3890939	- 0,3894183		29528		- 388		1 - 1
		90007197			- 900072		8993		- 089	0
0,5	0,479425540		- 4790262	- 0,4794255		47902		- 477		1 1
		85216935			- 852170		8516		- 089	1
0,6	0,564642475		- 5641721	- 0,5646425		56418		- 566		2 - 1
		79575214			- 795752		7950			0
0,7	0,644217689		- 5641721	- 0,6442177		64368		(- 655)		2 0
		731384404			- 731384					0
0,8	0,717356093		- [7167586]	- 0,7173561		(71663)		(- 744)		2
		[65970818]								
0,9	[0,783326911]			- 0,7833269*						

вые восемь шагов, в скобках представлены результаты “предикторного” вычисления. Первой операцией предикторного интегрирования является вычисление величин

$$\delta^4 \ddot{x}_{i-1} = \delta^4 \ddot{x}_{i-2} + \delta^5 \ddot{x}_{i-5/2} + \dots = -566 - 89 + \dots = -655 + \dots;$$

$$\delta^2 \ddot{x}_i = \delta^2 \ddot{x}_{i-1} + \delta^3 \ddot{x}_{i-3/2} + \delta^4 \ddot{x}_{i-1} = 64368 + 7950 - 655 = 71663;$$

$$\delta^4 \ddot{x}_i = \delta^4 \ddot{x}_{i-1} + \delta^5 \ddot{x}_{i-3/2} + \dots = -655 - 89 + \dots = -744 + \dots$$

Следующая операция – это вычисление  $\delta^2 x_i$  по формуле (2.3.2.14) с использованием предикторных значений  $\delta^2 \ddot{x}_i$  и  $\delta^4 \ddot{x}_i$ , полученных выше, – шаг интегрирования, как и прежде,  $h = 0,1$ ,  $h^2 = 0,01$ . Для сравнения рядом приводятся результаты корректорного вычисления.

	Предикторное вычисление	Корректорное вычисление
$\delta^2 x_i = h \ddot{x}_i \Big _i =$	$- 0,007173561_x 0$	$- 0,007173561_x 0$
$+ \frac{h^2}{12} \delta^2 \ddot{x}_i \left( = \frac{0,01 \cdot 71663}{12} \right)$	$+ 5971_x 0$	$+ 5973_x 0$
$- \frac{h^2}{240} \delta^4 \ddot{x}_i \left( = - \frac{-744 \cdot 0,01}{240} \right)$	$+ 3_x 1$	$+ 3_x 0$
$+ \dots$	$+ \dots$	$+ \dots$
	<hr/>	<hr/>
	$- 0,007167586_x 0$	$- 0,007167585_x 0$

Округленное значение  $\delta^2 x_i$  вносится в квадратных скобках в нижнюю часть 4-й колонки табл. 2.7 для получения при последовательном суммировании значения функции  $x_9 = 0,783326911$  во 2-й колонке. Далее с помощью этого значения  $x$  вычисляется ускорение в 5-й колонке (отмечено звездочкой), куда оно вносится с округлением, а затем вправо по диагонали вычисляются соответствующие разности.

В корректорном вычислении используются величины

$$\delta^2 \ddot{x}_i = 71676;$$

$$\delta^4 x_i = \delta^4 \ddot{x}_{i-1} + \delta^5 \ddot{x}_{i-3/2} + \dots = -642 - 76 + \dots = -718 + \dots$$

Полученное из корректорного вычисления значение  $\delta^2 x$  вносится в нижнюю часть 4-й колонки и используется для вычисления уточненных значений  $\delta x$  и  $x$  во 2-й и 3-й колонках. На этом вычисления в 9-м шаге заканчиваются и можно переходить к следующему шагу. В данном примере разность между предикторным и корректорным циклами мала, однако корректорный цикл необходим для того, чтобы избежать включения ошибки предикторного значения  $\delta^2 x_i$  в прогрессивно возрастающие ошибки последующих значений  $x$ , которые показаны в последней колонке табл. 2.7.

Если элементы орбиты ИСЗ для какого-либо интервала установлены (см., например, работу [67]), то для определения исходных данных для начальной таблицы могут использоваться следующие методы:

- разложение в ряды Тейлора по времени

$$x_j = x_0 + \tau_j \dot{x}_0 + \frac{1}{2} \tau_j^2 \ddot{x}_0 + \dots;$$

$$\dot{x}_j = \dot{x}_0 + \tau_j \ddot{x}_0 + \dots;$$

- вычисление оскулирующей орбиты задачи двух тел с добавлением основных возмущений;

- приближенное интегрирование по способу Рунге-Кутты;

- использование предыдущего точного интегрирования.

Возмущающие ускорения в формулах (2.3.2.2) вычисляются в виде равнодействующих всех учитываемых сил. Наибольшие возмущения в движении ИСЗ вызываются гравитационным полем Земли, затем притяжением Луны, Солнца и больших планет. Наконец, учитываются негравитационные возмущения: атмосферное торможение и давление солнечного излучения. Гравитационные возмущения от ГПЗ вычисляются в виде

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad x \rightarrow y, z, \quad (2.3.2.17)$$

где  $U$  – потенциал притяжения Земли в виде (2.1.2).

Возмущающие ускорения от других тел, которые значительно меньше, могут учитываться так же, как в задаче двух тел. Например, для спутников с высотой орбиты менее 2000 км ускорение от Луны составляет  $1,4 \cdot 10^{-6}$  м / с<sup>2</sup>, от Солнца  $0,66 \cdot 10^{-6}$  м/с<sup>2</sup>, что составляет соответственно  $2,5 \cdot 10^{-7}$  и  $1,2 \cdot 10^{-7}$  часть от ускорения земного притяжения. Так как по координатам ИСЗ и соответствующих тел легко получить направляющие косинусы направлений между ними относительно осей инерциальной системы координат, также легко получить проекции их возмущений на эти оси. Шаг интегрирования орбит возмущающих тел выбирают с учетом скорости их движения относительно Земли. Например, шаг интегрирования для больших планет может составлять 10 – 20 сут с интерполяцией для промежуточных точек.

При расчете возмущений от больших планет используются следующие соотношения их масс относительно массы Солнца

П л а н е т а $m_s / m_p$			
Юпитер	1 047,35	Уран	22 960
Сатурн	3 498,0	Нептун	19 314.
Земля	33 2946,0		

Средние элементы этих планет на стандартную эпоху J2000.0 составляют

### Ю п и т е р

$$\begin{aligned}
 a &= 5,2026032092 + 0,00000019132T - 0,00000000004T^2; \\
 e &= 0,0484979255 + 0,00016322542T - 0,00000047137T^2 - \\
 &- 0,00000000201T^3; \\
 i &= 1,30326698^\circ - 19,7874''T + 0,0168''T^2; \\
 M_0 &= 20,02031187^\circ + 10924884,5029''T - 2,9056''T^2 + 0,162''T^3; \\
 \omega &= 985920,47946'' + 2129,9679''T + 2,2582''T^2 - 0,0176''T^3; \\
 \Omega &= 100,46440702^\circ + 3675,5187''T + 1,4513''T^2 + 0,0015''T^3
 \end{aligned}$$

## С а т у р н

$$\begin{aligned}
 a &= 9,5549091915 - 0,00000213896T + 0,00000000044T^2; \\
 e &= 0,0555481426 - 0,00034664062T - 0,00000064364T^2 + \\
 &+ 0,0000000034T^3; \\
 i &= 2,48887878^\circ - 13,4504''T - 0,0547''T^2 + 0,0003''T^3; \\
 M_0 &= 317,02020682^\circ + 4397570,3063''T - 1,1464''T^2 + \\
 &+ 0,0178''T^3; \\
 \omega &= 1221810,245856'' + 3912,0238''T + 3,4534''T^2 + 0,0258''T^3 \\
 \Omega &= 113,66550252^\circ + 3157,5169''T - 0,4383''T^2 - 0,0081''T^3
 \end{aligned}$$

## У р а н

$$\begin{aligned}
 a &= 19,2184460618 - 0,00000003716T + 0,00000000098T^2; \\
 e &= 0,0463812221 - 0,00002729293T + 0,00000007891T^2 + \\
 &+ 0,0000000024T^3; \\
 i &= 0,77319689^\circ + 2,7878''T + 0,135''T^2 - 0,0003''T^3; \\
 M_0 &= 507778,97058'' + 1542159,639''T + 0,3234''T^2 - \\
 &- 0,0015''T^3; \\
 \omega &= 356397,60258'' + 3474,9044''T - 4,0515''T^2 + 0,0549''T^3 \\
 \Omega &= 74,00595701^\circ + 1876,0599''T + 4,822''T^2 + 0,0665''T^3
 \end{aligned}$$

## Н е п т у н

$$\begin{aligned}
 a &= 30,1103868694 - 0,00000016635T + 0,00000000069T^2; \\
 e &= 0,009455747 + 0,00000603263T - 0,0000000005T^3; \\
 i &= 1,76995259^\circ - 33,5094''T - 0,0255''T^2 + 0,0001''T^3; \\
 M_0 &= 922422,203784'' + 786445,2489''T - 0,2718''T^2; \\
 \omega &= 994810,386672'' + 1166,7302''T + 0,4493''T^2 + 0,0024''T^3; \\
 \Omega &= 131,78405702^\circ + 3967,9342''T + 0,9343''T^2 - 0,0023''T^3,
 \end{aligned}$$

где  $T$  – время в юлианских столетиях от эпохи J2000.0; большие полуоси выражены в астрономических единицах.

Сила сопротивления атмосферы движению ИСЗ выражается формулой

$$F = 0,5 \rho V^2 S C_D, \quad (2.3.2.18)$$

где  $\rho$  – плотность воздуха;  $V$  – скорость спутника относи-

тельно атмосферы;  $S$  – площадь поперечного миделевого сечения;  $C_D$  – безразмерный аэродинамический коэффициент лобового сопротивления.

Влияние атмосферного торможения приводит к возмущениям в элементах орбиты, которые определяются формулами

$$\begin{aligned}\Delta n &= k(t - t_0); \\ \Delta a &= -\frac{2k}{3n_0} a_0(t - t_0); \\ \Delta e &= -\frac{2k}{3n_0} \frac{I_1(\zeta)}{I_0(\zeta) + e_0 I_1(\zeta)} (t - t_0); \\ \Delta M &= \frac{k}{2} (t - t_0)^2; \\ \Delta \Omega &= \frac{7 - 8e_0}{6} \mu k (t - t_0)^2; \\ \Delta \omega &= \frac{7 - 8e_0}{6} \nu k (t - t_0)^2,\end{aligned}\tag{2.3.2.19}$$

где

$$k = \frac{3}{2} n_0^2 a_0 \rho_0 \kappa (2\pi \zeta)^{1/2} \left( 1 + 2e_0 + \frac{3}{2} e_0^2 + \frac{1 - 6e_0}{8\zeta_0} + \frac{9}{128\zeta_0^2} \right),$$

$$\mu = \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_0}{p_0} \right)^2 \cos i_0;$$

$$\nu = -\frac{3}{4} J_2 \left( \frac{r_0}{p_0} \right)^2 (4 - 5 \sin^2 i_0);$$

$$\zeta = \frac{a_0 e_0}{H};$$

$$\kappa = \frac{SC_D}{m_0}.$$

Здесь с индексом 0 – параметры орбиты в начальную эпоху;  $I(\zeta)$  – функция Бесселя мнимого аргумента;  $m_0$  – масса спутника;  $r_0$  – средний радиус Земли. Произведение  $SC_D$  для

нового объекта обычно определяется по наблюдениям.

Сила светового давления выражается формулой

$$F = \frac{CS_0(1+k)}{c} \left( \frac{R_0}{\Delta} \right)^2 \cos^2 \alpha, \quad (2.3.2.20)$$

где  $C$  – освещенная площадь спутника;  $S_0$  – мощность солнечной радиации, попадающей на  $1 \text{ см}^2$  в единицу времени (солнечная постоянная);  $k$  – коэффициент отражения;  $R_0$  – среднее расстояние от Земли до Солнца;  $\Delta$  – расстояние между Солнцем и спутником;  $\alpha$  – угол падения солнечного луча;  $c$  – скорость света.

Давление солнечного света приводит к отклонению навигационного спутника от невозмущенной орбиты за сутки на 31 м. Если спутник заходит в своем движении в тень Земли, то учет давления солнечного света выполняется по другому, нежели при постоянном его освещении. Это возмущение сказывается на всех элементах орбиты спутника, кроме большой полуоси при постоянном освещении. Важнейшей характеристикой возмущений от давления солнечного света является отношение  $C/m_0$ . Необходимые формулы учета возмущений от давления солнечного света в элементах орбиты приведены в [54].

При интегрировании движения ИСЗ шаг, как правило, не будет совпадать с моментами наблюдений, поэтому для интерполирования координат и скорости ИСЗ от конца последнего шага до момента наблюдения могут применяться формулы Брауэра

$$\begin{aligned} x_{i+n} = & h^2 \left[ \sum^2 \ddot{x}_i + n \sum \ddot{x}_i + \frac{1}{2} \left( n^2 + \frac{1}{6} \right) \ddot{x}_i + \frac{1}{3!} \left( n^3 - \frac{n}{2} \right) \delta \ddot{x}_i + \right. \\ & + \frac{1}{4!} \left( n^4 - \frac{1}{10} \right) \delta^2 \ddot{x}_i + \frac{1}{5!} \left( n^5 - \frac{10}{3} n^3 + \frac{11n}{6} \right) \delta^3 \ddot{x}_i + \frac{1}{6!} \left( n^6 - \frac{5}{2} n^4 + \right. \\ & \left. \left. + \frac{31}{84} \right) \delta^4 \ddot{x}_i + \frac{1}{7!} \left( n^7 - \frac{21}{2} n^5 + 28n^3 - \frac{191n}{12} \right) \delta^5 \ddot{x}_i + \dots \right]; \quad (2.3.2.21) \end{aligned}$$

$$\dot{x}_{i+n} = h \left[ \sum \dot{x}_i + n \dot{x}_i + \frac{1}{2} \left( n^2 - \frac{1}{6} \right) \delta \dot{x}_i + \frac{1}{3!} n^3 \delta^2 \dot{x}_i + \frac{1}{4!} \left( n^4 - 2n^2 + \right. \right.$$

$$+ \frac{11}{30} \delta^3 \ddot{x}_i + \frac{1}{5!} \left( n^5 - \frac{5n^3}{3} \right) \delta^4 \ddot{x}_i + \frac{1}{6!} \left( n^6 - \frac{15}{2} n^4 + 12n^2 - \frac{191}{84} \right) \delta^5 \ddot{x}_i + \dots],$$

где  $0 \leq n \leq 1$  – интерполирующий множитель на долю шага  $h$ .

### 2.3.2.3. Дифференциальное уточнение орбит

Получение предварительной орбиты и ее интегрирование являются необходимой, но не достаточной частью процесса решения краевой задачи. Начальные условия орбиты из-за неточного их знания должны быть согласованы с теми наблюдениями, которые выполнены на этой дуге. Прежде, чем включать нормальные уравнения данной дуги в общее орбитальное или динамическое решение ее начальные условия должны быть предварительно уточнены настолько, чтобы остаточное влияние вторых производных при линеаризации функций измеренных величин от определяемых параметров было сведено к минимуму. Конечно, предварительное уточнение орбит уменьшает только ошибки начальных условий, но не уменьшает влияние грубых значений предварительных координат определяемых пунктов. Однако начальные условия данной дуги могут уточняться только по наблюдениям на данной дуге, тогда как координаты пунктов уточняются по совокупности всех дуг, которые наблюдались с данного пункта, и поэтому влияние вторых производных из-за ошибок координат в общем решении скажется меньше. Если интегрирование орбитальной дуги было выполнено с учетом всех возмущений, то форма орбиты при уточнении начальных условий фактически не изменится, а изменятся в основном ее ориентация в пространстве и, возможно, масштаб.

Для уточнения начальных условий орбиты прежде всего необходимо представить все измеренные величины как функции от координат ИСЗ на момент выполнения наблюдения и координат пунктов наблюдений. Затем координаты ИСЗ на момент измерения  $t_i$  представляются

как функции от начальных условий на начальную эпоху  $t_0$ . Вычислив производные от измерений по координатам и производные от координат ИСЗ по начальным условиям и перемножив их, найдем коэффициенты уравнения поправок к начальным условиям для данного измерения. Вычислив разность измеренного и вычисленного по предварительным координатам ИСЗ и пункта параметра получим свободный член этого уравнения поправок.

Наиболее типичными видами траекторных измерений являются топоцентрические экваториальные координаты ИСЗ  $\gamma, \delta$ , радиотехническое или лазерное измерение дальности от пункта до ИСЗ  $\rho$ , разность расстояний между двумя положениями ИСЗ  $\Delta\rho$ , получаемая интегрированием доплеровских измерений, и радиальная скорость ИСЗ относительно пункта наблюдения  $\dot{\rho}$ . Зависимость этих видов измерений от координат и скорости ИСЗ, а также координат пунктов выражается формулами

$$\begin{aligned}\gamma &= \operatorname{arctg} \frac{y - Y}{x - X}; \\ \delta &= \operatorname{arctg} \frac{z - Z}{S}; \\ \rho &= \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}; \\ \Delta\rho &= \rho_2 - \rho_1; \\ \dot{\rho} &= \frac{\dot{x}(x - X) + \dot{y}(y - Y) + \dot{z}(z - Z)}{\rho},\end{aligned}\tag{2.3.2.22}$$

где  $S = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2}$ ;  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  — координаты и составляющие скорости ИСЗ;  $X, Y, Z$  — координаты пункта наблюдения.

Производные от этих измерений по всем неизвестным представлены в табл. 2.8.

Так как уравнение поправок для разности координат вычисляется как разность двух уравнений поправок для дальности, то в таблице соответствующие производные не

даются. Для сокращения записи в таблице введены дополнительно следующие обозначения:

$$\Delta x = x - X; \Delta y = y - Y; \Delta z = z - Z.$$

В табл. 2.8 предполагается, что координаты ИСЗ приведены во вращающейся вместе с Землей системе координат, т. е. в той же системе, что и координаты пунктов. Для кеплеровой орбиты производные от координат ИСЗ по элементам  $a, e, i, M_0, \omega, \Omega$  приведены в табл. 2.9. При этом в табл. 2.9 применены обозначения, используемые в работе [61], они будут употребляться и далее при оценке точности положения и скорости ИСЗ.

Радиальная и трансверсальная скорости, введенные выражением (1.3.2), вычисляются по формулам

$$\dot{r} = V_r = \frac{a^2 n e \sin E}{r}; \quad r\dot{\theta} = V_n = \frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{r}.$$

Орбитальные координаты  $\xi, \eta$  равны

$$\xi = a(\cos E - e); \quad \eta = a\sqrt{1-e^2} \sin E.$$

Направляющие косинусы трансверсали относительно осей инерциальной системы координат задаются вектором

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i \\ -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i \\ \cos u \sin i \end{bmatrix}.$$

Если движение ИСЗ рассматривается как возмущенное, то приведенные в табл. 2.9 величины являются производными от оскулирующих элементов орбиты. В этом случае при составлении уравнений поправок измерений их коэффициенты должны дополнительно умножаться на матрицу изохронных производных (2.3.2.5), связывающую начальные условия с оскулирующими элементами орбиты.

Производные от координат по начальным условиям могут вычисляться изложенным аналитическим методом в основном при предварительном уточнении орбит. В общем орбитальном или динамическом решении чаще

## Производные от измерений по координатам и составляющим скорости

Вид измерения	Производные по								
	x	y	z	$\dot{x}$	$\dot{y}$	$\dot{z}$	X	Y	Z
$\gamma$	$-\frac{\Delta y}{S^2}$	$\frac{\Delta x}{S^2}$	0	0	0	0	$\frac{\Delta y}{S^2}$	$-\frac{\Delta x}{S^2}$	0
$\delta$	$-\frac{\Delta x \Delta z}{Sp^2}$	$-\frac{\Delta y \Delta z}{Sp^2}$	$\frac{S}{\rho^2}$	0	0	0	$\frac{\Delta x \Delta z}{Sp^2}$	$\frac{\Delta y \Delta z}{Sp^2}$	$-\frac{S}{\rho^2}$
$\rho$	$\frac{\Delta x}{\rho}$	$\frac{\Delta y}{\rho}$	$\frac{\Delta z}{\rho}$	0	0	0	$-\frac{\Delta x}{\rho}$	$-\frac{\Delta y}{\rho}$	$-\frac{\Delta z}{\rho}$
$\rho$	$\frac{\dot{x}}{\rho} - \frac{\dot{\rho} \Delta x}{\rho^2}$	$\frac{\dot{y}}{\rho} - \frac{\dot{\rho} \Delta y}{\rho^2}$	$\frac{\dot{z}}{\rho} - \frac{\dot{\rho} \Delta z}{\rho^2}$	$\frac{\Delta x}{\rho}$	$\frac{\Delta y}{\rho}$	$\frac{\Delta z}{\rho}$	$-\frac{\dot{x}}{\rho} - \frac{\dot{\rho} \Delta x}{\rho^2}$	$-\frac{\dot{y}}{\rho} - \frac{\dot{\rho} \Delta y}{\rho^2}$	$-\frac{\dot{z}}{\rho} - \frac{\dot{\rho} \Delta z}{\rho^2}$

## Производные от инерциальных координат по кеплеровым элементам

Производные от	Производные по					
	a	e	i	$M_0$	$\omega$	$\Omega$
x	$\frac{x}{a} - \frac{3\dot{x}}{2a}(t-t_0)$	$-\frac{a\xi}{r^2}x + \frac{a\eta}{r}\left(1 + \frac{r}{p}\right)V_x$	$z \sin \Omega$	$\frac{\dot{x}}{n}$	$rV_x$	-y
y	$\frac{y}{a} - \frac{3\dot{y}}{2a}(t-t_0)$	$-\frac{a\xi}{r^2}y + \frac{a\eta}{r}\left(1 + \frac{r}{p}\right)V_y$	$-z \cos \Omega$	$\frac{\dot{y}}{n}$	$rV_y$	x
z	$\frac{z}{a} - \frac{3\dot{z}}{2a}(t-t_0)$	$-\frac{a\xi}{r^2}z + \frac{a\eta}{r}\left(1 + \frac{r}{p}\right)V_z$	$z \operatorname{ctg} i$	$\frac{\dot{z}}{n}$	$rV_z$	0
$\dot{x}$	$-\frac{\dot{x}}{2a} - \frac{3\ddot{x}}{2a}(t-t_0)$	$\frac{\ddot{x}}{n}x \sin E + \frac{r\dot{\theta} \cos E}{1-e^2}V_x$	$-\dot{z} \sin \Omega$	$\frac{\ddot{x}}{n}$	$\dot{r}V_x - \frac{x}{r}r\dot{\theta}$	$-\dot{y}$
$\dot{y}$	$-\frac{\dot{y}}{2a} - \frac{3\ddot{y}}{2a}(t-t_0)$	$\frac{\ddot{y}}{n}y \sin E + \frac{r\dot{\theta} \cos E}{1-e^2}V_y$	$-\dot{z} \cos \Omega$	$\frac{\ddot{y}}{n}$	$\dot{r}V_y - \frac{y}{r}r\dot{\theta}$	$\dot{x}$
$\dot{z}$	$-\frac{\dot{z}}{2a} - \frac{3\ddot{z}}{2a}(t-t_0)$	$\frac{\ddot{z}}{n}z \sin E + \frac{r\dot{\theta} \cos E}{1-e^2}V_z$	$z \operatorname{ctg} i$	$\frac{\ddot{z}}{n}$	$\dot{r}V_z - \frac{z}{r}r\dot{\theta}$	0

используется численное вычисление этих производных.

Численное вычисление производных основано на разложении функции в ряд Тейлора.

В результате интегрирования орбиты на момент наблюдения  $t_i$  получаются координаты  $x_i, y_i, z_i$  и составляющие скорости  $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ . Эти величины являются некоторыми функциями от начальных условий

$$w_i = f_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0),$$

где  $w_i \rightarrow x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ .

Если какому-либо параметру этой функции, например  $x_0$ , придать некоторое приращение  $\Delta x$ , то

$$w_i = f_i(x_0 + \Delta x, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$$

и после интегрирования новых начальных условий на момент  $t_i$  мы получим координаты и составляющие скорости некоторой варьированной орбиты.

Тогда из разложения в ряд Тейлора следует

$$\Delta w_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_0} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_0^2} \Delta x^2 + \dots$$

Учитывая только линейные члены разложения, получаем формулы для численного вычисления производных

$$\frac{\partial f_x}{\partial x_0} = \frac{\Delta w_x}{\Delta x}; \quad \frac{\partial f_y}{\partial x_0} = \frac{\Delta w_y}{\Delta x}; \quad \frac{\partial f_z}{\partial x_0} = \frac{\Delta w_z}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial x_0} = \frac{\Delta w_x}{\Delta x}; \quad \frac{\partial f_y}{\partial x_0} = \frac{\Delta w_y}{\Delta x_0}; \quad \frac{\partial f_z}{\partial x_0} = \frac{\Delta w_z}{\Delta x}.$$

Варьируя каждый раз значение очередного параметра и оставляя без изменений остальные, можно получить изложенным способом все 36 производных, соответствующих табл. 2.9. Именно в этом заключается метод вариации параметров для численного вычисления производных. Следовательно, интегрируя семь раз орбиту, мы получаем не только опорную орбиту, но и все необходимые для дифференциального уточнения орбиты или выполнения пол-

ного решения производные текущих координат от начальных условий. В отличие от основного интегрирования, результаты которого используются для вычисления свободных членов уравнений поправок, точность интегрирования для вычисления производных может быть снижена на несколько порядков и поэтому шаг интегрирования может быть увеличен в три-четыре раза. Необходимо отметить, что все 36 производных используются только при обработке радиальной скорости (см. формулы 2.3.2.22), при обработке остальных видов измерений достаточно 18 производных.

Теперь, имея все необходимые производные и свободные члены, можно составить уравнения поправок, нормальные уравнения и из их решения получить поправки к исходным начальным условиям. Процесс дифференциального уточнения орбиты может быть повторен несколько раз, пока очередные поправки не станут пренебрежимо малыми.

### **2.3.3. Орбитальное и динамическое решения**

После накопления достаточного количества уточненных дуг по ним можно начинать формировать общее орбитальное или динамическое решение. В отличие от дифференциального уточнения орбит здесь в уравнения поправок включаются все определяемые неизвестные. В орбитальное решение дополнительно включаются поправки к предварительным значениям координат пунктов и, возможно, параметры атмосферного торможения и давления солнечного излучения, если они определены неуверенно. В динамическое решение дополнительно включаются поправки к принятым при уточнении орбит коэффициентам ГПЗ.

Число и состав определяемых в динамическом решении коэффициентов зависят от параметров орбиты данного спутника. Прежде всего — это высота орбиты. С возрастанием высоты орбиты влияние ГПЗ на спутник все более сглаживается. Например, по приведенным в работе [55] данным, величина уклонений отвесных линий уменьшается вдвое на высоте 1000 км по сравнению с уровнем моря

и еще на порядок на высоте 10 000 км. Величина аномалий силы тяжести соответственно уменьшается в три раза и на полтора порядка. Для высот спутника 1000 – 1500 км в число определяемых динамическим методом включают коэффициенты до 18 – 20-го порядка и степени. Для навигационных спутников с высотой орбиты около 22 000 км в модели движения учитываются уже коэффициенты ГПЗ только до 8-го порядка и степени, к которым чувствительны их орбиты.

Кроме высоты орбиты на выбор определяемых в динамическом решении коэффициентов влияют ее наклонение, эксцентриситет и в меньшей степени другие элементы орбиты. При движении ИСЗ возникают также резонансные явления [30]. Это происходит в случае совпадения значительных периодических возмущений, особенно при критическом наклонении  $i = \arccos\sqrt{1/5}$ , с периодом обращения спутника. При этом имеет место  $\dot{\omega} + \dot{M} + \dot{\Omega} - \dot{\theta} \approx 0$ , где  $\theta$  – гринвичское звездное время. Для каждого спутника появляются свои резонансные гармоники  $C_{nk}$ ,  $S_{nk}$ , которые определяются по ним наилучшим образом.

Если в определение коэффициентов ГПЗ из динамического решения включен анализ возмущений орбит только одного типа спутников, то из-за указанных выше особенностей орбит будет получена согласующая модель ГПЗ именно для данного типа спутников. Поэтому для получения модели ГПЗ, свободной от особенностей типа орбит, используются данные для спутников всего спектра наклонений  $-90^\circ \leq i \leq 90^\circ$  и разных высот орбиты.

Потенциал ГПЗ выражается формулой (2.1.2), где  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$  – сферические координаты с началом в центре масс Земли. Они связаны с земной декартовой системой координат, вращающейся вместе с Землей, формулами

$$\begin{aligned} x &= r \cos\varphi \cos\lambda; \\ y &= r \cos\varphi \sin\lambda; \\ z &= r \sin\varphi. \end{aligned} \quad (2.3.3.1)$$

$$\text{Отсюда } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \lambda = \arctg \frac{y}{x}; \quad \varphi = \arctg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Ускорения в движении ИСЗ, вызываемые ГПЗ, выражаются формулами (2.3.2.17). Для получения этих ускорений выражение для потенциала приходится сначала дифференцировать по  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$ , затем дифференцировать последние по  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Пользуясь формулами (2.3.3.1), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{y \operatorname{tg} \varphi}{r^2}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{x \operatorname{tg} \varphi}{r^2}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{z \operatorname{ctg} \varphi}{r^2}; \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (2.3.3.2)$$

Выражения (2.3.2.17), (2.3.3.1) и (2.3.3.2) используются для учета возмущений от ГПЗ как в орбитальном, так и динамическом решениях.

Для определения поправок к коэффициентам принятой для интегрирования уравнений Лагранжа модели ГПЗ применяется аналитическая теория, разработанная в работе [30] и использованная в работе [55] для вывода модели Стандартной Земли. Доступное изложение этой теории приводится в работе [4].

Суть этой теории состоит в преобразовании формулы (2.1.2), выраженной через полярные координаты  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$ , к виду, выраженному через элементы орбиты ИСЗ. Из прямоугольного треугольника на рис. 2.1 по формулам сферической тригонометрии получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{cosk} \lambda &= \operatorname{cosk}(\alpha - \theta) = \operatorname{cosk}[(\alpha - \Omega) + (\Omega - \theta)] = \\ &= \operatorname{cosk}(\alpha - \Omega) \operatorname{cosk}(\Omega - \theta) - \operatorname{sink}(\alpha - \Omega) \operatorname{sink}(\Omega - \theta); \\ \operatorname{sink} \lambda &= \operatorname{sink}(\alpha - \Omega) \operatorname{cosk}(\Omega - \theta) + \operatorname{cosk}(\alpha - \Omega) \operatorname{sink}(\Omega - \theta); \\ \operatorname{cos}(\alpha - \Omega) &= \frac{\operatorname{cos}(\omega + \vartheta)}{\operatorname{cos} \varphi}; \quad \operatorname{sin}(\alpha - \Omega) = \frac{\operatorname{sin}(\omega + \vartheta) \operatorname{cos} i}{\operatorname{sin} \varphi}; \end{aligned}$$

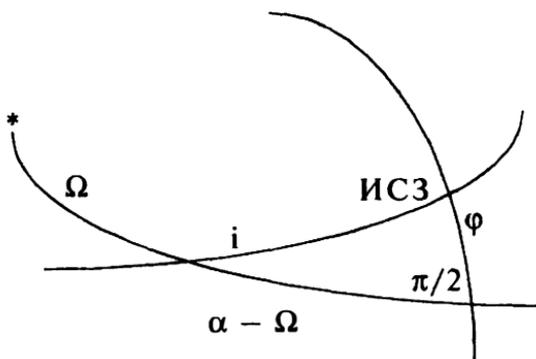


Рис. 2.1. Связь координат с элементами орбиты

$$\sin \varphi = \sin i \sin(\omega + \vartheta),$$

где  $\theta$  – гринвичское звездное время;  $\vartheta$  – истинная аномалия.

Учитывая, что  $\frac{1}{r} = \frac{1}{a(1-e^2)} + \frac{e}{a(1-e^2)} \cos \vartheta$ , заменяем

$\sin k\lambda$ ,  $\cos k\lambda$  в (2.1.2) через элементы орбиты, исключив истинную аномалию. В результате получаем геопотенциал в виде

$$V = \frac{\mu}{r} + R, \quad (2.3.3.3)$$

где  $R = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n V_{nk}$ ;

$$V_{nk} = \frac{\mu a^n}{a^{n+1}} \sum_{p=0}^n F_{nkp}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{pq}(e) S_{nkpq}(\omega, M, \Omega, \theta);$$

$$S_{nkpq} = \left[ \begin{array}{c} C_{nk} \\ -S_{nk} \end{array} \right]_{1-k(2j-1)}^{1-k(2j)} \cos[(n-2p)\omega + (n-2p+q)M +$$

$$+ k(\Omega - \theta)] + \left[ \begin{matrix} S_{nk} \\ C_{nk} \end{matrix} \right]_{1-k(2j-1)}^{1-k(2j)} \sin[(n - 2p)\omega + \\ + (n - 2p + q)M + k(\Omega - \theta)];$$

F(i) – функция наклона; G(e) – функция эксцентриситета, вид и значения которых для начальных индексов приводятся в [30]. В индексах при  $C_{nk}$  и  $S_{nk}$  величины в скобках  $2j$  и  $2j - 1$  указывают на четность или нечетность разности  $l - k$ . Вместо бесконечного суммирования по  $q$  применяют конечное, в работе [30]  $q = \pm 4$ .

Теперь функция R может быть продифференцирована по элементам орбиты и подставлена в уравнения Лагранжа

$$\begin{aligned} \frac{d\delta a_{nk}}{dt} &= \frac{2}{\tilde{n}a} \frac{\partial V_{nk}}{\partial M_0}; \\ \frac{d\delta e_{nk}}{dt} &= \frac{1-e^2}{\tilde{n}a^2 e} \frac{\partial V_{nk}}{\partial M_0} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{\tilde{n}a^2 e} \frac{\partial V_{nk}}{\partial \omega}; \\ \frac{d\delta i_{nk}}{dt} &= \frac{1}{\tilde{n}a^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \text{ctgi} \frac{\partial V_{nk}}{\partial \omega} - \text{coseci} \frac{\partial V_{nk}}{\partial \Omega} \right); \quad (2.3.3.4) \\ \frac{d\delta M_{nk}}{dt} &= -\frac{1-e^2}{\tilde{n}a^2 e} \frac{\partial V_{nk}}{\partial e} - \frac{2}{\tilde{n}a} \frac{\partial V_{nk}}{\partial a} + \frac{3}{a^2} \frac{\partial}{\partial M_0} \int V_{nk} dt; \\ \frac{d\delta \omega_{nk}}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{\tilde{n}a^2 e} \frac{\partial V_{nk}}{\partial e} - \frac{\text{ctgi}}{\tilde{n}a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial V_{nk}}{\partial i}; \\ \frac{d\delta \Omega_{nk}}{dt} &= \frac{\text{coseci}}{\tilde{n}a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial V_{nk}}{\partial i}, \end{aligned}$$

где  $V_{nk}$  – нормированная гармоника порядка  $n$ , степени  $k$ ;

$\bar{\pi}$  – среднее движение. Аналитическое интегрирование уравнений (2.3.3.4) дает возмущения элементов орбиты  $\delta E_{nk}$ ,  $E \rightarrow a, e, i, M, \omega, \Omega$  от гармоники  $V_{nk}$ .

Наибольшие возмущения в орбите происходят от гармоники  $C_{20}$ , которая по величине превосходит остальные коэффициенты в 1000 раз.

При подстановке в уравнения (2.3.2.4), учитывающие влияние коэффициента  $C_{20}$ , параметров орбиты наиболее типичного геодезического спутника  $e = 0,01$  и  $a = 1,12a_e$  получаем

$$\frac{d\omega}{dt} = 3,55^\circ (5 \cos^2 i - 1) \text{ в сутки}; \quad \frac{d\Omega}{dt} = -6,70^\circ \cos i \text{ в сутки};$$

$$\frac{dM}{dt} = 14,37 + 0,0093(3 \cos^2 i - 1) \text{ оборотов в сутки.}$$

Отсюда следует, что при  $\cos i = \sqrt{1/5}$ , т. е. при критическом наклонении  $i = 63,4^\circ$ , аргумент перигея постоянен. Поэтому для анализа вековых и долгопериодических возмущений приходится использовать очень длинные интервалы наблюдений, так как для геодезических ИСЗ с типичными элементами орбиты период изменения аргумента перигея составляет от 80 до нескольких сот дней [55].

Различные коэффициенты ГПЗ уточняются разными способами и по различным данным. Для уточнения зональных гармоник используется анализ вековых возмущений элементов орбиты от них на длинных интервалах наблюдений. Если на таком интервале для  $q$  дуг получены начальные условия  $E_j$  в моменты  $t_j$ , т. е. имеются ряды

номер орбитальной дуги      0, 1, 2, ..., j, ..., q

момент оскуляции             $t_0, t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, t_q$

уточненные элементы орбиты  $E_0, E_1, E_2, \dots, E_j, \dots, E_q$ ,

то любая разность  $E_i - E_j$  может интерпретироваться как влияние возмущений за время  $t_i - t_j$ . Для получения вековых возмущений  $E$  на дугах длиной 2 или 4 сут

сначала получают средние элементы  $E_j$ , на которые не действуют короткопериодические возмущения с периодом в один оборот спутника. Из них исключаются также периодические возмущения, вызванные Луной, Солнцем и давлением солнечного света.

Затем вычисляются вековые ускорение средней аномалии и уменьшение большой полуоси из-за сопротивления атмосферы, которые используются для теоретического вычисления его влияния на вековые вариации долготы восходящего узла, аргумента перигея и эксцентриситета. Эти величины также исключаются из средних элементов. После этого из средних элементов исключают долгопериодические члены, обусловленные четными зональными гармониками, лунно-солнечные вековые члены и возмущения второго порядка от  $J_2^2$ , используя предварительные значения зональных гармоник. Теперь считается, что в исправленных таким образом средних элементах  $e, i, \omega, \Omega$  остались только влияния вековых возмущений и случайных ошибок, и их аппроксимируют полиномами вида

$$E = E_0 + \dot{E}t + A_E \cos \omega, \quad E \rightarrow \omega, \Omega;$$

$$E = E_0 + A_E \sin \omega, \quad E \rightarrow e, i.$$

Из решения полученных уравнений по методу наименьших квадратов находят постоянные  $E_0$ , вековые движения  $\dot{E}$  и амплитуды долгопериодических членов  $A$ .

Полученные значения принимаются за измеренные данные, а вычисленные данные и коэффициенты уравнений поправок получают по предварительным значениям зональных коэффициентов из решения уравнений Лагранжа, вычисляя возмущения от зональных гармоник по формуле

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{a_c}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) \right].$$

Четные зональные гармоники получают по вековым

возмущениям элементов  $\omega, \Omega$ , нечетные – по амплитудам всех четырех элементов.

Тессеральные гармоники получают из их совместного уточнения с координатами пунктов, используя аналитическую теорию Каулы [30]. В этом случае в качестве измерений применяются остаточные уклонения в измеренных величинах вдоль и поперек орбиты, коэффициенты уравнений поправок вычисляются по возмущениям элементов орбиты от соответствующих коэффициентов ГПЗ. Для вычисления этих возмущений используются уравнения (2.3.3.4). При получении тессеральных гармоник применяются остаточные уклонения по наблюдениям всех спутников. Общий вид производных от текущего положения (координат и скорости) по неизвестным этого решения следующий

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \frac{\partial(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial(a, e, i, M, \omega, \Omega)} \left[ \frac{\partial(a, e, i, M, \omega, \Omega)}{\partial(a'', e'', i'', M'', \omega'', \Omega'')} d \begin{bmatrix} a'' \\ e'' \\ i'' \\ M'' \\ \omega'' \\ \Omega'' \end{bmatrix} + \sum_{n,k} \frac{\partial(a, e, i, M, \omega, \Omega)}{\partial(C_{nk}, S_{nk})} \begin{bmatrix} dC_{nk} \\ dS_{nk} \end{bmatrix} + \sum \frac{\partial(a, e, i, M, \omega, \Omega)}{\partial(\text{other})} d(\text{other}) \right] \quad (2.3.3.5)$$

где  $a, e, i, M, \omega, \Omega$  – оскулирующие элементы орбиты;  
 $a'', e'', i'', M'', \omega'', \Omega''$  – средние элементы.

Здесь предполагается, что оскулирующие элементы – это элементы эллипса с постоянными  $a, e, i$  и узлом и перигеем, прецессирующими под влиянием коэффициента  $C_{20}$ . Тогда якобиан

$\frac{\partial(a, e, i, M, \omega, \Omega)}{\partial(a''_0, e''_0, i''_0, M''_0, \omega''_0, \Omega''_0)}$  является ничем иным как матри-

цей изохронных производных (2.3.2.5); (other) – негравитационные возмущения.

После уточнения параметров ГПЗ выполняется комбинированное решение для координат, затем повторяется уточнение коэффициентов ГПЗ. Приближения повторяются до сходимости решения в последовательных итерациях в пределах принятого допуска. В работе [55] было выполнено три приближения. В ней отмечается, что на определение неизвестных оказывает заметное влияние распределение данных по наземным пунктам, поэтому было сделано несколько решений. В одном из решений было отобрано 126 дуг с более равномерным распределением измерений по сравнению с 228 дугами, включающими все пригодные измерения, и именно первому решению отдается предпочтение.

Расхождения между различными решениями достигали 10 – 20 м, поэтому делались попытки компенсировать неравномерность распределения данных в результате придания меньшего веса измерениям в местах их скопления. В конце концов было принято решение взять за основу такое комбинированное уравнивание, в котором расхождение между разными решениями не превышало 5 м.

Приведенный краткий обзор динамического метода показывает его сложность, но и преимущества по анализу влияния отдельных коэффициентов и групп коэффициентов ГПЗ на элементы орбиты, выбор числа и состава неизвестных, длин дуг и других параметров задачи. Многие вопросы общего динамического уравнивания остались нерешенными. Например, для получения разных неизвестных одни и те же измерения используются в разных решениях без учета возникающей корреляции между неизвестными. Нет общей ковариационной матрицы для оценки точности результатов, в основном для этого используются остаточные отклонения в измерениях, хотя в самой работе

[55] признается, что этот критерий ненадежен, с чем невозможно не согласиться.

Рассмотрим теперь возможность решения динамической задачи в прямоугольных инерциальных координатах. Вычисление производных по начальным условиям и координатам пунктов уже было рассмотрено ранее. Для вычисления производных от измерений по параметрам ГПЗ необходимо связать последние с инерциальными координатами, что легко сделать через составляющие ускорения от ГПЗ

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (2.3.3.6)$$

Потенциал ГПЗ в точке с координатами  $r, \varphi, \lambda$  можно записать в виде

$$U = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{a_c}{r} \right)^n P_n^m(\sin \varphi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda)$$

где  $\mu$  – геоцентрическая гравитационная постоянная.

Производные от этого выражения по прямоугольным координатам берутся как от сложной функции

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x}; \\ \ddot{y} &= \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y}; \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.3.3.7)$$

где вторые производные вычисляются по формулам (2.3.3.2) а первые производные равны

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{a_c}{r}\right)^n P_n^m(\sin \varphi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda); \quad (2.3.3.8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a_c}{r}\right)^n \frac{\partial P_n^m(\sin \varphi)}{\partial \varphi} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda);$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a_c}{r}\right)^n P_n^m(\sin \varphi) (-mC_{nm} \sin m\lambda + mS_{nm} \cos m\lambda).$$

Подставив производные (2.3.3.8) в формулу (2.3.3.7), получим

$$\ddot{x} = \ddot{x}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a_c}{r}\right)^n \left\{ C_{nm} \left[ (n+1) P_n^m(\sin \varphi) \cos m\lambda + \frac{\partial P_n^m(\sin \varphi)}{\partial \varphi} \operatorname{tg} \varphi \cos m\lambda - \frac{myr^2}{x(x^2 + y^2)} P_n^m(\sin \varphi) \sin m\lambda \right] + S_{nm} \left[ (n+1) P_n^m(\sin \varphi) \sin m\lambda + \frac{\partial P_n^m(\sin \varphi)}{\partial \varphi} \operatorname{tg} \varphi \sin m\lambda + \frac{myr^2}{x(x^2 + y^2)} P_n^m(\sin \varphi) \cos m\lambda \right] \right\};$$

$$\ddot{y} = \ddot{y}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a_c}{r}\right)^n \left\{ C_{nm} \left[ (n+1) P_n^m(\sin \varphi) \cos m\lambda + \frac{\partial P_n^m(\sin \varphi)}{\partial \varphi} \operatorname{tg} \varphi \cos m\lambda + \frac{mxy^2}{y(x^2 + y^2)} P_n^m(\sin \varphi) \sin m\lambda \right] + S_{nm} \left[ (n+1) P_n^m(\sin \varphi) \sin m\lambda + \frac{\partial P_n^m(\sin \varphi)}{\partial \varphi} \operatorname{tg} \varphi \sin m\lambda - \frac{mxy^2}{y(x^2 + y^2)} P_n^m(\sin \varphi) \cos m\lambda \right] \right\};$$

$$\ddot{z} = \ddot{z}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{a_c}{r} \right)^n \left\{ C_{nm} \left[ (n+1) P_n^m(\sin \varphi) \cos m\lambda - \frac{\partial P_n^m(\sin \varphi)}{\partial \varphi} \operatorname{ctg} \varphi \cos m\lambda \right] + S_{nm} \left[ (n+1) P_n^m(\sin \varphi) \sin m\lambda - \frac{\partial P_n^m(\sin \varphi)}{\partial \varphi} \operatorname{ctg} \varphi \sin m\lambda \right] \right\}, \quad (2.3.3.9)$$

где  $\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{z}_0$  – составляющие ускорения от шарообразной Земли, остальные члены выражения (2.3.3.9) учитывают отклонение реальной Земли от шара.

Обозначив для краткости записи коэффициенты при  $C_{nm}$  и  $S_{nm}$  через  $k_{nm}, l_{nm}$ , получаем

$$\ddot{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (k_{nm}^x C_{nm} + l_{nm}^x S_{nm}), \quad x \rightarrow y, z, \quad (2.3.3.10)$$

откуда легко видеть зависимость ускорения от каждого коэффициента ГПЗ.

Так как интегрирование уравнений движения ИСЗ выполняется с некоторым номинальным полем, уточнении параметров ГПЗ динамическим методом приведет к изменению ускорения на величины

$$d\ddot{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (k_{nm}^x dC_{nm} + l_{nm}^x dS_{nm}), \quad x \rightarrow y, z,$$

откуда легко видеть, что

$$\frac{d\ddot{x}_{nm}^C}{dC_{nm}} = k_{nm}^x; \quad \frac{d\ddot{x}_{nm}^S}{dS_{nm}} = l_{nm}^x, \quad x \rightarrow y, z. \quad (2.3.3.11)$$

Теперь, учитывая равенства (2.3.3.6), можем проинтегрировать выражения (2.3.3.11) по времени.

После первого интегрирования получим производные скорости ИСЗ в момент измерения  $t$  по коэффициентам ГПЗ

$$\frac{d\dot{x}}{dC_{nm}} = \int_{t_0}^t k_{nm}^x dt; \quad \frac{d\dot{x}}{dS_{nm}} = \int_{t_0}^t l_{nm}^x dt; \quad x \rightarrow y, z, \quad (2.3.3.12)$$

а после повторного – производные координат ИСЗ

$$\frac{dx}{dC_{nm}} = \int_{t_0}^t \int k_{nm}^x dt^2; \quad \frac{dx}{dS_{nm}} = \int_{t_0}^t \int l_{nm}^x dt^2; \quad x \rightarrow y, z. \quad (2.3.3.13)$$

Эти действия могут выполняться в ходе пошагового численного интегрирования уравнений движения (см. раздел 2.3.2.2) с попутным составлением уравнения поправок

$$\begin{aligned} & \frac{\partial W_x}{\partial XYZ} dXYZ + \frac{\partial W_x}{\partial xyz\dot{y}\dot{z}} \left( \frac{\partial xyz\dot{y}\dot{z}}{\partial x_0 y_0 z_0 \dot{x}_0 \dot{y}_0 \dot{z}_0} dx_0 y_0 z_0 \dot{x}_0 \dot{y}_0 \dot{z}_0 + \frac{\partial xyz\dot{y}\dot{z}}{\partial C_{nm} S_{nm}} dC_{nm} S_{nm} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial xyz\dot{y}\dot{z}}{\partial other} d(other) \right) - [W, -W(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, X, Y, Z)] = V_w, P_w, \end{aligned} \quad (2.3.3.14)$$

где  $W_x$  – любые траекторные измерения;  $W$  – его вычисленное значение; *other* – возмущения от других небесных тел, кроме Земли, и негравитационные возмущения; и соответствующих нормальных уравнений для уточнения коэффициентов ГПЗ динамическим методом.

Как видим, в прямоугольных координатах необходимые производные вычисляются гораздо проще и быстрее, чем через возмущения элементах орбиты. При этом не требуется преобразования формы записи геопотенциала через элементы орбиты и можно пользоваться привычной формой его записи.

Современные модели ГПЗ выводятся комбинацией лучших динамических моделей ГПЗ с высотомерными и гравиметрическими данными. В спутниковом нивелировании орбиты ИСЗ также уточняются по траекторным измерениям с пунктов КГС, координаты которых в данном случае считаются постоянными и не уточняются. Измеряемыми величинами являются кратчайшие расстояния от ИСЗ до водной поверхности. Для получения измеренных

величин могут использоваться радио- или лазерные высотомеры. При использовании радиовысотомера происходит осреднение высоты в пределах основания конуса облучения поверхности воды, при использовании лазерного высотомера из многолучевых измерений высоты в результате вычислений получается кратчайшее расстояние до воды.

При обработке высотомерных измерений используются модели осреднения с учетом высоты волн, приливов и морской топографической поверхности, т. е. отклонения поверхности воды от геоида. Не пригодными для применения считаются высотомерные измерения вблизи побережий на мелководье и над ледовыми поверхностями, где коэффициент отражения излучения значительно отличается от отражения на открытой воде. Затем вычисленные высоты квазигеоида уравниваются по пересекающимся трассам, аппроксимируются и интерполируются по стандартным трапециям для использования при вычислении других трансформант ГПЗ или определения коэффициентов геопотенциала совместно с другими данными. Гравиметрические измерения также осредняются по стандартным трапециям и используются для вывода высоких гармоник в моделях ГПЗ.

При разном составе измерений метод приближений не может дать согласованную систему параметров, поэтому различают модели ГПЗ, полученные только по спутниковым данным, и модели, определенные по комбинированным данным с привлечением гравиметрических и высотомерных измерений. Для получения согласованных параметров необходимо выполнить динамическое решение с определением всех параметров одновременно или методом приближений по всей измерительной информации.

#### **2.3.4. Анализ точности результатов орбитального и динамического решений**

Анализ точности определения геоцентрических

координат пунктов подробно рассматривается в следующей главе, поэтому в данном разделе остановимся на двух вопросах: оценке точности положения и скорости ИСЗ, а также оценке остаточных уклонений измеренных величин. Эти вопросы, как мы видели, непосредственно связаны с изучением ГПЗ динамическим методом.

В результате орбитального решения получают уравненные значения координат пунктов, в динамическом решении, кроме того, значения коэффициентов ГПЗ с их ковариационными матрицами. Как правило, уточненные значения начальных условий орбитальных дуг при этом не определяются – после составления нормальных уравнений для всех измерений данной дуги их исключают преобразованием нормальных уравнений по алгоритму Гаусса. Это позволяет, во-первых, сохранить неизменной размерность нормальных уравнений для основных неизвестных (координат пунктов и параметров ГПЗ) и, во-вторых, уменьшить порядок решаемой системы уравнений на  $6 \times n$  неизвестных, где  $n$  – число орбитальных дуг, участвующих в решении.

Оценка точности положения и скорости ИСЗ включает два взаимосвязанных процесса: определение и оценку точности начальных условий на орбитальной дуге и оценку точности положения и скорости ИСЗ в заданный момент времени на данной дуге по известным начальным условиям. Первая часть задачи решается довольно просто из-за независимости начальных условий на разных дугах. Если векторы исключенных из нормальных уравнений КГС неизвестных  $\mathbf{g}$  и поправок координат пунктов  $\mathbf{w}$  связаны системой уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{g} + \mathbf{B}\mathbf{w} - \mathbf{l} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{P}, \quad (2.3.4.1)$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  – матрицы коэффициентов уравнений поправок;  $\mathbf{l}$  и  $\mathbf{v}$  – векторы свободных членов и поправок измерений;  $\mathbf{P}$  – весовая матрица измерений, то соответствующая система нормальных уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{g} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{w} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{l} &= \mathbf{0}; \\ \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{g} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{w} - \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{l} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.3.4.2)$$

или после исключения вектора  $\mathbf{g}$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{G} \mathbf{A} \mathbf{w} - \mathbf{B}^T \mathbf{G} \mathbf{I} = 0, \quad (2.3.4.3)$$

где  $\mathbf{G} = \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}$ .

Уравнивание КГС, как правило, заканчивается нахождением из системы (2.3.4.3) вектора поправок координат пунктов

$$\mathbf{w} = (\mathbf{B}^T \mathbf{G} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{G} \mathbf{I} \quad (2.3.4.4)$$

с ковариационной матрицей

$$\mathbf{K}_w = \sigma^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{G} \mathbf{B})^{-1} \quad (2.3.4.5)$$

где  $\sigma^2$  – апостериорная дисперсия единицы веса.

Исключенный вектор  $\mathbf{g}$  можно найти из первого уравнения системы (2.3.4.2)

$$\mathbf{g} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} (\mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{w}). \quad (2.3.4.6)$$

Если при вычислении матрицы  $\mathbf{A}$  используется не вектор предварительных координат  $\mathbf{W}_0$ , а вектор уравненных координат  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \mathbf{w}$ , то  $\mathbf{g} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{I}$ . Так как из-за независимости начальных условий на различных дугах матрица  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$  имеет квазидиагональный вид, т. е. распадается на ряд независимых диагональных блоков, то каждую систему нормальных уравнений для различных начальных условий можно решать независимо.

Для получения ковариационной матрицы вектора  $\mathbf{g}$  исключим из системы (2.3.4.2) вектор  $\mathbf{w}$ , тогда

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}] \mathbf{g} - \\ & - \mathbf{A}^T \mathbf{P} [\mathbf{I} - \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{I}] = 0, \end{aligned} \quad (2.3.4.7)$$

откуда

$$\mathbf{K}_g = \sigma^2 [\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}]^{-1}. \quad (2.3.4.8)$$

Нетрудно доказать, что значения вектора  $\mathbf{g}$ , полученные по формулам (2.3.4.6) и (2.3.4.7), идентичны. Однако матрица  $(\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1}$  в формуле (2.3.4.7) остается неизвестной, а в

качестве результата уравнивания КГС для дальнейшего использования обычно выдается ковариационная матрица (2.3.4.5). Поэтому выражение (2.3.4.8) с помощью формулы Фробениуса приведем к виду

$$\mathbf{K}_g = \sigma^2(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1} + (\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K}_w\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}. \quad (2.3.4.9)$$

По формуле (2.3.4.9) матрица  $\mathbf{K}_g$  может оцениваться по результатам уравнивания КГС.

При решении навигационных задач вектор  $\mathbf{g}$  определяется, как правило, по новым траекторным измерениям, не вошедшим в уравнивание КГС. В этом случае дисперсия единицы веса  $\sigma^2$  и весовая матрица  $\mathbf{P}$  в формуле (2.3.4.9) соответствуют новой совокупности измерений, но в обоих случаях требуется вычисление матриц  $\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{B}$ . Если вместо  $\mathbf{K}_w$  известна матрица  $\mathbf{B}^T\mathbf{G}\mathbf{B}$ , то может оказаться полезной формула

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{B}(\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{B}[\mathbf{B}^T\mathbf{G}\mathbf{B} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{B}]\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{A}.$$

Так как при решении краевой задачи одной дуги, как правило, используется только часть пунктов КГС, то громоздкость последних двух формул не играет значительной роли. Формула (2.3.4.9) может быть реализована более экономично, если использовать вспомогательную программу, позволяющую извлекать из матрицы  $\mathbf{K}_w$  только ту часть, которая относится к пунктам данной дуги.

Таким образом решается первая часть задачи, результатами которой являются начальные условия в момент  $t_0$  в виде вектора

$$\mathbf{q} = [x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0]^T$$

инерциальных прямоугольных координат и составляющих скорости ИСЗ или вектора

$$\mathbf{E}_0 = [a_0, e_0, i_0, M_0, \omega_0, \Omega_0]^T$$

элементов орбиты с ковариационными матрицами  $\mathbf{K}_{q_0}$  или  $\mathbf{K}_{E_0}$  соответственно. Координаты и скорость спутника на момент  $t$  получаются в результате численного или аналитического интегрирования. Поэтому в зависимости от вида начальных условий и использованного метода интегрирования при оценке точности положения и скорости ИСЗ могут встретиться следующие случаи.

1. Начальные условия заданы вектором  $\mathbf{q}_0$ , используется численное или аналитическое интегрирование уравнений движения ИСЗ.

Если  $\mathbf{q}$  – вектор координат и скорости спутника на момент  $t$ , то их ковариационная матрица получается в виде

$$\mathbf{K}_q = \left[ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}_0} \right] \mathbf{K}_{q_0} \left[ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}} \right]^T + \mathbf{K}_{int} + \mathbf{K}_{GPZ}, \quad (2.3.4.10)$$

где  $[\partial \mathbf{q} / \partial \mathbf{q}_0]$  – матрица изохронных производных (2.3.2.5) от текущих координат по начальным условиям может быть получена либо численным, либо аналитическим путем.  $\mathbf{K}_{int}$  – матрица ошибок интегрирования, пропорциональная промежутку времени  $t - t_0$ , может быть определена в результате прямого и обратного интегрирования или сравнения результатов численного интегрирования дифференциальных уравнений задачи двух тел с эталонной орбитой (в случае аналитического интегрирования в центральном поле  $\mathbf{K}_{int} = \mathbf{0}$ );  $\mathbf{K}_{GPZ}$  – матрица влияния ошибок модели ГПЗ, которая зависит в основном от длины дуги и высоты орбиты и может вычисляться с помощью производных из формулы (2.3.3.5). При анализе ошибок координат и скорости ИСЗ удобнее пользоваться не инерциальной, а орбитальной системой координат, оси которой направлены соответственно вдоль радиуса-вектора ИСЗ, перпендикулярно к нему в плоскости орбиты по направлению движения ИСЗ и по бинормали к первым двум векторам так, чтобы полученная система была правой. Направляющие косинусы осей этой системы относительно осей инерциаль-

ной системы координат выражаются векторами (1.4.1). При точных расчетах полученная численным методом ковариационная матрица  $\mathbf{K}_q$  перевычисляется в орбитальную систему по формуле

$$\mathbf{K}_{qr} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{V} & \mathbf{W} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U} & \mathbf{V} & \mathbf{W} \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_q \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{V} & \mathbf{W} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U} & \mathbf{V} & \mathbf{W} \end{bmatrix}.$$

2. Для приближенного анализа может использоваться кеплерова орбита с вектором элементов  $\mathbf{E} = [a, e, i, M, \omega, \Omega]^T$ . В этом случае предварительно вычислять матрицу (2.3.4.10) не требуется, и матрица  $\mathbf{K}_{er}$  может быть получена аналитически непосредственно по матрице  $\mathbf{K}_{er0}$ , что дает наиболее наглядные результаты для теоретических обобщений.

При дифференциальном уточнении кеплеровой орбиты используются формулы [61]

$$\Delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial i} \Delta i + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial M_0} \Delta M_0 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega} \Delta \omega + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Omega} \Delta \Omega, \quad (2.3.4.11)$$

где  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} = (\mathbf{R}_a \mathbf{U} + \mathbf{V}_a \mathbf{V}) / a$ ;  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial e} = \mathbf{R}_e \mathbf{U} + \mathbf{V}_e \mathbf{V}$ ;  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial i} = r \sin u \mathbf{W}$ ;

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial M_0} = \mathbf{R}_m \mathbf{U} + \mathbf{V}_m \mathbf{V}; \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega} = r \mathbf{V}; \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Omega} = r \cos i \mathbf{V} - r \cos u \sin i \mathbf{W};$$

$$\mathbf{R}_a = r - n(t - t_0) \mathbf{R}_m \quad 3/2; \quad \mathbf{V}_a = -n(t - t_0) \mathbf{V}_m \quad 3/2; \quad \mathbf{R}_e = -a \xi / r;$$

$$\mathbf{V}_e = \frac{a\eta}{r} \left( 1 + \frac{r}{p} \right), \quad \mathbf{R}_m = \frac{a^2}{r} e \sin E; \quad \mathbf{V}_m = \frac{a^2}{r} \sqrt{1 - e^2};$$

$$p = a(1 - e^2); \quad \xi = a(\cos E - e); \quad \eta = a \sqrt{1 - e^2} \sin E;$$

$$\Delta \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial i} \Delta i + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial M_0} \Delta M_0 + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \omega} \Delta \omega + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \Omega} \Delta \Omega, \quad (2.3.4.12)$$

$$\text{где } \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial a} = (\dot{R}_a \mathbf{U} + \dot{V}_a \mathbf{V}) / a; \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial e} = \dot{R}_e \mathbf{U} + \dot{V}_e \mathbf{V};$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial i} = (\dot{r} \sin u + r \dot{\theta} \cos u) \mathbf{W}; \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial M_0} = \dot{R}_m \mathbf{U}; \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \omega} = -r \dot{\theta} \mathbf{U} + \dot{r} \mathbf{V};$$

$$\dot{R}_a = -\frac{\dot{r}}{2a} + \tau \frac{\mu}{ar^2}; \quad \dot{V}_a = -\frac{r \dot{\theta}}{2a}; \quad \dot{R}_e = -\frac{\mu \sin E}{nr^2},$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \Omega} = -r \dot{\theta} \cos i \mathbf{U} + \dot{r} \cos i \mathbf{V} + (r \dot{\theta} \sin u - \dot{r} \cos u) \sin i \mathbf{W};$$

$$\dot{V}_e = \frac{r \dot{\theta} \cos E}{1 - e^2}; \quad \dot{R}_m = -\frac{\mu}{nr^2}.$$

Объединив формулы (2.3.4.11) и (2.3.4.12), получим

$$\Delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{V} & \mathbf{W} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U} & \mathbf{V} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_a/a & R_e & 0 & R_m & 0 \\ V_a/a & V_e & 0 & V_m & r \\ 0 & 0 & r \sin u & 0 & 0 \\ \dot{R}_a/a & \dot{R}_e & 0 & \dot{R}_m & -r \dot{\theta} \\ \dot{V}_a/a & \dot{V}_e & 0 & 0 & \dot{r} \\ 0 & 0 & \dot{r} \sin u + r \dot{\theta} \cos u & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ r \cos i \\ -r \cos u \sin i \\ -r \dot{\theta} \cos i \\ \dot{r} \cos i \\ (r \dot{\theta} \sin u - \dot{r} \cos u) \sin i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta e \\ \Delta i \\ \Delta M_0 \\ \Delta \omega \\ \Delta \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{V} & \mathbf{W} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U} & \mathbf{V} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \mathbf{H} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta e \\ \Delta i \\ \Delta M_0 \\ \Delta \omega \\ \Delta \Omega \end{bmatrix}.$$

(2.3.4.13)

Для оценки точности инерциальных координат необходимо вычислить математическое ожидание произведения  $\Delta \mathbf{q} \Delta \mathbf{q}^T$ , получаем

$$K_q = \begin{bmatrix} U & V & W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U & V & W \end{bmatrix} \mathbf{H} K_{E_0} \mathbf{H}^T \begin{bmatrix} U & V & W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U & V & W \end{bmatrix}^T.$$

Умножив формулу (2.3.4.13) на матрицу  $\begin{bmatrix} U & V & W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U & V & W \end{bmatrix}^T$ ,

обозначив  $\tau = 3(t - t_0) / 2$  и принимая во внимание, что  $V_n \Delta M_0 + r \Delta \omega = r \Delta u$ , получим приращения в орбитальной системе координат

$$\begin{aligned} \Delta r &= (r - \tau \dot{r}) \frac{\Delta a}{a} - \frac{a \xi}{r} \Delta e + \frac{\dot{r}}{n} \Delta M_0; \\ r \Delta \theta &= -\tau \dot{\theta} \frac{\Delta a}{a} + \frac{a \eta}{r} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \Delta e + r \Delta u + r \cos i \Delta \Omega; \\ r \Delta \varphi &= r \sin u \Delta i - r \cos u \sin i \Delta \Omega; \\ \Delta \dot{r} &= \left( -\frac{\dot{r}}{2} + \tau \frac{\mu}{r^2} \right) \frac{\Delta a}{a} - \frac{\mu}{nr^2} \sin E \Delta e - \frac{\mu}{nr^2} \Delta M_0 - r \dot{\theta} \cos i \Delta \Omega; \\ r \Delta \dot{\theta} &= -\frac{r \dot{\theta}}{2} \frac{\Delta a}{a} + r \dot{\theta} \frac{\cos E}{1 - e^2} \Delta e + \dot{r} \Delta \omega + \dot{r} \cos i \Delta \Omega; \\ r \Delta \dot{\varphi} &= (\dot{r} \sin u + r \dot{\theta} \cos u) \Delta i + (r \dot{\theta} \sin u - \dot{r} \cos u) \sin i \Delta \Omega. \end{aligned} \tag{2.3.4.14}$$

Формулы (2.3.4.14) являются точными до производных высших порядков для кеплеровой орбиты. Для геодезических ИСЗ с малыми эксцентриситетами  $e$ , выражая  $\Delta \theta$ ,  $\Delta \varphi$ ,  $\Delta \dot{\theta}$ ,  $\Delta \dot{\varphi}$  в угловой мере, эти формулы можно переписать в упрощенном виде

$$\begin{aligned} \Delta r &= (1 - \tau_n e \sin E) \Delta a - a \cos E \Delta e + a e \sin E \Delta M_0; \\ \Delta \theta &= -\tau_n (1 + 2e \cos E) \Delta a / a + 2 \sin E \Delta e + \Delta u + \cos i \Delta \Omega; \\ \Delta \varphi &= \sin u \Delta i - \cos u \sin i \Delta \Omega; \\ \Delta \dot{r} &= n [\tau_n (1 + 2e \cos E) \Delta a - a (\sin E \Delta e + \Delta u + \cos i \Delta \Omega)]; \\ \Delta \dot{\theta} &= n (\cos E \Delta e - \Delta a / 2a); \\ \Delta \dot{\varphi} &= n (\cos u \Delta i + \sin u \sin i \Delta \Omega), \end{aligned} \tag{2.3.4.15}$$

где  $\tau_n = n \tau$ .

Оценка точности координат по радиусу-вектору, по нормали и бинормали к орбите теперь может выполняться по формуле

$$\mathbf{K}_{er} = \mathbf{N} \mathbf{K}_{E_0} \mathbf{N}^T.$$

При задании начальных условий в виде вектора  $\mathbf{q}_0$  и численном интегрировании уравнений движения ИСЗ от шага к шагу вычисление матриц  $[\partial \mathbf{q} / \partial \mathbf{q}_0]$  и  $\mathbf{K}_q$  весьма трудоемко, поэтому для приближенной оценки точности координат скорости ИСЗ может использоваться следующий метод.

Вначале выполняется переход от матрицы  $\mathbf{K}_{q_0}$  к матрице  $\mathbf{K}_{E_0}$  по формуле

$$\mathbf{K}_{E_0} = \left[ \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial \mathbf{q}_0} \right] \mathbf{K}_{q_0} \left[ \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial \mathbf{q}_0} \right]^{-1},$$

где  $\mathbf{S} = [\partial \mathbf{q}_0 / \partial \mathbf{E}_0]$  – матрица, элементы которой представлены в табл. 2.9, следовательно, матрица  $[\partial \mathbf{E}_0 / \partial \mathbf{q}_0] = \mathbf{S}^{-1}$

Далее задача оценки положения и скорости ИСЗ сводится к предыдущему случаю. Полученные формулы могут применяться как для решения теоретических задач космической геодезии, так и для оценки точности эфемерид навигационных ИСЗ.

Если после выполнения орбитального или динамического решения вычислить свободные члены уравнений поправок измерений уже с уточненной моделью КГС и (в случае динамического решения) с моделью ГПЗ, то получатся так называемые остаточные отклонения измеренных величин. Из анализа остаточных отклонений можно сделать выводы о качестве использованных в решении моделей. Если остаточные отклонения будут носить случайный характер, то принятые модели адекватны действующим в решении ошибкам. Если в остаточных отклонениях на орбите ИСЗ имеются долгопериодические и вековые изменения, то вероятно действие ошибок ГПЗ или таких негравитационных сил, как давление солнечного излучения или атмосферного торможения.

По характеру направления остаточных уклонений можно определить источник возмущения. Например, вековое понижение высоты орбиты указывает на воздействие неучтенной в модели движения ИСЗ части атмосферного торможения, а вековые и долгопериодические искажения в остаточных уклонениях вдоль и поперек орбиты свидетельствуют о недостаточной точности зональных гармоник ГПЗ и необходимости их дальнейшего уточнения и т. д.

Следовательно, остаточные уклонения измерений желательнее вычислять при орбите ИСЗ в орбитальной системе координат. Обычно это делают отдельно по каждому виду измерений, так как различные измерения несопоставимы по единицам измерений, по направлению и масштабу графического изображения. Свести все виды измерений возможно градиентным методом, учитывая то, что они все дают поверхности положения. Это позволяет проследить уклонения в движении ИСЗ на протяжении всей дуги, несмотря на то, что отдельные ее участки наблюдались различными измерительными средствами. Итак, для вычисления остаточных уклонений мы будем использовать градиентный метод с разложением полного уклонения по осям орбитальной системы координат.

Прежде всего вычислим градиенты наиболее широко применяемых в космической геодезии траекторных измерений: дальностей между ИСЗ и пунктом КГС, топоцентрических экваториальных координат, радиальной скорости и разностей координат между двумя положениями ИСЗ.

Градиент некоторой функции  $f(x, y, z)$  в данной точке определяет вектор изменения функции при изменении координат на 1 м, модуль которого вычисляется по формуле

$$|\text{grad}f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}, \quad (2.3.4.16)$$

а направляющие косинусы по формуле

$$G = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} \right) / |\text{grad}f|. \quad (2.3.4.17)$$

В табл. 2.10  $\Delta x = x - X$ ;  $\Delta y = y - Y$ ;  $\Delta z = z - Z$ ;  $x, y, z$  – координаты ИСЗ,  $X, Y, Z$  – координаты пункта КГС;  
 $s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ ;  $\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ ;  $\varphi$  – угол между двумя положениями ИСЗ при пункте КГС.

Т а б л и ц а 2.10

### Градиенты $\rho$ , $\gamma$ , $\delta$ , $\dot{\rho}$ , $\Delta\rho$

Вид измерения	$\partial f / \partial x$	$\partial f / \partial y$	$\partial f / \partial z$	$ \text{grad}f $
$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$	$\frac{\Delta x}{\rho}$	$\frac{\Delta y}{\rho}$	$\frac{\Delta z}{\rho}$	1
$\gamma = \text{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x}$	$-\frac{\Delta y}{s^2}$	$\frac{\Delta x}{s^2}$	0	$\frac{1}{s}$
$\delta = \text{arctg} \frac{\Delta z}{s}$	$-\frac{\Delta x \Delta z}{s\rho^2}$	$-\frac{\Delta y \Delta z}{s\rho^2}$	$\frac{s}{\rho^2}$	$\frac{1}{\rho}$
$\dot{\rho} = \frac{\dot{x}\Delta x + \dot{y}\Delta y + \dot{z}\Delta z}{\rho}$	$\frac{\dot{x}\rho - \Delta x\dot{\rho}}{\rho^2}$	$\frac{\dot{y}\rho - \Delta y\dot{\rho}}{\rho^2}$	$\frac{\dot{z}\rho - \Delta z\dot{\rho}}{\rho^2}$	$\frac{\sqrt{\dot{s}^2 - \dot{\rho}^2}}{\rho}$
$\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$	$\frac{\Delta x_2}{\rho_2} - \frac{\Delta x_1}{\rho_1}$	$\frac{\Delta y_2}{\rho_2} - \frac{\Delta y_1}{\rho_1}$	$\frac{\Delta z_2}{\rho_2} - \frac{\Delta z_1}{\rho_1}$	$2 \sin \frac{\varphi}{2}$

Если обозначить остаточное уклонение  $l$ , то ему соответствует новая поверхность положения на конце вектора градиента, исходящего из данной точки и модуль которого определяется формулой

$$\Delta f = l / |\text{grad}f|. \quad (2.3.4.18)$$

Составляющие величины (2.3.4.18) по осям орбитальной системы координат определяются по формулам

$$\Delta f_U = \Delta f \cos(GU) = \frac{l}{|\text{grad}f|^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} U_x + \frac{\partial f}{\partial y} U_y + \frac{\partial f}{\partial z} U_z \right);$$

$$\Delta f_v = \Delta f \cos(GV) = \frac{l}{|\text{grad}f|^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} V_x + \frac{\partial f}{\partial y} V_y + \frac{\partial f}{\partial z} V_z \right); \quad (2.3.4.19)$$

$$\Delta f_w = \Delta f \cos(GW) = \frac{l}{|\text{grad}f|^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} W_x + \frac{\partial f}{\partial y} W_y + \frac{\partial f}{\partial z} W_z \right),$$

где (GU), (GV), (GW) – углы между соответствующими векторами.

Подставив значения производных и градиентов из табл. 2.10 в формулы (2.3.4.19), найдем составляющие остаточных уклонений в координатной форме для всех видов измерений:

– для дальности

$$\Delta \rho_U = l_p (\Delta x U_x + \Delta y U_y + \Delta z U_z) / \rho;$$

$$\Delta \rho_v = l_p (\Delta x V_x + \Delta y V_y + \Delta z V_z) / \rho;$$

$$\Delta \rho_w = l_p (\Delta x W_x + \Delta y W_y + \Delta z W_z) / \rho,$$

– для топоцентрических экваториальных координат

$$\Delta \gamma_U = l_\gamma (-\Delta y U_x + \Delta x U_y);$$

$$\Delta \gamma_v = l_\gamma (-\Delta y V_x + \Delta x V_y);$$

$$\Delta \gamma_w = l_\gamma (-\Delta y W_x + \Delta x W_y);$$

$$\Delta \delta_U = l_\delta (-\Delta x t g \delta U_x - \Delta y t g \delta U_y + s U_z);$$

$$\Delta \delta_v = l_\delta (-\Delta x t g \delta V_x - \Delta y t g \delta V_y + s V_z);$$

$$\Delta \delta_w = l_\delta (-\Delta x t g \delta W_x - \Delta y t g \delta W_y + s W_z);$$

– для радиальной скорости

$$\Delta \dot{\rho}_U = l_p [(\dot{x}\rho - \Delta x \dot{\rho})U_x + (\dot{y}\rho - \Delta y \dot{\rho})U_y + (\dot{z}\rho - \Delta z \dot{\rho})U_z] / (\dot{s}^2 - \dot{\rho}^2);$$

$$\Delta \dot{\rho}_v = l_p [(\dot{x}\rho - \Delta x \dot{\rho})V_x + (\dot{y}\rho - \Delta y \dot{\rho})V_y + (\dot{z}\rho - \Delta z \dot{\rho})V_z] / (\dot{s}^2 - \dot{\rho}^2);$$

$$\Delta \dot{\rho}_w = l_p [(\dot{x}\rho - \Delta x \dot{\rho})W_x + (\dot{y}\rho - \Delta y \dot{\rho})W_y + (\dot{z}\rho - \Delta z \dot{\rho})W_z] / (\dot{s}^2 - \dot{\rho}^2);$$

– для разностей дальностей

$$\Delta\delta\rho_U = l_{\delta\rho} \left[ \left( \frac{\Delta x_2}{\rho_2} - \frac{\Delta x_1}{\rho_1} \right) U_x + \left( \frac{\Delta y_2}{\rho_2} - \frac{\Delta y_1}{\rho_1} \right) U_y + \left( \frac{\Delta z_2}{\rho_2} - \frac{\Delta z_1}{\rho_1} \right) U_z \right] / 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2};$$

$$\Delta\delta\rho_V = l_{\delta\rho} \left[ \left( \frac{\Delta x_2}{\rho_2} - \frac{\Delta x_1}{\rho_1} \right) V_x + \left( \frac{\Delta y_2}{\rho_2} - \frac{\Delta y_1}{\rho_1} \right) V_y + \left( \frac{\Delta z_2}{\rho_2} - \frac{\Delta z_1}{\rho_1} \right) V_z \right] / 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2};$$

$$\Delta\delta\rho_W = l_{\delta\rho} \left[ \left( \frac{\Delta x_2}{\rho_2} - \frac{\Delta x_1}{\rho_1} \right) W_x + \left( \frac{\Delta y_2}{\rho_2} - \frac{\Delta y_1}{\rho_1} \right) W_y + \left( \frac{\Delta z_2}{\rho_2} - \frac{\Delta z_1}{\rho_1} \right) W_z \right] / 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

где  $\varphi = \arccos \frac{\Delta x_1 \Delta x_2 + \Delta y_1 \Delta y_2 + \Delta z_1 \Delta z_2}{\rho_1 \rho_2}$ .

Вычисленные таким образом значения составляющих остаточных уклонений можно наносить на график по каждой из осей в вертикальном направлении, по горизонтальной оси можно откладывать отрезки, пропорциональные моментам наблюдений. Эти значения необязательно наносить на графики, они могут накапливаться в памяти компьютера или в файлах и затем подвергаться спектральному или Фурье-анализу для выявления закономерностей в остаточных уклонениях.

---

## 2.4. Навигационные методы определения координат пунктов

---

Навигационными в данной работе называются такие методы решения геодезических задач, которые используют наблюдения навигационных ИСЗ (НИСЗ) систем глобального определения положения GPS и ГЛОНАСС. Эти методы являются разновидностями орбитального метода, так как модель движения НИСЗ и геодезических постоянных в ходе решения навигационных задач не уточняется. Хотя эфемериды и другие данные, закладываемые на борт НИСЗ, постоянно меняются, их уточнение и расчет происходят за пределами решения навигационных задач.

К геодезическим задачам, которые могут быть решены навигационными методами, относятся:

- абсолютные и относительные определения координат фазовых центров антенн приемников навигационных сигналов;
- для движущихся объектов, кроме того, определение составляющих скорости движения объекта;
- нахождение геодезических азимутов и дирекционных углов между двумя антеннами;
- при наличии нормальных высот определение точечных значений высот квазигеоида, а при наличии высот квазигеоида, наоборот, – нормальных высот точек местности.

Существует несколько разновидностей навигационного метода. Кроме вышеупомянутых абсолютного и относительного методов, которые могут применяться как в режиме текущего времени (навигация), так и в стационарном режиме, известен дифференциальный метод, являющийся аналогом относительного. Для точных геодезических работ используются дифференциальный и относительный методы. Последнему посвящена вторая часть работы. В настоящем разделе рассматриваются дифференциальный метод определения координат пунктов, а также определение геодезических азимутов.

Особенностью навигационного метода является то, что наряду с измерением псевдодальностей между приемником и НИСЗ на тех же частотах одновременно передаются данные, позволяющие вычислить координаты фазового центра передающей антенны НИСЗ в любой текущий момент времени. Поэтому в абсолютном навигационном режиме фактически мгновенно определяются координаты и скорость приемника из линейной засечки по наблюдениям четырех НИСЗ (три координаты и поправка к шкале времени потребителя). Данные, закладываемые на борт НИСЗ включают поправки, синхронизирующие бортовую шкалу времени (ШВ) с атомным временем UTC, элементы орбиты данного НИСЗ, позволяющие рассчитать эфемериды спутника на заданный период времени, параметры ионосферной задержки и другие данные служебного характера.

Эти данные рассчитываются на главной наземной станции управления (ГСУ) и периодически закладываются на борт каждого НИСЗ. Структура этой информации и периодичность ее закладки рассматриваются в следующем подразделе. Расчет и подготовка закладываемых на борт данных осуществляются в результате обработки непрерывных автоматических наблюдений всех НИСЗ с контрольных станций (в штатном режиме их четыре и несколько запасных), которые передают эту информацию на ГСУ.

Как правило, закладываемые на борт НИСЗ данные рассчитываются на сутки вперед (интервал прогноза), некоторые данные рассчитываются на более длительный срок. Расчет этих данных выполняется на основе обработки измерительной информации за предыдущие 8 сут (интервал уточнения) орбитальным методом. Таким образом, интервалы уточнения и прогноза постепенно сдвигаются на сутки. Эта рутинная работа почти полностью автоматизирована, однако эпизодически требуется ввод новых данных об изменении солнечной активности (действующей на проводящие свойства ионосферы), о скачкообразном изменении ШВ UTC на 1 с и пр.

### 2.4.1. Информация, передаваемая с борта НИСЗ

Передача информации с борта НИСЗ осуществляется на двух частотах  $L_1 = 1575,2$  МГц и  $L_2 = 1227,6$  МГц, которые получаются при умножении базовой частоты бортового генератора  $f_0 = 10,23$  МГц на 154 и 120 соответственно. По каналу  $L_1$  передаются навигационные сигналы как С/А-кода (Clear Acquisition – легкообнаруживаемые), так и Р-кода (Protected – защищенные), а по каналу  $L_2$  – только один из них. Р-код получается при сложении частот двух генераторов  $x_1$  и  $x_2$  [39]

$$P_i(t) = x_1(t) \oplus x_{2i}(t) = x_1(t) \oplus x_2(t + n_{si} T),$$

где  $n_{si}$  – номер сдвига  $i$ -го спутника ( $0 \leq n \leq 36$ );  $T$  – длина элементарной посылки кода;  $t$  – текущее время;  $x_1(t)$  формирует псевдослучайную М-последовательность с 1,5-секундными метками времени, которые используются для формирования z-отсчета в течение недели ( $0 \div 403\ 199$ ).

Каждый спутник формирует свой отрезок полной последовательности  $P_i$  (всего – 37, длительностью 7 сут). В ночь с субботы на воскресенье код возвращается в исходное состояние и повторяется заново.

Дальномерный код Голда С/А-сигнала формирует М-последовательности, порождаемые полиномами

$$G_1(x) = 1 + x^3 + x^{10}; \quad G_2(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10}.$$

Код Голда получается сложением частот

$$X G_i(t) = G_1(t) \oplus G_{2i}(t) = G_1(t) \oplus G_2[t + M_i(10T)],$$

где  $M_i$  – число символов фазового сдвига  $i$ -го спутника;  $10T$  – длина одного символа кода Голда. Сигнал  $i$ -го спутника на частоте  $L_1$  имеет вид

$$S_{L1}(t) = A_p [X P_i(t) \oplus D_i(t)] \cos(\omega_1 t + \psi_i) + A_c [X G_i(t) \oplus \oplus D_i(t)] \sin(\omega_1 t + \psi_i),$$

где  $\psi_i$  – начальная фаза генератора спутника;  $D_i(t)$  – поток данных со скоростью 50 бит/с;  $XG_i(t)$  и  $P_i(t)$  – дальномерные коды C/A- и P-сигналов;  $XP_i(t)$  – засекреченный код P-сигнала;  $A_c$  и  $A_p$  – амплитуды сигналов C/A- и P-кодов соответственно.

Кадр навигационного сообщения занимает 30 с и содержит 1500 бит по 300 бит в пяти подкадрах. Полная информация о всех НИСЗ GPS занимает 25 кадров, передаваемых в течение 750 с. В настоящее время в GPS-приемниках НАВСТАР используется вторая модификация структуры и содержания навигационного сообщения НИСЗ. Первая модификация, опубликованная в 1979 году, более не применяется [48].

В каждом подкадре первое, второе и десятое слова содержат 22 информационных бита, 2 опорных или пустых и 6 проверочных битов. Во втором и десятом словах 29-й и 30-й биты равны нулю. Остальные слова имеют по 2-информационных бита и 6 проверочных. Первые два слова в каждом подкадре TLM (telemetry word) и HOW (handover word) формируются на борту НИСЗ, остальные 8 слов считываются из процессора, куда они были заложены наземной станцией подсистемы контроля и управления (ПКУ).

Слово TLM передается каждые 6 с и содержит 8 бит преамбулы (код Баркера), 14 бит телеметрического сообщения об ошибках при передаче данных на борт НИСЗ, 2 неинформационных бита и 6 проверочных бит. Если позиции  $9 \div 14$  в этом слове имеют код 01000, то данные безошибочны. Слово HOW содержит 17 бит z-отсчета, т. е. спутниковое время в момент начала следующего подкадра, 1 бит, указывающий на достоверность данных, 1 бит соответствия z-отсчета переднему фронту подкадра, 3 бита подкадровой идентификации, 2 запасных бита и 6 проверочных.

Кроме слов TLM и HOW, первый кадр содержит два запасных слова (третье и четвертое), восемь коэффициентов модели ионосферных искажений распространения радиосигнала ( $a_0, \dots, a_3; b_0, \dots, b_3$ ) и корректирующий параметр

$T_{GD}$ , предназначенные для потребителей с одночастотными приемниками (пятое – седьмое слова), слово о “возрасте” данных коррекции (AODC), опорное время  $t_{oc}$  и коэффициенты коррекции часов спутника ( $a_0, \dots, a_2$ ) (восьмое – десятое слова).

Во втором и третьем подкадрах передаются параметры орбиты спутника. В четвертом и пятом – информация о всех НИСЗ, их альманахи, параметры связи времени спутника с UTC и пр. Как было сказано выше, информация четвертого и пятого подкадров повторяется только через 750 с – столько времени требуется для передачи информации о всех спутниках.

Наборы данных первого – третьего подкадров (поправки часов и эфемериды) закладываются не реже 1 раза в сутки. Период обновления информации о параметрах модели ионосферной задержки – 10 сут, но при изменении интенсивности солнечного излучения может быть сокращен до 5 сут.

Передача первых трех подкадров в первые сутки после закладки данных имеет период около 1 ч (с такой периодичностью меняется содержание подкадров). Эти данные пригодны для использования в течение трех часов, т. е. период годности – 4 ч после начала передачи. В сутки 2-й – 14-й после закладки период обновления передаваемых данных – 4 ч с перекрытием 2 ч (период годности – 6 ч после начала передачи). Переход от одного набора данных к другим совпадает с целым часом в первые сутки и кратно 4 ч для остальных дней от начала недели. Максимальное число 1-часовых наборов – 29 для перехода к 4-часовой периодичности следующих суток.

Наборы данных четвертого и пятого подкадров обновляются через 6 сут и пригодны до конца седьмых суток от начала закладки.

Каждый вид данных имеет свой опорный момент времени  $t_{oc}$  (Clock) для поправки часов,  $t_{0E}$  (Ephemerides) для эфемерид,  $t_{0A}$  (Almanach) для альманаха и  $t_{0T}$  (Time) для сведения времени, приходящийся на середину интервала

действия этих данных.  $t_{0C} = 2$  ч (для первых суток) и 3 ч (для остальных суток),  $t_{0E} = 2$  ч и 3 ч,  $t_{0A} = 3,5$  сут,  $t_{0T} = 3,5$  сут от начала действия данных.

Передаваемые с борта данные используются в программах решения навигационных задач следующим образом. Проверка правильности каждого слова выполняется в результате контроля четности кода Хемминга с помощью шести проверочных бит в конце слова. Момент передачи сообщения с борта НИСЗ вычисляется по формуле

$$t = t_{SV} - \Delta t_{SV},$$

где  $t_{SV}$  – собственное время спутника;  $\Delta t_{SV} = a_0 + a_1 t_k + a_2 t_k^2 + \Delta t_R$ ;  $t_k = t - t_{0C}$  или  $t_k \approx t_{SV} - t_{0C}$ ; если  $t_k > 302\,400$  с  $t_k = t_k - 604\,800$  с; если  $t_k < -302\,400$  с,  $t_k = t_k + 604\,800$  с  
 релятивистский эффект  $\Delta t_R = C e_0 \sqrt{a} \sin E$ ;  $a$ ,  $e_0$  – большая полуось и эксцентриситет орбиты;  $E$  – эксцентрическая аномалия;  $c$  – скорость света;  $\mu$  – геоцентрическая гравитационная постоянная;

$$C = -2 \frac{\sqrt{\mu}}{c^2} = -4,442807633 \cdot 10^{-10} \frac{c}{\sqrt{\mu}}.$$

Для одночастотного потребителя  $(\Delta t_{SV})_{L1} = \Delta t_{SV} - T_{GD}$

или  $(\Delta t_{SV})_{L2} = \Delta t_{SV} - \left( \frac{f_1}{f_2} \right)^2 T_{GD}$ . Для альманаха использу-

ется более простая формула  $\Delta t_{SV} = a_0 + a_1 t_k$ , где  $t_k = t_{SV} - t_{0A}$   
 Связь ШВ GPS и UTC выражается формулой  $t_{UTC} = t_E - \Delta t_{UTC}$   
 где  $t_E$  – время GPS, исправленное за ионосферную задержку потребителем;  $\Delta t_{UTC} = \Delta t_{LS} + A_0 + A_1(t_E - t_{0T}) + 604\,800(WN - WN_T)$ ;  $WN$  – номер недели с ночи 5 января 1980 г., остальные данные берутся из четвертого подкадра. Цель этой поправки – учет скачкообразного изменения времени UTC на 1 с при его накоплении в начале очередного года.

По данным второго и третьего подкадров вычисляются

координаты фазового центра антенны спутника. Сначала вычисляется номинальное значение среднего движения

$n_0 = \sqrt{\mu / A^3}$ , где  $\mu = 3,986008 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$  – геоцентрическая гравитационная постоянная Земли, и его исправленное

значение  $n = n_0 + \Delta n$  (величины  $\sqrt{A}$  и  $\Delta n$  берутся из второго подкадра). Затем вычисляются средняя аномалия  $M = M_0 + nt_k$ ;  $t_k = t - t_{0E}$ , эксцентрическая аномалия из формулы Кеплера  $M = E - e \sin E$  и функции истинной

аномалии  $\sin \vartheta = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1-e \cos E}$ ;  $\cos \vartheta = \frac{\cos E - e}{1-e \cos E}$  (значения  $M_0$  и  $e$  берутся из второго подкадра).

Вычисляются аргумент широты  $\phi = \upsilon + \omega$  и поправки к аргументу широты  $\delta_u = C_{us} \sin 2\phi + C_{uc} \cos 2\phi$ ;

радиусу-вектору  $\delta_r = C_{rs} \cos 2\phi + C_{rc} \sin 2\phi$ ;

наклону орбиты  $\delta_i = C_{is} \cos \phi + C_{ic} \sin 2\phi$  (величина  $\omega$  и коэффициенты формул берутся из второго и третьего подкадров). По исправленным значениям элементов

$u = \phi + \delta_u$ ;  $i = i_0 + \delta_i$ ;  $r = A(1 - e \cos E) + \delta_r$ ;

$\Omega = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \omega_e)t_k - \omega_e t_{0E}$ ;  $\omega_e = 7,292115147 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}$  – средняя скорость вращения Земли, вычисляются координаты спутника в орбитальной системе координат  $\xi = r \cos u$ ;  $\eta = r \sin u$ , а затем в инерциальной системе координат

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \Omega - \eta \cos i \sin \Omega; \\ y &= \xi \sin \Omega + \eta \cos i \cos \Omega; \\ z &= \eta \sin i. \end{aligned}$$

За пределами интервала  $\pm t_{0E}$  ошибки координат НИСЗ резко возрастают.

Точность определения положения антенны потребителя абсолютным методом оценивается геометрическим фактором, который имеет следующие разновидности:

– по положению (Position Dilution of Precision)

$$\text{PDOP} = \frac{\sigma_p}{\sigma_r} = \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}}{\sigma_r};$$

– в плане (Horizontal Dilution of Precision)

$$\text{HDOP} = \frac{\sigma_H}{\sigma_r} = \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}{\sigma_r};$$

– по высоте (Vertical Dilution of Precision)

$$\text{VDOP} = \frac{\sigma_z}{\sigma_r};$$

– по поправке часов (Time Dilution of Precision)

$$\text{TDOP} = C \frac{\sigma_T}{\sigma_r}.$$

Ошибки по каждой составляющей вычисляются в результате умножения соответствующего фактора на ошибку расстояния НИСЗ – потребитель  $\sigma_r$ . PDOP = 1 при максимуме объема тетраэдра, образованного четырьмя спутниками и положением потребителя. Для выбора оптимального созвездия НИСЗ используется геометрический фактор

$$\text{GDOP} = \sqrt{\text{PDOP}^2 + \text{TDOP}^2} < 3 \div 4.$$

#### **2.4.2. Принципы измерения навигационного параметра**

С помощью радиотехнических траекторных наблюдений определяются параметры движения фазового центра антенны НИСЗ относительно фазового центра антенны приемника. Принятый приемником сигнал может быть записан в виде

$$s(t) = S(t) \cos[\omega t - \varphi(t) - \varphi_0],$$

где  $S(t)$  и  $\varphi(t)$  – амплитуда и фаза сигнала, являющиеся функциями времени  $t$  соответственно;  $\omega$  – круговая частота сигнала;  $\varphi_0$  – начальная фаза. Амплитуда сигнала, хотя и связана функционально с параметрами движения спутника, из-за различных приборных ошибок и искажений средой распространения мало пригодна для измерения параметров движения. Радиотехнические измерения дальности подразделяются на запросные и беззапросные методы. В запросном варианте с точки измерения посылается запросный сигнал, который отражается или усиливается и ретранслируется обратно. В последнем случае необходимо учитывать задержку за время ретрансляции в бортовой аппаратуре. Задержка сигнала в запросном методе без учета времени ретрансляции, которая определяется калибровкой, равна  $\tau = 2R/c$ , где  $R$  – расстояние от приемника до НИСЗ;  $c$  – скорость света, а в беззапросном режиме  $\tau = R/c$ . Так как в навигационной системе используется беззапросный метод измерения расстояний, принятый сигнал может быть записан в виде

$$s(t) = S\left(t - \frac{R}{c}\right) \cos\left[\omega_0\left(t - \frac{R}{c}\right) - \varphi_0\right].$$

Из этой формулы видно, что задержка сигнала в пути проявляется прежде всего в изменении фазы  $\varphi = \omega_0(t - R/c)$ . Следовательно, измеряя относительный фазовый сдвиг излучаемого и принимаемого высокочастотных колебаний, можно определить расстояние до объекта, на чем основан фазовый метод измерения дальности. Так как НИСЗ движется с определенными скоростью и ускорением, фазовый сдвиг принятого сигнала равен

$$\Delta\varphi = -\omega_0\left(\frac{R}{c} + \frac{\dot{R}}{c}t + \frac{\ddot{R}t^2}{c}\right).$$

В этом выражении первое слагаемое обусловлено начальным удалением объекта, второе – линейным изменением расстояния, третье – изменением расстояния по квадратичному закону.

Продифференцировав выражение для фазы по времени получим круговую частоту принимаемого сигнала

$$\omega = \dot{\varphi}(t) = \omega_0 \left( 1 - \frac{R}{c} - \frac{\dot{R}_0}{c} t \right).$$

Как следует из этой формулы, частота принимаемого сигнала отличается от частоты излучаемого сигнала  $f_0 = \omega_0/2\pi$  на величину

$$\Delta F = f_0 \left( \frac{\dot{R}}{c} + \frac{\ddot{R}}{c} t \right).$$

Первое слагаемое в последней формуле представляет собой постоянный по времени частотный сдвиг, называемый эффектом Допплера или доплеровским сдвигом частоты. Причиной эффекта Допплера является радиальное смещение источника радиоизлучения относительно приемной станции. Из этой формулы следует, что измерение сдвига частот позволяет определять радиальную скорость и ускорение движущегося радиоисточника.

Если сигнал промодулирован по амплитуде, дальность можно измерить по фазе не только несущей частоты, но и огибающей принимаемого сигнала. Особенно наглядно фазовый сдвиг огибающей проявляется в импульсном режиме работы радиотехнической аппаратуры. Кроме фазового, частотного и импульсного методов измерения дальности существует метод использования сигналов сложной формы, который применяется в навигационных системах.

Сложные сигналы формируются при частотной или фазовой модуляции сигнала. В процессе приема этого сигнала на выходе согласованного фильтра или коррелятора получается сжатие сигнала, увеличивающее его пиковую мощность в  $N$  раз, а амплитуду — в  $\sqrt{N}$  раз, где  $N$  — коэффициент сжатия длительности сигнала. Для фазовой модуляции применяется псевдослучайный код (например Баркера). Однако код Баркера не позволяет получать  $N > 13$ , поэтому в навигационных системах используется псевдослучайная фазовая модуляция,

выдающая сигналы  $M$ -последовательности,  $M = \log_2(N+1)$ . Диапазон однозначно определяемой дальности при этой

модуляции равен  $R_{\max} = N \frac{c \tau_c}{2}$ , где  $\tau_c$  – длительность высокочастотного импульса. Однако не существует сигнала, который позволял бы одновременно получать высокую точность, разрешающую способность и однозначность отсчета. Эта неоднозначность определяется функцией неопределенности  $\psi(\tau, F)$ .

### **2.4.3. Методы дифференциальных определений**

Режим дифференциальных навигационных определений призван повысить точность навигации в нештатных условиях нарушения работы ПКУ, обеспечить точность определения положения выше 10 м, а также повысить точность навигации с С/А-кодом. Для использования дифференциального режима (ДР) необходимо существование контрольной станции (КС), а также связь аппаратуры потребителя с КС. GPS с дифференциальной подсистемой получила название DGPS (Differential Global Positioning System).

Дифференциальным методом навигационно-временных определений называется определение вектора состояния (ВС – координаты, скорость, время) потребителя по результатам приема и обработки сигналов по крайней мере в двух разнесенных точках [64]. На одной из точек расположена аппаратура потребителя, на другой – также аппаратура потребителя более высокой точности, аппаратура выработки корректирующей информации (КИ) и формирования кадров КИ и передатчик для их сообщения потребителям. Совокупность средств, размещенных на второй точке, образует КС. Антенна КС имеет точную геодезическую привязку в системе WGS–84. Основанием для выработки КИ служит сравнение вектора состояния КС, полученного традиционным навигационным методом, и данных геоде-

зической привязки. Эта же разница затем приписывается вектору состояния потребителя.

При ДР и небольшом удалении потребителя от КС (до 100 км) исключаются сильнокоррелированные ошибки эфемерид, ухода шкал времени НИСЗ, влияния среды распространения радиоволн. Слабокоррелированные ошибки образуют остаточную погрешность определения вектора состояния. Существуют два вида дифференциального метода: с коррекцией определяемого вектора состояния и навигационного параметра (псевдодальности).

Первый вид используется в навигации для оперативного и точного определения вектора состояния. В этом случае уточненные координаты потребителя равны

$$X_n = X' + \Delta X; \quad Y_n = Y' + \Delta Y; \quad Z_n = Z' + \Delta Z,$$

где  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  – координаты потребителя, определенные по сигналам НИСЗ;  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  – коррекционные поправки, полученные от КС.

Так как и потребитель, и КС должны наблюдать одни и те же созвездия НИСЗ, этот вариант имеет пространственные и временные ограничения. Для корректирующей информации определены 16 типов кадров, аналогичных передаваемым с НИСЗ. Основной кадр содержит следующую информацию:

- дифференциальные поправки;
- скорость изменения дифференциальных поправок;
- параметры КС;
- фаза несущей для геодезических потребителей;
- работоспособность НИСЗ;
- данные по обеспечению временной синхронизации;
- альманах для радиомаяков;
- альманах для псевдоспутников;
- быстро меняющиеся дифференциальные поправки;
- дифференциальные поправки по Р-коду (резерв);
- $\Delta$ -поправки по С/А-коду на частотах  $f_1$  и  $f_2$ ;
- резерв (ASCII-код);
- не определены;
- резерв.

Идея метода коррекции навигационных параметров состоит в сообщении потребителю набора поправок к измерениям по всем НИСЗ, которые могут быть использованы потребителем. Здесь каждый выбирает наивыгоднейшее ему созвездие. На КС измеряются псевдодалности до всех НИСЗ, находящихся над ее радиогоризонтом, для них определяются корректирующие поправки и передаются потребителям.

Каждый потребитель корректирует свои измерения в соответствии с КИ и по ним решает навигационную задачу. В данном случае скорректированные измерения получаются по формуле

$$r(t) = \bar{r}(t) + \Delta r_0 + \Delta \dot{r}_0 (t - t_0),$$

где  $\bar{r}(t)$  – псевдодалность, измеренная потребителем в момент  $t$ ;  $\Delta r_0, \Delta \dot{r}_0$  – поправка псевдодалности и ее изменение в момент  $t_0$  на КС;  $t_0$  – модифицированный  $z$ -счет времени (0,6 с).

Этот вариант дифференциального метода пригоден и для высокоточных геодезических определений.

В настоящее время такие наблюдения можно получить с помощью сети Интернет от пунктов постоянно действующей сети ITRF (International Terrestrial Reference Frame – Международная сеть наземной привязки). Для использования этих наблюдений необходим специальный пакет программ GAMMIT.

#### **2.4.4. Методы относительных определений**

Относительный и дифференциальный методы сходны в том, что координаты как бы передаются от одного пункта на другой. Но здесь не требуется знания координат одной из станций – обе точки равноправны. Этот метод также имеет два варианта [39]. В первом варианте при

наблюдении одних и тех же НИСЗ в совпадающие моменты времени по разностям их координат можно определить проекции базовой линии на оси координат. Во втором - наблюдения обрабатываются совместно. Режим относительных определений может реализовываться с использованием принципа радиоинтерферометрии. В этом случае он в полной мере соответствует дифференциальному режиму с разностной коррекцией. Смещение ШВ и их дрейф включаются в состав определяемых параметров или исключаются при использовании разностных измерений.

Наиболее широко этот метод применяется при обработке фазовых или эквивалентных им измерений. Фаза  $j$ -го НИСЗ, принятая потребителем А в момент  $\tau$ , относительно фазы сигнала генератора аппаратуры потребителя может быть представлена в виде

$$\varphi_{Aj}(\tau) = \varphi_A(\tau_0) - \varphi_j(\tau_0) + 2\pi(f_A - f_j)(\tau - \tau_0) + \\ + \frac{2\pi f_j}{c} [R_{Aj}(\tau)] + \varphi_{iAj} + \varphi_{TAj},$$

где  $\varphi_A(\tau_0)$ ,  $\varphi_j(\tau_0)$  - фазы сигналов генераторов потребителя и  $j$ -го НИСЗ в момент  $\tau_0$ ;  $f_A$  и  $f_j$  - частоты соответствующих генераторов;  $R_{Aj}$  - расстояние от потребителя до  $j$ -го НИСЗ;  $\varphi_i$  и  $\varphi_T$  - приращения фазы, вызванные ионосферной и тропосферной рефракциями.

Если фазы измеряются одновременно в двух точках, их разность равна

$$\varphi_{ABj}(\tau) = \alpha_{AB} + 2\pi(f_A - f_B)(\tau - \tau_0) + \\ + \frac{2\pi f_j}{c} [R_{Aj}(\tau) - R_{Bj}(\tau)] + \varphi_{iABj} + \varphi_{TABj},$$

где  $\alpha_{AB} = \varphi_A(\tau_0) - \varphi_B(\tau_0)$  - начальное расхождение фаз генераторов потребителей А и В;  $\varphi_{iABj}$ ,  $\varphi_{TABj}$  - разности фаз, вызванные ионосферой и тропосферой.

Как видно из последнего выражения, здесь исключается

неопределенность из-за сдвига фаз генераторов НИСЗ и потребителя А, но появляются неизвестные  $\alpha_{AB}$  и  $f_A - f_B$

С учетом последнего выражения можно вычислить двойные разности j-го и k-го НИСЗ

$$\varphi_{ABjk} = \alpha_{ABjk} + \frac{f_j}{c} [R_{Bk}(\tau) - R_{Ak}(\tau) - R_{Bj}(\tau) + R_{Aj}(\tau)] + \\ + \varphi_{iABjk} + \varphi_{TABjk},$$

где  $\alpha_{ABjk} = \alpha_{ABk}(\tau) - \alpha_{ABj}(\tau)$ ;  $\varphi_{iABjk} = \varphi_{iAj} - \varphi_{iBj} - \varphi_{iAk} + \varphi_{iBk}$ ;

$\varphi_{TABjk} = \varphi_{TAj} - \varphi_{TBj} - \varphi_{TAk} + \varphi_{TBk}$ .

Здесь уже нет разности частот генераторов потребителей А и В. Неизвестными являются  $\alpha_{ABk}$  и координаты потребителей. Для моментов  $\tau_1$  и  $\tau_2$  можно образовать двойные разности фаз по времени

$$\varphi_{ABj}(\tau_1, \tau_2) = \varphi_{ABj}(\tau_2) - \varphi_{ABj}(\tau_1) = (f_B - f_A)(\tau_2 - \tau_1) + \\ + \varphi_{iABj}(\tau_1, \tau_2) + \varphi_{TABj}(\tau_1, \tau_2) + \frac{f_j}{c} [R_{Bj}(\tau_2) - R_{Bj}(\tau_1) - \\ - R_{Aj}(\tau_2) + R_{Aj}(\tau_1)].$$

С учетом последних двух равенств могут быть образованы третьи разности фаз

$$\varphi_{ABjk}(\tau_1, \tau_2) = \varphi_{ABjk}(\tau_2) - \varphi_{ABjk}(\tau_1) = \varphi_{ABk}(\tau_1, \tau_2) - \varphi_{ABj}(\tau_1).$$

Здесь неизвестными остаются только координаты потребителей А и В, но число измерений уменьшилось в четыре раза. Как видно из протокола обработки наблюдений аппаратуры Dimension фирмы Ashtech (см. раздел 4.3), для уточнения результатов окончательного решения используются как вторые, так и третьи разности. Погрешность  $\Delta D$  относительных определений зависит от точности знания эфемерид НИСЗ и определяется выражением

$\Delta D \approx D \Delta h / H$ , где  $D$  – длина базовой линии,  $H$  – высота орбиты НИСЗ,  $\Delta h$  – погрешность эфемерид НИСЗ. К базе 100 км экспериментально были получены следующие результаты 23 см за 0,5 ч, 6,2 см за 1 ч, 3,1 см за 1,5 ч, 1,9 см за 2 ч.

Измерение фаз сопровождается неоднозначностью. Один из способов раскрытия неоднозначности основан на использовании Р-кодов. Совокупность уравнений для фаз сигналов на частотах  $f_1$  и  $f_2$  диапазона  $L(\varphi_1$  и  $\varphi_2)$  и фаз наложенных на них Р-кодов ( $\varphi_{P1}$  и  $\varphi_{P2}$ ) с частотой  $f_p$  может быть представлена в виде

$$\begin{bmatrix} \varphi_{P1} \\ \varphi_{P2} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_p & f_p f_1^{-2} & 0 & 0 \\ f_p & f_p f_2^{-2} & 0 & 0 \\ f_1 & f_1^{-1} & -1 & 0 \\ f_2 & f_2^{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho + \tau \\ kE \\ n_1 \\ n_2 \end{bmatrix},$$

где  $\rho$  – задержка сигналов за удаление приемника от передатчика;  $\tau$  – расхождение их ШВ;  $E$  – электронная концентрация;  $k = 1,35 \cdot 10^{-9} \text{ см}^{-2}$  (электрон) $^{-1} \text{ с}^{-1}$ ;  $n_1$  и  $n_2$  – полное число циклов фаз на частотах  $f_1$  и  $f_2$ , соответствующее неопределенности фаз  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

При  $E = 2,8 \cdot 10^{18}$  после решения этого уравнения получаем

$$n_1 = -\varphi_1 + \frac{f_1^2 + f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \frac{f_1}{f_p} \varphi_{P1} - 2 \frac{f_1 f_2}{f_1^2 - f_2^2} \frac{f_2}{f_p} \varphi_{P2};$$

$$n_2 = -\varphi_2 + 2 \frac{f_1 f_2}{f_1^2 - f_2^2} \frac{f_1}{f_p} \varphi_{P1} - \frac{f_1^2 + f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \frac{f_2}{f_p} \varphi_{P2},$$

после подстановки значений  $f_1, f_2, f_p$  GPS

$$n_1 = -\varphi_1 + 630 \varphi_{P1} - 476 \varphi_{P2}; \quad n_2 = -\varphi_2 + 611 \varphi_{P1} - 491 \varphi_{P2}.$$

Другим подходом для раскрытия неоднозначности фазовых измерений является оценка целого числа циклов

фазы  $N_i$  с помощью совокупности фильтров Калмана. Результаты фильтрации умножаются на апостериорную плотность вероятности  $P(N_i/z_k)$ , которая получается методом Байеса. При  $N_i$  истинное  $P(N_i/z_k)$  стремится к единице, остальные  $P$  — к нулю. При  $i = 100$  и трех неизвестных ( $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ ) число фильтров Калмана достигает  $10^6$ , поэтому вначале  $N$  считают непрерывной величиной и включают в число неизвестных. Затем найденное значение  $N_i$  используется в уточнении проекций базовой линии.

# СОВМЕСТНОЕ УРАВНИВАНИЕ НАЗЕМНЫХ И КОСМИЧЕСКИХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Основными задачами создания глобальных космических геодезических сетей орбитальным и динамическим методами являются установление взаимных связей региональных наземных геодезических сетей, развиваемых в референцных системах координат, приведение их к мировой геоцентрической системе с началом в ЦМЗ и осями, направленными к Международному условному началу и к точке пересечения нулевого меридиана Международной службы времени со средним экватором. Эти задачи можно решить при совместном уравнивании КГС и общих пунктов региональных сетей. Однако при совместном уравнивании нескольких сетей возникают вопросы сохранения координат начала и направлений осей геоцентрической системы координат в суммарной сети и, вообще, проблемы исследования оптимальных условий отнесения начала координат глобальной сети к ЦМЗ. Исследованию этих вопросов посвящена данная глава.

---

### **3.1. Определение элементов взаимного трансформирования координат пунктов наземных и космических геодезических сетей**

---

Для определения элементов взаимного трансформирования (ЭВТ) необходимо, чтобы координаты одних и тех же пунктов были определены как в геоцентрической, так и в референцной системах координат. Тогда в качестве уравнений связи между ними используется формула (1.2.5). Линеаризируя формулу (1.2.5), получаем три уравнения поправок

$$\begin{bmatrix} X_r & 0 & Z_r & -Y_r & 1 & 0 & 0 \\ Y_r & -Z_r & 0 & X_r & 0 & 1 & 0 \\ Z_r & Y_r & -X_r & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_0 - X_r \\ Y_0 - Y_r \\ Z_0 - Z_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}, \quad (3.1.1)$$

где нижние индексы 0 и r относятся к общеземным и референсным координатам соответственно.

Если считать, что положения пунктов получены равномерно в каждой системе координат, то нормальные уравнения, соответствующие системам (3.1.1) всех общих пунктов, будут иметь вид

$$\begin{bmatrix} [X^2 + Y^2 + Z^2] & 0 & 0 & [X] & [Y] & [Z] \\ 0 & [Y^2 + Z^2] & -[XY] & 0 & -[Z][Y] & 0 \\ 0 & -[XY] & [X^2 + Z^2] & [Z] & 0 & -[X] \\ 0 & -[XZ] & -[YZ] & [X^2 + Y^2] & -[Y][X] & 0 \\ [X] & 0 & [Z] & -[Y] & n & 0 & 0 \\ [Y] & -[Z] & 0 & [X] & 0 & n & 0 \\ [Z] & [Y] & -[X] & 0 & 0 & 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [X\delta X + Y\delta Y + Z\delta Z] \\ [Y\delta Z - Z\delta Y] \\ [Z\delta X - X\delta Z] \\ [X\delta Y - Y\delta X] \\ [\delta X] \\ [\delta Y] \\ [\delta Z] \end{bmatrix}, \quad (3.1.2)$$

где  $\delta X = X_0 - X_r$ ;  $\delta Y = Y_0 - Y_r$ ;  $\delta Z = Z_0 - Z_r$  — свободные члены уравнений поправок.

Из решения полученных нормальных уравнений получаются семь параметров ЭВТ и их ковариационная матрица.

Аналогичные системы уравнений поправок и нормальных уравнений можно получить в геодезической системе координат при использовании уравнений связей (1.6.5), в которых, кроме ЭВТ, учитываются поправки в большую полуось и эксцентриситет референц-эллипсоида. Так как в этих уравнениях коэффициенты при поправках в большую полуось и масштаб равны, то такая система не решается — пришлось бы определять их совместно. Однако в нашей задаче параметры общеземного и референц-эллипсоида считаются известными, поэтому члены, содержащие параметры эллипсоидов, включаются в свободные члены уравнений. Итак, в геодезической системе координат уравнения поправок будут иметь вид

$$\begin{bmatrix} -N e^2 \sin B \cos B & \left( \frac{a^2}{N} + H \right) \sin L \\ 0 & -(N + H - N e^2) \sin B \cos L \\ a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} + H & N e^2 \sin B \cos B \sin L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\left( \frac{a^2}{N} + H \right) \cos L & 0 & -\sin B \cos L - \sin B \sin L \cos B \\ -(N + H - N e^2) \sin B \sin L & (N + H) \cos B - \sin L & \cos L & 0 \\ -N e^2 \sin B \cos B \cos L & 0 & \cos B \cos L & \cos B \sin L & \sin B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} (B_0 - B_r)(M + H) - N e^2 \sin B \cos B \frac{da}{a} - \left( N + \frac{M}{1 - e^2} \right) \sin B \cos B \frac{de^2}{2} \\ (L_0 - L_r)(N + H) \cos B \\ H_0 - H_r + \frac{a}{N} da - N \sin^2 B \frac{de^2}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.1.3)$$

где  $da = a_0 - a_r$ ;  $de^2 = e_0^2 - e_r^2$ .

Формулы (3.1.3) позволяют определять ЭВТ без высотной составляющей, когда неизвестны референцная система высот или высоты квазигеоида, для чего надо лишь исключить третье уравнение.

Как видно из системы нормальных уравнений (3.1.2) масштаб и угловые параметры связаны друг с другом только через поправки к началу координат. Если общие пункты будут распределены равномерно по поверхности Земли, то  $[X] = [Y] = [Z] = 0$ , и все параметры будут независимы между собой.

Равномерное распределение пунктов по поверхности Земли возможно лишь при небольшом их числе, если они расположены в вершинах правильных многогранников, так называемых “идеальных тел Платона”. Такими многогранниками являются:

- тетраэдр с четырьмя вершинами и гранями в виде равносторонних треугольников (правильная пирамида);

- гексаэдр с восемью вершинами и шестью гранями в виде квадратов (куб);

- октаэдр с шестью вершинами и восемью гранями в виде равносторонних треугольников (ромбовидная призма);

- додекаэдр с двадцатью вершинами и двенадцатью гранями в виде равносторонних пятиугольников;

- икосаэдр с двенадцатью вершинами и двадцатью гранями в виде равносторонних треугольников.

Как видно из этого перечня, наибольшее число равномерно расположенных пунктов возможно у додекаэдра.

Необходимость равномерно распределенных данных возникает не только при создании КГС, аналогичная проблема существует и в гравиметрии. Например, при выводе модели геопотенциала по аномалиям силы тяжести требуется, чтобы были известны их средние значения на центрах стандартных трапеций одинаковой площади. В зависимости от степени и порядка разложения устанавливается площадь стандартной трапеции, сторона которой равна на экваторе  $\Delta B = \Delta L = 180^\circ / n$ , где  $n$  – степень разложения. Например,

для получения разложения до 36-й степени и порядка стандартные трапеции должны составлять  $5 \times 5^\circ$  на экваторе. По мере приближения к полюсам площади трапеций, ограниченных меридианами и параллелями, кратными  $5^\circ$ , будут постепенно уменьшаться, поэтому обычно по широте сохраняют стандартный размер трапеции, а по долготе его увеличивают таким образом, чтобы площадь трапеции была близка к стандартной и их число в поясе параллелей было целым.

Площадь поверхности эллипсоида равна

$$S = 4\pi ab = 4\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}, \text{ его объем } V = \frac{4}{3}\pi a^2 b. \text{ Если в}$$

разложении определяются все коэффициенты, включая  $C_{20}$ , то аномалии силы тяжести должны быть отнесены к сфере

равного объема, т. е.  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ , откуда радиус этой сферы

равен  $R = \sqrt[3]{a^2 b} = a \sqrt[3]{1 - e^2}$ , площадь  $S = 4\pi a^2 \sqrt[3]{1 - e^2}$ .  
Площадь трапеции на сфере, ограниченной меридианами и параллелями, равна  $\pi R^3$

$$P = \int_{L_1 B_1}^{L_2 B_2} \int_{L_1 B_1} MN \cos B dB dL = R^2 (L_2 - L_1)(\sin B_2 - \sin B_1),$$

а трапеции с нижним основанием на экваторе

$$P = R^2 \frac{180^\circ}{\rho^\circ} \sin \frac{180^\circ}{\rho^\circ}, \text{ где } \rho^\circ - \text{ радиан в градусах. Теперь,}$$

разделив общую площадь сферы на площадь стандартной трапеции, можно найти общее число трапеций  $N = S/P$ . Однако требование расположения в каждом поясе целого числа трапеций несколько уменьшает это число.

Число трапеций в каждом поясе можно вычислить следующим образом. Длина дуги параллели на широте  $B$  равна  $2\pi \cos B$ , следовательно, число трапеций на этой

широте равно  $n_i = \text{int}\left(\frac{2\pi}{g} \cos B\right)$ , где  $g$  — длина сторон

стандартной трапеции на экваторе в радианах,  $\text{int}$  обозначает целую часть выражения в скобках. Тогда разность

$$\text{долгот восточной и западной границ трапеции } \Delta L = \frac{2\pi \cos B}{n_i}$$

для данного пояса, где  $B$  — широта центра трапеции.

При равномерном расположении центров трапеций (или пунктов КГС) должны соблюдаться следующие соотношения. Так как направляющие косинусы любого направления от центра сферы к ее поверхности равны  $\cos B \cos L$ ,  $\cos B \sin L$ ;  $\sin B$ , то  $[\cos B \cos L] = [\cos B \sin L] = [\sin B] = 0$ . Кроме того, должно соблюдаться матричное равенство

$$\begin{bmatrix} [\cos^2 B \cos^2 L] & [\cos^2 B \sin L \cos L] & [\sin B \cos B \cos L] \\ [\cos^2 B \sin L \cos L] & [\cos^2 B \sin^2 L] & [\sin B \cos B \sin L] \\ [\sin B \cos B \cos L] & [\sin B \cos B \sin L] & [\sin^2 B] \end{bmatrix} = \frac{n}{3} \mathbf{E}, \quad (3.14)$$

где  $n$  — число всех трапеций (или пунктов),  $\mathbf{E}$  — единичная матрица.

Проверим соблюдение этих условий для трапеций от  $45 \times 45^\circ$  до  $0,5 \times 0,5^\circ$  с помощью программы, составленной по вышеприведенному алгоритму. Полученные результаты представлены в табл. 3.1. Из табл. 3.1 видно, что принцип равных площадей обеспечивает достаточно высокую степень равномерности распределения гравиметрических данных по поверхности Земли, несмотря на некоторое увеличение ошибок округления по мере возрастания порядка разложения (вычисления велись с двойной точностью) и некоторое отличие  $[\sin^2 B]$  от остальных диагональных элементов матрицы.

В отличие от гравиметрических данных пункты КГС невозможно расположить на водной поверхности, которая занимает  $\sim 2/3$  земной поверхности, поэтому для пунктов КГС требуется дополнительный анализ, который будет дан

ниже. Там же будет рассмотрен смысл матрицы, привлекавшейся для анализа равномерности распределения гравиметрических данных по поверхности Земли.

Т а б л и ц а 3.1

**Характеристики равномерности распределения стандартных трапедий**

Размер трапедии, их число, степень	Суммы направляющих косинусов			Матрица		
	$[\cos B \cos L]$	$[\cos B \sin L]$	$[\sin B]$	$[\cos^2 B \sin L \cos L]$	$[\cos^2 B \sin L \cos L]$	$[\sin B \cos B \cos L]$ $[\cos^2 B \sin^2 L]$ $[\sin B \cos B \sin L]$
1	2	3	4	5	6	7
45 × 45° 22 4	-1,7·10 <sup>-14</sup>	5,6·10 <sup>-17</sup>	-4·10 <sup>-14</sup>	7,268	-7,8·10 <sup>-16</sup> 7,268	8,9·10 <sup>-17</sup> -4,1·10 <sup>-17</sup> 7,464
30 × 30° 48 6	-3,8·10 <sup>-14</sup>	0	-9,3·10 <sup>-14</sup>	15,897	1,1·10 <sup>-15</sup> 15,897	-2,3·10 <sup>-17</sup> -1,1·10 <sup>-16</sup> 16,206
15 × 15° 184 12	-1,5·10 <sup>-13</sup>	-6,1·10 <sup>-15</sup>	-1,5·10 <sup>-13</sup>	61,256	-1,4·10 <sup>-16</sup> 61,256	4·10 <sup>-16</sup> 6,3·10 <sup>-16</sup> 61,488
10 × 10° 416 18	-3,4·10 <sup>-13</sup>	5,4·10 <sup>-15</sup>	-5,6·10 <sup>-13</sup>	138,832	-1,6·10 <sup>-15</sup> 138,832	7,2·10 <sup>-17</sup> -3,4·10 <sup>-15</sup> 138,336
9 × 9° 510 20	-4,2·10 <sup>-13</sup>	1,4·10 <sup>-16</sup>	-1,1·10 <sup>-12</sup>	170,258	3,2·10 <sup>-15</sup> 170,258	1,5·10 <sup>-15</sup> -2,8·10 <sup>-15</sup> 169,485
6 × 6° 1148 30	-9,3·10 <sup>-13</sup>	-1,6·10 <sup>-14</sup>	-6,4·10 <sup>-15</sup>	382,268	1,3·10 <sup>-15</sup> 382,268	1,6·10 <sup>-15</sup> -3,3·10 <sup>-15</sup> 383,464
5 × 5° 1654 36	-1,3·10 <sup>-12</sup>	-2,4·10 <sup>-14</sup>	-1,7·10 <sup>-12</sup>	550,717	-10 <sup>-14</sup> 550,717	5,7·10 <sup>-15</sup> 2,7·10 <sup>-15</sup> 552,565

1	2	3	4	5	6	7
3 × 3° 4584 60	-3,8·10 <sup>-12</sup>	-9,3·10 <sup>-14</sup>	-4,4·10 <sup>-13</sup>	1527,825	2,9·10 <sup>-15</sup> 1527,825	-1,2·10 <sup>-14</sup> -2,8·10 <sup>-14</sup> 1528,351
2 × 2° 10 312 90	-8,5·10 <sup>-12</sup>	7,6·10 <sup>-14</sup>	-5,1·10 <sup>-13</sup>	3437,258	-2·10 <sup>-14</sup> 3437,258	-6,4·10 <sup>-13</sup> -2,7·10 <sup>-14</sup> 3437,483
1 × 1° 41 252 180	-3,4·10 <sup>-11</sup>	4,8·10 <sup>-14</sup>	-1,1·10 <sup>-11</sup>	13 750,511	3,2·10 <sup>-13</sup> 13 750,511	1,2·10 <sup>-14</sup> 3,5·10 <sup>-13</sup> 13 750,979
0,5 × 0,5° 165 018 360	-1,3·10 <sup>-10</sup>	2,2·10 <sup>-12</sup>	-1,6·10 <sup>-12</sup>	55 007,156	2,1·10 <sup>-13</sup> 55 007,156	7,7·10 <sup>-14</sup> -3,1·10 <sup>-13</sup> 55 003,687

Координаты пунктов в уравнениях (3.1.1) и (3.1.3) получаются с некоторыми ковариационными матрицами. Для вычисления свободных членов уравнений поправок координаты обеих сетей должны быть приведены к одному виду, например, к прямоугольным пространственным или геодезическим координатам. Для составления уравнений поправок (3.1.1) референсные координаты, например геодезические, должны быть перевычислены в пространственные декартовы с началом в центре референц-эллипсоида по формулам (1.6.2). Одновременно в ту же систему координат должны быть перевычислены ковариационные матрицы референсных координат по формуле

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{D}\mathbf{K}_{\text{BLH}}\mathbf{D}^T,$$

где матрица производных от декартовых координат по геодезическим равна

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -(M+H) \sin B \cos L & -(N+H) \cos B \sin L & \cos B \cos L \\ -(M+H) \sin B \sin L & (N+H) \cos B \cos L & \cos B \sin L \\ (M+H) \cos B & 0 & \sin B \end{bmatrix},$$

(3.1.5)

где  $M$ ,  $N$  — радиусы кривизны меридиана и первого вертикала.

Теперь весовая матрица для уравнений (3.1.1) будет равна

$$\mathbf{P} = \mu^2(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_R)^{-1},$$

где  $\mathbf{K}_0$  – ковариационная матрица общеземных координат,  $\mu^2$  – априорная дисперсия единицы веса.

Аналогично вычисляется весовая матрица для уравнений (3.1.3). В этом случае декартовы координаты перевычисляются в геодезические, их ковариационная матрица получается по формуле (3.1.4). Другой способ получения элементов трансформирования координат рассматривается в следующем разделе.

---

### **3.2. Совместное уравнивание космической и наземной геодезических сетей**

---

Целью совместного уравнивания космической и наземной геодезических сетей, создаваемых в различных системах координат, является получение уравненных координат пунктов каждой сети и элементов взаимного трансформирования координат пунктов сетей так, чтобы при этом принятые системы координат не изменились. При таком уравнивании взаимное положение пунктов КГС будет уточняться при сохранении начала координат и положения осей общеземной системы координат неизменными, а в наземной сети будут устранены региональные искажения в положениях пунктов. Желательна такая методика уравнивания, которая бы максимально учитывала сложившуюся технологию математической обработки измерений обширных геодезических сетей и основывалась на минимальном дополнительном математическом обеспечении.

Пусть системы уравнений поправок измерений в космической (КГС) и наземной геодезических сетях (НГС) имеют вид соответственно

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_2 - \mathbf{l}_1 &= \mathbf{v}_1, \mathbf{P}_1; \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{z}_2 + \mathbf{B}_3 \mathbf{z}_3 - \mathbf{l}_2 &= \mathbf{v}_2, \mathbf{P}_2, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

где  $\mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{l}_i$ ,  $\mathbf{P}_i$  ( $i = 1, 2$ ) – векторы поправок измеренных свободных членов и их весовые матрицы соответственно;  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{z}_2$  – векторы поправок координат общих пунктов,  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{z}_1$  – векторы поправок координат остальных пунктов сетей;  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  – матрицы коэффициентов при определяемых параметрах.

Пусть НГС уравнивается в геодезической референционной системе координат, а КГС – в общеземной геоцентрической прямоугольной. Тогда координаты общих пунктов НГС можно пересчитать в пространственную прямоугольную систему координат и составить систему условных уравнений

$$\mathbf{Dz}_2 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{Cw} - \Delta = \mathbf{0}, \quad (3.2.2)$$

где матрица дифференциального перехода от геодезических координат к прямоугольным с началом в центре референц-эллипсоида  $\mathbf{D}$  вычисляется для каждого пункта по формуле (3.1.5);  $\mathbf{z}_2$  – вектор поправок к геодезическим координатам пунктов НГС;  $\mathbf{u}_2$  – вектор поправок к геоцентрическим координатам пунктов КГС;  $\mathbf{w}$  – вектор ЭВТ координат НГС и КГС;  $\mathbf{C}$  – матрица коэффициентов при ЭВТ вида использованного в уравнении (3.1.1);  $\Delta = \mathbf{U}_0 - \mathbf{U}_N$  – вектор-разностей предварительных координат общих пунктов геоцентрической прямоугольной системе.

Для совместного решения систем уравнений (3.2.1) (3.2.2) составляем минимизируемую функцию Лагранжа-Гаусса

$$\Phi = \mathbf{v}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{k}^T (\mathbf{Dz}_2 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{Cw} - \Delta) = \min, \quad (3.2.3)$$

где  $\mathbf{k}$  – вектор неопределенных множителей Лагранжа (коррелат).

Функция  $\Phi$  приводит к решению параметрических уравнений с условиями между основными и дополнительными ( $\mathbf{w}$ ) неизвестными. Приравняв производные функции (3.2.3) по всем неизвестным векторам к нулю (правила матричного дифференцирования приведены в приложении 2), получим систему нормальных уравнений вида

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{21} & P_{22} & 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & P'_{33} & P'_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P'_{23} & P'_{22} & D^T & 0 \\ 0 & -E & 0 & D & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ z_3 \\ z_2 \\ k \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L'_3 \\ L'_2 \\ \Delta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2.4)$$

где  $P_{11} = A_1^T P_1 A_1$ ;  $P_{12} = A_1^T P_1 A_2$ ;  $P_{21} = P_{12}^T$ ;  $P_{22} = A_2^T P_1 A_2$ ;  
 $L_1 = A_1^T P_1 l_1$ ;  $L_2 = A_2^T P_1 l_1$ ;  $P'_{33} = B_3^T P_2 B_3$ ;  $P'_{32} = B_3^T P_2 B_2$ ;  
 $P'_{22} = B_2^T P_2 B_2$ ;  $L'_3 = B_3^T P_2 l_2$ ;  $L'_2 = B_2^T P_2 l_2$ ;  $P'_{23} = P'_{32}^T$ .

Необходимо иметь в виду, что весовые матрицы уравнений (3.2.1) должны быть приведены к единому масштабу, т. е. принятое при их вычислении априорное значение дисперсии единицы веса должно быть одинаковым для обеих сетей. Из системы (3.2.4) видно, что каждая сеть составляется и уравнивается в своей системе координат и только для составления условных уравнений координаты общих пунктов требуется приводить к одной системе координат — общеземной или референцной. Кроме того, следует учитывать, что после решения данных уравнений будут получены такие результаты, что для общих пунктов будут строго соблюдаться условия (3.2.2), т. е. координаты общих пунктов в обеих сетях будут точно пересчитываться друг в друга с помощью полученных ЭВТ. Проверка этих условий может служить контролем правильности решения данной системы нормальных уравнений.

Исключение из системы нормальных уравнений (3.2.4) блочным методом Гаусса параметров  $u$  и  $z$  приводит к преобразованной системе связующих нормальных уравнений

$$\begin{bmatrix} -G & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \mathbf{G} &= \overline{\mathbf{Q}}_{22} + \mathbf{D}\overline{\mathbf{Q}}'_{22}\mathbf{D}^T; \quad \overline{\mathbf{Q}}_{22} = \overline{\mathbf{P}}_{22}^{-1}; \quad \overline{\mathbf{Q}}'_{22} = (\overline{\mathbf{P}}'_{22})^{-1}; \\ \overline{\Delta} &= \Delta + \overline{\mathbf{u}}_2 - \mathbf{D}\overline{\mathbf{z}}_2 = (\mathbf{U}_0 + \overline{\mathbf{u}}_2) - (\mathbf{U}_R + \mathbf{D}\overline{\mathbf{z}}_2); \\ \overline{\mathbf{u}}_2 &= \overline{\mathbf{Q}}_{22}\overline{\mathbf{L}}_2; \quad \overline{\mathbf{z}}_2 = \overline{\mathbf{Q}}'_{22}\overline{\mathbf{L}}'_2; \quad \overline{\mathbf{P}}_{22} = \mathbf{P}_{22} - \mathbf{P}_{21}\mathbf{P}_{11}^{-1}\mathbf{P}_{12}; \\ \overline{\mathbf{L}}_2 &= \mathbf{L}_2 - \mathbf{P}_{21}\mathbf{P}_{11}^{-1}\mathbf{L}_1; \quad \overline{\mathbf{P}}'_{22} = \mathbf{P}'_{22} - \mathbf{P}'_{23}(\mathbf{P}'_{33})^{-1}\mathbf{P}'_{32}; \\ \overline{\mathbf{L}}'_2 &= \mathbf{L}'_2 - \mathbf{P}'_{23}(\mathbf{P}'_{33})^{-1}\mathbf{L}'_3. \end{aligned}$$

Как видно из системы уравнений (3.2.5), в данном случае используются результаты независимого уравнивания КГС и НГС:  $\mathbf{U}_0 + \overline{\mathbf{u}}_2$ ,  $\mathbf{U}_R + \mathbf{D}\overline{\mathbf{z}}_2$  и фрагменты обратных матриц  $\overline{\mathbf{Q}}_{22}$ ,  $\overline{\mathbf{Q}}'_{22}$ .

Из решения системы (3.2.5) получаются векторы коррелят и ЭВТ

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{w} - \overline{\Delta}); \\ \mathbf{w} &= (\mathbf{C}^T\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{G}^{-1}\overline{\Delta} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

с ковариационной матрицей

$$\mathbf{K}_{\mathbf{k},\mathbf{w}} = \mu^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} & \mathbf{Q}_{\mathbf{k}\mathbf{w}} \\ \mathbf{Q}_{\mathbf{w}\mathbf{k}} & \mathbf{Q}_{\mathbf{w}} \end{bmatrix}, \quad (3.2.7)$$

где  $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{C}^T\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{G}^{-1} - \mathbf{G}^{-1}$ ;  $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}\mathbf{w}} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{C}^T\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$ ;

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{w}} = (\mathbf{C}^T\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C})^{-1}; \quad \mu^2 = \frac{\overline{\mathbf{T}} + \overline{\mathbf{T}}' + (\mathbf{w}^T\mathbf{C}^T - \overline{\Delta}^T)\mathbf{k}}{(n-k)_1 + (n-k)_2 + r - k_w};$$

$$\overline{\mathbf{T}} = \mathbf{l}_1^T\mathbf{P}_1\mathbf{l}_1 - \mathbf{L}_1^T\mathbf{P}_{11}^{-1}\mathbf{L}_1 - \overline{\mathbf{L}}_2^T\overline{\mathbf{u}}_2;$$

$\overline{\mathbf{T}}' = \mathbf{l}_2^T\mathbf{P}_2\mathbf{l}_2 - \mathbf{L}_3^T(\mathbf{P}'_3)^{-1}\mathbf{L}'_3 - \overline{\mathbf{L}}_2'^T\overline{\mathbf{z}}_2$ ;  $(n-k)$  — число избыточных измерений в каждой сети;  $r$  — число условных уравнений;  $k_w$  — число ЭВТ.

Для получения окончательного решения нормальных уравнений каждой сети необходимо исправить их свобод-

ные члены при подстановке коррелят в общую систему нормальных уравнений (3.2.4)

$$\hat{\mathbf{L}}_2 = \mathbf{L}_2 + \mathbf{k}; \quad \hat{\mathbf{L}}'_2 = \mathbf{L}'_2 - \mathbf{D}^T \mathbf{k}$$

и повторить их решение. Как видно из предложенного алгоритма, решение общей системы нормальных уравнений удобно проводить групповым методом Пранис-Праневича, так как она распадается на частично зависимые три подсистемы.

После решения системы (3.2.4) ориентирование и параметры референц-эллипсоида могут измениться, поэтому рассмотрим две задачи, которые могут возникнуть при введении новой референцной системы координат. Первая задача состоит в выборе таких ЭВТ, чтобы сохранить координаты начального пункта Пулково неизменными и при этом привести оси и масштаб референцной системы координат к осям и масштабу общеземной системы. Вторая задача может состоять в сохранении неизменными прежних ЭВТ, если они были. Эта задача может возникнуть в случае, если прежние референчные координаты получили большие поправки систематического характера, приведшие к необходимости пересоставлять и переиздавать карты крупных масштабов.

При рассмотрении первой задачи необходимо иметь в виду, что приведение осей и масштаба референцной системы к осям и масштабу общеземной системы координат означает преобразование референчных координат за угловые и масштабные элементы трансформирования. Интуитивно ясно, что при этом, чтобы не изменились координаты начального пункта, начало координат необходимо перенести на него и затем выполнить необходимые преобразования. Поэтому запишем формулу (1.2.5) в виде

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_0 = (1 + m) \begin{bmatrix} 1 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 1 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_p + X_p \\ Y - Y_p + Y_p \\ Z - Z_p + Z_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + m) \begin{bmatrix} 1 & -\omega_z \omega_y \\ \omega_z & 1 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_p \\ Y - Y_p \\ Z - Z_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} m & -\omega_z \omega_y \\ \omega_z & m & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X' \\ \Delta Y' \\ \Delta Z' \end{bmatrix}, \quad (3.2.8)
\end{aligned}$$

где первые два слагаемых во второй строке представляют собой формулу преобразования референчных координат всех пунктов, а вторые два слагаемых – новые линейные элементы. Из формулы (3.2.8) видно, что при подстановке в нее координат начального пункта Пулково  $X_p, Y_p, Z_p$  его преобразованные координаты равны первичным непроброзованным.

Пользуясь этим обстоятельством, получение преобразованных референчных координат можно организовать следующим образом. Референчные координаты Пулково с помощью полученных из уравнивания семи элементов перевычисляются в геоцентрические. Разности геоцентрических и преобразованных референчных координат пункта Пулково будут новыми линейными элементами трансформирования. Используя их, можно вычислить преобразованные координаты остальных общих пунктов. Координаты остальных пунктов АГС можно получить из повторного уравнивания, считая общие с КГС пункты исходными.

Для решения второй задачи рассмотрим пример совместного уравнивания АГС и КГС при выводе Параметров Земли 1990 (ПЗ–90) года и результаты совместного уравнивания в 1995 году. В первом уравнивании геоцентрические координаты КГС были связаны с каталожными координатами пунктов АГС формулой

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_0 = (1 + m') \begin{bmatrix} 1 & -\omega'_z & \omega'_y \\ \omega'_z & 1 & -\omega'_x \\ -\omega'_y & \omega'_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{42} + \begin{bmatrix} \Delta X' \\ \Delta Y' \\ \Delta Z' \end{bmatrix}, \quad (3.2.9)$$

где ПЗ-90 равны  $m' = \omega'_x = 0$ ;  $\omega'_y = 0,35''$ ;

$\omega'_z = 0,66''$ ;  $\Delta X' = 25$  м;  $\Delta Y' = -141$  м;  $\Delta Z' = -80$  м.

При втором уравнивании те же геоцентрические координаты были связаны с референсными формулой

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_0 = (1 + m'') \begin{bmatrix} 1 & -\omega''_z & \omega''_y \\ \omega''_z & 1 & -\omega''_x \\ -\omega''_y & \omega''_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{95} + \begin{bmatrix} \Delta X'' \\ \Delta Y'' \\ \Delta Z'' \end{bmatrix}, \quad (3.2.10)$$

где после решения первой задачи угловые элементы и масштаб стали равными нулю, а  $\Delta X'' = 25,9$  м;  $\Delta Y'' = -130,94$  м;  $\Delta Z'' = -81,76$  м.

Так как левые части уравнений (3.2.9) и (3.2.10) равны, то приравняв их правые части, находим референчные координаты 1942 года

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{42} = \frac{1 + m''}{1 + m'} \begin{bmatrix} 1 & \omega'_z & -\omega'_y \\ -\omega'_z & 1 & \omega'_x \\ \omega'_y & -\omega'_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\omega''_z & \omega''_y \\ \omega''_z & 1 & -\omega''_x \\ -\omega''_y & \omega''_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{95} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \Delta X'' - \Delta X' \\ \Delta Y'' - \Delta Y' \\ \Delta Z'' - \Delta Z' \end{bmatrix} = (1 + m'' - m') \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & \omega'_z - \omega''_z & \omega''_y - \omega'_y \\ \omega''_z - \omega'_z & 1 & \omega'_x - \omega''_x \\ \omega'_y - \omega''_y & \omega''_x - \omega'_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{95} + \begin{bmatrix} \Delta X'' - \Delta X' \\ \Delta Y'' - \Delta Y' \\ \Delta Z'' - \Delta Z' \end{bmatrix} =$$

$$= (1 + \Delta m) \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\omega_z & \Delta\omega_y \\ \Delta\omega_z & 1 & -\Delta\omega_x \\ -\Delta\omega_y & \Delta\omega_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{95} + \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{bmatrix}, \quad (3.2.11)$$

где разности старых и новых элементов трансформирования равны

$\Delta m = \Delta\omega_x = 0$ ;  $\Delta\omega_y = -0,35''$ ;  $\Delta\omega_z = -0,66''$ ;  $\delta X = 0,9$  м;  
 $\delta Y = 10,06$  м;  $\delta Z = -1,76$  м.

При выводе формулы (3.2.11) исключены нелинейные члены, в том числе полученные в результате умножения разностей линейных элементов на угловые элементы — из-за их малости. Теперь преобразованные референсные координаты в Системе 1942 года должны перевычисляться в геоцентрическую систему координат с использованием элементов трансформирования ПЗ–90.

Что дает сохранение старых элементов трансформирования? Прежде всего отпадает необходимость пересоставлять и переиздавать большую часть карт крупных масштабов 1 : 10 000 — 1 : 50 000. Незначительно изменятся карты высот квазигеоида и уклонов отвесных линий, что позволит во многих случаях пользоваться их старыми изданиями. Наконец, не придется изменять многие программы геодезического назначения, например, в системах навигации. В то же время положительные качества нового уравнивания будут сохранены.

---

### **3.3. Анализ геоцентричности начала систем координат**

---

Положение начала одной системы координат относительно начала другой системы определяется из решения уравнений (3.1.1) и (3.1.2).

С другой стороны, положение начала координат относительно пунктов данной геодезической сети зависит от

радиусов-векторов этих пунктов, т. е. для каждого пункта можем написать уравнение связи в виде

$$R_i^2 = (X_i - X_0)^2 + (Y_i - Y_0)^2 + (Z_i - Z_0)^2, \quad (3.3.1)$$

где  $X_0, Y_0, Z_0$  – координаты начала, которые для общеземной системы принимаются равными нулю, а для референцной системы определяются из совместного уравнивания АГС и КГС.

Дифференцируя равенство (3.3.1) по координатам начала, получим уравнение поправок вида

$$\cos \Phi \cos L x_0 + \cos \Phi \sin L y_0 + \sin \Phi z_0 - (R_i - R_0) = v_R, \quad (3.3.2)$$

которое аналогично уравнению (2.2.1). Нормальные уравнения, соответствующие уравнениям (3.3.2), будут иметь вид

$$\begin{bmatrix} [\cos^2 \Phi \cos^2 L] & [\cos^2 \Phi \sin L \cos L] \\ [\cos^2 \Phi \sin L \cos L] & [\cos^2 \Phi \sin^2 L] \\ [\sin \Phi \cos \Phi \cos L] & [\sin \Phi \cos \Phi \sin L] \\ [\sin \Phi \cos \Phi \cos L] & \\ [\sin \Phi \cos \Phi \sin L] & \\ [\sin^2 \Phi] & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} - L_R = 0, \quad (3.3.3)$$

где  $L_R = \begin{bmatrix} [L_R \cos \Phi \cos L] \\ [L_R \cos \Phi \sin L] \\ [L_R \sin \Phi] \end{bmatrix}$ ;  $L_R = R_i - R_0$ ;  $\Phi, L$  – геоцен-

трическая широта и долгота пункта соответственно; квадратные скобки обозначают суммирование Гаусса.

Из решения полученной системы уравнений, считая координаты всех пунктов определенными равноточно, получаем координаты начала с ковариационной матрицей

$$K_0 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} = m^2 \begin{bmatrix} [\cos^2 \Phi \cos^2 L] \\ [\cos^2 \Phi \sin L \cos L] \\ [\sin \Phi \cos \Phi \cos L] \\ [\cos^2 \Phi \sin^2 L] \quad [\sin \Phi \cos \Phi \sin L] \\ [\sin \Phi \cos \Phi \sin L] \quad [\sin^2 \Phi] \end{bmatrix}^{-1}, \quad (3.3.4)$$

где  $m^2$  — дисперсия координат пунктов.

### 3.3.1. Исследование ковариационной матрицы ЦМЗ

Ковариационной матрице (3.3.4) соответствует эллипсоид ошибок координат ЦМЗ. С учетом формулы (1.2.5) можно было бы вывести более точное значение этой ковариационной матрицы, учитывающей все семь элементов трансформирования, но тогда ее анализ оказался бы очень сложным. Для качественной оценки отнесения начала координат к ЦМЗ формула (3.3.4), учитывающая только линейные элементы, вполне приемлема, так как остальные элементы трансформирования, как правило, малы и их влиянием в данном случае можно пренебречь. Кроме того, пункты КГС удалены друг от друга на сотни и тысячи километров, что позволяет, как это будет видно из дальнейшего анализа, уверенно их идентифицировать даже без учета исключенных элементов трансформирования.

Наличие ненулевых недиагональных элементов матрицы (3.3.4) свидетельствует о том, что главные оси эллипсоида ошибок не совпадают с осями координатной системы. Кроме того, эти элементы характеризуют корреляцию между парами координат

$$\rho_{xy} = \frac{q_{12}}{\sqrt{q_{11}q_{22}}}; \quad \rho_{xz} = \frac{q_{13}}{\sqrt{q_{11}q_{33}}}; \quad \rho_{yz} = \frac{q_{23}}{\sqrt{q_{22}q_{33}}}. \quad (3.3.1.1)$$

Если эллипсоид ошибок привести каким-либо методом к каноническому виду, т. е. сделать его оси параллельными осям координат, то полученные диагональные элементы будут равны квадратам его полуосей. Если при этом все полуоси будут равны между собой, это означает, что матрице (3.3.4) соответствует шар. В общем случае ей соответствует трехосный эллипсоид.

Как известно, вероятность попадания случайной величины в одномерный интервал  $\pm \sigma$  равна  $P = 0,683$ . Вероятность попадания в эллипс при той же вероятности по каждому измерению  $\pm \sigma_x, \pm \sigma_y$  равна  $P = 0,632$ . Эллипсоид ошибок характеризует область попадания в нее случайной величины с вероятностью  $P = 0,608$  при линейной вероятности 0,683 по каждому измерению  $\pm \sigma_x, \pm \sigma_y, \pm \sigma_z$ . Если умножить ковариационную матрицу  $K_0$  на направляющие косинусы произвольного направления, получим дисперсию по данному направлению [34]

$$\sigma^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{a}^T, \quad (3.3.1.2)$$

где  $\mathbf{a} = [\cos B \cos L \quad \cos B \sin L \quad \sin B]$  – вектор направляющих косинусов по направлению от центра эллипсоида в точку с широтой  $B$  и долготой  $L$ .

При анализе ковариационной матрицы ЦМЗ нас будут интересовать направления и длины главных полуосей эллипсоида ошибок. Для этого удобно применять метод вращения [57]. Ортогональные матрицы вращения вокруг осей  $Z, Y, X$  имеют вид

$$\mathbf{G}_Z = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_Y = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{G}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}.$$

Хотя матрицы вращения не позволяют привести эллипсоид ошибок к каноническому виду (только к трехдиагональному), они обладают полезными свойствами, необходимыми для нашего исследования.

Умножим эллипсоид ошибок слева на матрицу  $\mathbf{G}_z$ , а справа на ту же, но транспонированную матрицу  $\mathbf{G}_z^T$

$$\mathbf{G}_z \mathbf{K}_0 \mathbf{G}_z^T = \begin{bmatrix} q_{11} \cos^2 \alpha + 2q_{12} \sin \alpha \cos \alpha + q_{22} \sin^2 \alpha \\ (q_{22} - q_{11}) \sin \alpha \cos \alpha + q_{22} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ q_{13} \cos \alpha + q_{23} \sin \alpha \\ (q_{22} - q_{11}) \sin \alpha \cos \alpha + q_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ q_{11} \sin^2 \alpha - 2q_{12} \sin \alpha \cos \alpha + q_{22} \cos^2 \alpha \\ -q_{13} \sin \alpha + q_{23} \cos \alpha \\ q_{13} \cos \alpha + q_{23} \sin \alpha \\ -q_{13} \sin \alpha + q_{23} \cos \alpha \\ q_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.3.1.3)$$

В этой матрице ковариационный элемент между осями X и Y становится равным нулю, т. е.

$$(q_{22} - q_{11}) \sin \alpha \cos \alpha + q_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2q_{12}}{q_{11} - q_{22}}. \quad (3.3.1.4)$$

В зависимости от знака величин  $q_{11}$ ,  $q_{12}$  и  $q_{22}$  значение угла  $\alpha$  можно определить с помощью табл. 3.2 [1].

В результате выполненной операции ось x эллипсоида ошибок совмещается с плоскостью XOZ системы координат (рис. 3.1), и угол  $\alpha$  может интерпретироваться как долгота оси x. Если теперь полученный эллипсоид (3.3.1.3) преоб-

разовать аналогично за вращение на угол  $\beta$ , то ось  $x$  эллипсоида будет совмещена с осью  $X$  системы координат, а угол  $\beta$  можно интерпретировать как широту конца оси  $x$ .

Т а б л и ц а 3.2

	$q_{11} < q_{22}$	$q_{11} = q_{22}$	$q_{11} > q_{22}$
$q_{12} < 0$	$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2q_{12}}{q_{11} - q_{22}}$	$45^\circ$	$90^\circ + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2q_{12}}{q_{11} - q_{22}}$
$q_{12} = 0$	$0^\circ$	Любое	$90^\circ$
$q_{12} > 0$	$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2q_{12}}{q_{11} - q_{22}}$	$-45^\circ$	$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2q_{12}}{q_{11} - q_{22}} - 90^\circ$

При этом оси  $y$  и  $z$  эллипсоида будут совмещены с плоскостью  $YOZ$ , однако вращение вокруг оси  $X$  до их совмещения с соответствующими осями системы координат уже нельзя интерпретировать как одну из геодезических координат.

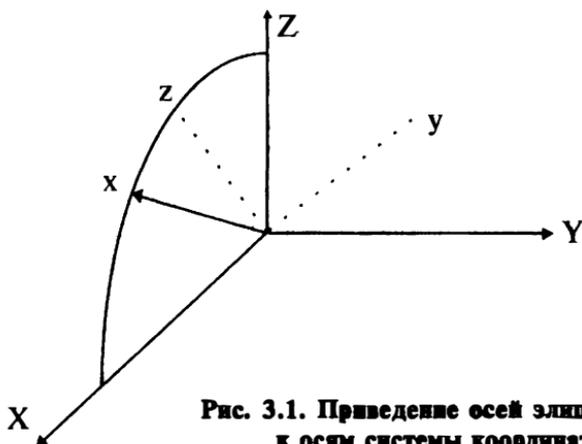


Рис. 3.1. Приведение осей эллипсоида к осям системы координат

Умножив исходный эллипсоид  $K_0$  на вектор направляющих косинусов  $a = [\cos\beta \cos\alpha \quad \cos\beta \sin\alpha \quad \sin\beta]$  в соответствии с формулой (3.3.1.2), найдем длину полуоси  $x$ . Из-за симметрии эллипсоида ошибок точка с координатами  $-\beta$ ,  $\alpha + 180^\circ$  будет иметь такую же длину полуоси.

Для иллюстрации полученных результатов и обоснования методов дальнейшего анализа ковариационной матрицы координат ЦМЗ рассмотрим пример сети GEM-6. Ковариационная матрица начала для данной сети, состоящей из 134 пунктов, получилась следующей

$$K_0 = m^2 \begin{bmatrix} 36,50 & -2,20 & 2,19 \\ -2,20 & 55,81 & -20,96 \\ 2,19 & -20,96 & 41,69 \end{bmatrix}^{-1} = m^2 \begin{bmatrix} 0,0275 & 0,0007 & -0,0011 \\ 0,0007 & 0,0221 & 0,0111 \\ -0,0011 & 0,0111 & 0,0296 \end{bmatrix},$$

где  $m^2$  – средняя дисперсия координат пунктов.

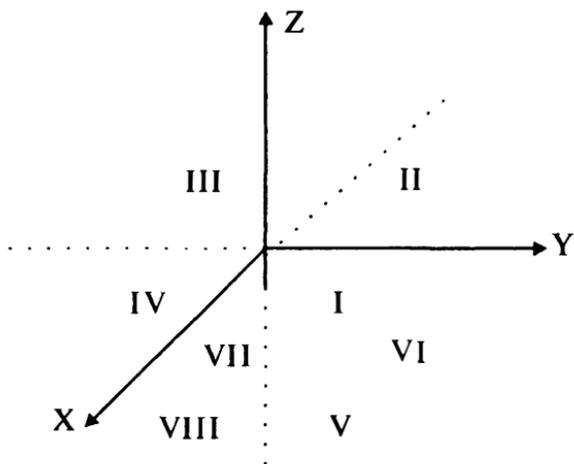
Коэффициенты корреляции между координатами равны  $\rho_{xy} = 0,03$ ;  $\rho_{xz} = -0,04$ ;  $\rho_{yz} = 0,43$ . При вычислении углов вращения по формуле (3.3.1.4) получим  $\beta = \Phi_u = 35,6^\circ$ ;  $\alpha = L_u = -83,7^\circ$ . Вычисление длины полуоси по данному направлению дало  $\sigma_x = 0,12m$ .

Для проверки правильности вычислений было выполнено вычисление длин полуосей по формуле (3.3.1.2) с изменением широт и долгот с шагом  $10^\circ$  в пределах от  $\Phi = 90^\circ \div -90^\circ$  и от  $L = 0^\circ \div 170^\circ$ . Оказалось, что при  $\Phi = 30^\circ$  и  $L = 90^\circ$  значение полуоси минимально. Дальнейшее уточнение координат до найденных по формуле (3.3.1.2) дало абсолютный минимум. Точка на территории США с координатами  $\Phi_u = 35,6^\circ$ ;  $L_u = 276,3^\circ$  оказалась полюсом с минимальной полуосью.

Анализ местоположения пунктов сети GEM-6 показал, что основная часть их расположена в III и IV четвертях (рис. 3.2), поэтому полученный результат является вполне ожидаемым.

Описанное выше сканирование поверхности эллипсоида ошибок показало также, что максимальная полуось имеет координаты  $\Phi_d = 54,4^\circ$ ;  $L_d = 96,3^\circ$ , т. е. широта этой точки является дополнением до  $90^\circ$  значения минимальной широты, а долгота отличается на  $180^\circ$ . Длина максимальной полуоси равна  $\sigma_z = 0,19m$ . Тогда третья ось должна располагаться в плоскости XOY и иметь координаты  $\Phi = 0^\circ$  и  $L = 186,3^\circ$ . Ее длина равна  $\sigma_y = 0,17m$ . Таким образом,

метод вращений позволяет однозначно определить координаты и длины главных полуосей эллипсоида ошибок.



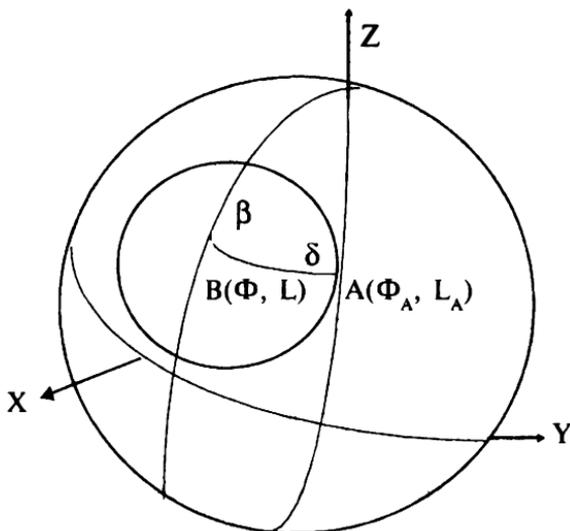
**Рис. 3.2. Пространственная декартова система координат**

При наличии в сети систематических ошибок, особенно типа масштабной поправки, наиболее вероятно, что смещение начала координат относительно ЦМЗ возможно в направлении малой полуоси эллипсоида ошибок, т. е. в направлении наибольшего скопления пунктов КГС, о чем свидетельствуют многочисленные исследования российских и зарубежных ученых [28, 69, 71, 80]. Следовательно, начало координат будет наилучшим образом совмещено с ЦМЗ, если эллипсоид ошибок вырождается в шар с равными главными полуосями и нулевыми коэффициентами корреляции между координатами.

Добиться этого можно двумя способами. Если в сеть добавляются новые пункты, то их надо располагать в направлении максимальной полуоси. Если большие полуоси становятся равными, пункты можно добавлять по два под прямым углом или по три под углом  $120^\circ$  в плоскости экватора эллипсоида ошибок. В этом случае равенство больших полуосей не нарушается и эллипсоид остается двухосным.

Для определения местоположения добавляемых пунктов можно использовать формулы для определения координат

точек круга, проведенного на сфере с произвольно заданным центром (рис. 3.3).



**Рис. 3.3. Вращение точки на сфере**

Пусть точка  $B$  с координатами  $\Phi, L$  является центром круга с текущей точкой  $A$  и координатами  $\Phi_A, L_A$ , дуга  $\delta$  является радиусом, угол  $\beta$  – азимутом текущего положения радиуса в системе координат  $XYZ$ . Тогда из сферического треугольника  $ABZ$  по теореме косинусов находим

$$\cos(90^\circ - \Phi_A) = \cos(90^\circ - \Phi) \cos \delta + \sin(90^\circ - \Phi) \sin \delta \cos \beta,$$

откуда

$$\sin \Phi_A = \sin \Phi \cos \delta + \cos \Phi \sin \delta \cos \beta. \quad (3.3.1.5)$$

Из треугольника  $ABZ$  по теореме синусов находим

$$\frac{\sin(90^\circ - \Phi_A)}{\sin \beta} = \frac{\sin \delta}{\sin(L_A - L)},$$

откуда

$$\cos \Phi_A \sin L_A \cos L - \cos \Phi_A \cos L_A \sin L = \sin \delta \sin \beta. \quad (3.3.1.6)$$

По формуле пяти элементов имеем

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \Phi_A) \cos(L_A - L) &= \\ &= \cos \delta \sin(90^\circ - \Phi) - \sin \delta \cos(90^\circ - \Phi) \cos \beta, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \cos \Phi_A \cos L_A \cos L + \cos \Phi_A \sin L_A \sin L &= \\ &= \cos \delta \cos \Phi - \sin \delta \sin \Phi \cos \beta. \end{aligned} \quad (3.3.1.7)$$

Умножив уравнение (3.3.1.6) на  $-\sin L$ , уравнение (3.3.1.7) на  $\cos L$  и сложив их, получаем

$$\begin{aligned} \cos \Phi_A \cos L_A &= \cos \delta \cos \Phi \cos L - \sin \delta (\sin \Phi \cos L \cos \beta + \\ &+ \sin L \sin \beta). \end{aligned} \quad (3.3.1.8)$$

Умножив уравнение (3.3.1.6) на  $\cos L$ , уравнение (3.3.1.7) на  $\sin L$  и сложив их, получаем

$$\begin{aligned} \cos \Phi_A \sin L_A &= \cos \delta \cos \Phi \sin L - \sin \delta (\sin \Phi \sin L \cos \beta - \\ &- \cos L \sin \beta). \end{aligned} \quad (3.3.1.9)$$

Присоединив к уравнениям (3.3.1.8) и (3.3.1.9) уравнение (3.3.1.5), получаем систему равенств

$$\begin{aligned} \cos \Phi_A \cos L_A &= \cos \delta \cos \Phi \cos L - \sin \delta (\sin \Phi \cos L \cos \beta + \\ &+ \sin L \sin \beta); \\ \cos \Phi_A \sin L_A &= \cos \delta \cos \Phi \sin L - \sin \delta (\sin \Phi \sin L \cos \beta - \\ &- \cos L \sin \beta); \end{aligned} \quad (3.3.1.10)$$

$$\sin \Phi_A = \cos \delta \sin \Phi + \sin \delta \cos \Phi \cos \beta,$$

из которой легко вычислить координаты точки окружности А.

В правых частях уравнений (3.3.1.10) величины являются постоянными, кроме угла  $\beta$ , поэтому при изменении азимута радиуса изменяются координаты  $\Phi_A$ ,  $L_A$ .

Если совместить центр круга с концом минимальной полуоси и принять  $\delta = 90^\circ$ , то можно получить координаты добавляемых пунктов при любых азимутах их радиусов.

Для обеспечения возможности выбора местоположения добавляемых пунктов координаты исследуемой окружности могут выдаваться на всем ее протяжении с определенным шагом. При добавлении новых пунктов повышается точность отнесения начала координат к ЦМЗ.

Второй способ состоит в исключении пунктов вблизи наименьшей полуоси. Для этого находят ближайший к концу малой оси эллипсоида ошибок пункт, например, по критерию  $(\Phi_i - \Phi_0)^2 + (L_i - L_0)^2 = \min$ , где  $\Phi_0, L_0$  — координаты конца малой оси эллипсоида;  $\Phi_i, L_i$  — координаты пунктов КГС. Направляющие косинусы ближайшего пункта вычитаются из ковариационной матрицы (3.3.4). После этого находят новое положение малой полуоси эллипсоида ошибок оставшихся пунктов и снова повторяют исключение ближайшего к концу малой полуоси пункта. Этот процесс может продолжаться, например, до выполнения критерия  $\rho_{ij} \leq 0,1$ . Дополнение сети новыми пунктами не всегда возможно как по геополитическим или экономическим соображениям, так и из-за ограниченности суши. При исключении пунктов обеспечивается равномерность их расположения, но увеличивается ошибка определения координат начала из-за общего уменьшения числа пунктов КГС. Поэтому ужесточение критерия  $\rho_{ij} \leq 0,1$  вряд ли целесообразно. Например, чтобы добиться выполнения этого критерия из сети GEM-6 пришлось исключить 49 пунктов. При этом ковариационная матрица начала координат стала равной

$$K_0 = m^2 \begin{bmatrix} 0,03350 & 0 \\ 0 & 0,0352 \ 0,0035 \\ 0 & 0,0035 \ 0,0382 \end{bmatrix}.$$

При  $m = 10$  м координаты начала определяются с ошибкой 1,2 — 1,9 м.

Сеть SAO-1, состоящая из 24 пунктов, вошедших в модель GEM-6, центрирована гораздо лучше и после исключения двух пунктов имеет ковариационную матрицу

$$\mathbf{K}_{\text{SAO}} = \text{m}^2 \begin{bmatrix} 0,1459 & -0,0005 & -0,0042 \\ -0,0005 & 0,1072 & 0,0074 \\ -0,0042 & 0,0074 & 0,1732 \end{bmatrix}$$

с коэффициентами корреляции  $\rho_{xy} = -0,004$ ;  $\rho_{xz} = -0,008$ ,  $\rho_{yz} = 0,054$ .

Координаты начала системы координат SAO-I определяются со средней квадратической ошибкой 3 – 4 м, и оно может быть смещено вдоль оси Z из-за заметного различия количества пунктов в северном и южном полушариях.

При решении задач небесной механики и, в частности космической геодезии, обычно в качестве постулата принимается, что масса небесного тела сосредоточена в центре его масс и его спутник в первом приближении движется по кеплеровой орбите с фокусом в центре масс. Весьма оригинальную теорию о возможном смещении точки приложения равнодействующих сил на ИСЗ от ЦМЗ разработали М. Бурша и М.И. Юркина в работе [11]. Это смещение точки приложения равнодействующих сил внутри притягивающего тела для системы Земля-Солнце составляет 30 см, для системы Луна-Земля – 140 м, для системы ИСЗ-Земля – 10 км и более в зависимости от высоты движения спутника.

Утверждается, что если Землю приближенно представить как сжатый эллипсоид вращения, то центр притяжения будет располагаться в меридиональной плоскости небесного тела и перемещаться внутри Земли вместе с небесным телом. Для определения координат точки приложения равнодействующих сил предлагается в разложение потенциала притяжения эллипсоида по сферическим функциям включать гармоники первой степени в качестве неизвестных. Причину смещения точки приложения равнодействующих сил авторы [11] видят в сжатии притягивающего эллипсоида. Если эта теория найдет подтверждение, то смещение точки приложения равнодействующих сил может оказаться одной из причин смещения начала координат КГС.

### 3.3.2. Построение космической геодезической сети по длинным и коротким орбитальным дугам

Одно из первых уравниваний КГС в Советском Союзе было выполнено в конце 70-х годов. По различным косвенным данным, в частности из сопоставления с гравиметрическими высотами квазигеоида, точность отнесения начала координат этой сети составляла 15 м. Предполагалось, что причиной такого смещения является совместное влияние неравномерного распределения пунктов по поверхности Земли и неточное знание значения геоцентрической гравитационной постоянной, задающей масштаб КГС,

$$\mu = n^2 a^3, \quad (3.3.2.1)$$

где  $n$  – среднее движение ИСЗ;  $a$  – большая полуось орбиты.

Дифференцируя выражение (3.3.2.1) по  $\mu$  и  $a$ , получаем

$$\frac{da}{a} = \frac{d\mu}{3\mu}. \quad (3.3.2.2)$$

Формула (3.3.2.2) определяет изменение масштаба КГС при изменении геоцентрической гравитационной постоянной.

На основе исследований К.К. Насретдинова, выполненных в начале 80-х годов и описанных в предыдущем разделе, была предложена следующая методика построения КГС, призванная устранить возможные смещения начала геоцентрической координатной системы. Во-первых, был выполнен анализ ковариационной матрицы (3.3.4) для пунктов КГС СССР. Так как 2/3 пунктов КГС оказались расположенными в I и II четвертях (рис. 3.2) и конец малой полуоси эллипсоида ошибок начала координат – чуть западнее Среднего Урала, то для выполнения критерия  $\rho_{ij} \leq 0,1$  пришлось исключить 1/3 пунктов КГС.

Во-вторых, был проведен анализ плотности распределения наблюдений на пятисуточных орбитальных дугах. Наибольшая плотность наблюдений снова оказалась в

регионах наибольшей скученности пунктов КГС. Избыток наблюдений, превышающий некоторую среднюю плотность в орбитальных дугах, также был исключен. По оставшимся пунктам и наблюдениям были составлены длинные пятисуточные орбитальные дуги, включающие равномерно распределенные по орбите наблюдения с равномерно расположенных по поверхности Земли пунктов КГС. Орбитальное решение, выполненное по этим дугам, закрепляло геоцентрическую систему координат.

Остальные наблюдения, исключенные из пятисуточных дуг, использовались для составления коротких дуг в несколько витков и менее. Часть пунктов была общей для длинных и коротких дуг, так как часть наблюдений была отнесена в те или другие дуги. Из публикаций, появившихся к тому времени в зарубежной литературе, было известно, что короткие дуги позволяют гораздо точнее определять взаимное положение пунктов КГС, так как возможные неточности модели движения ИСЗ в них значительно ослабляются из-за коротких интервалов интегрирования и уточнения.

Если бы нормальные уравнения коротких дуг просто складывались с нормальными уравнениями длинных дуг, то начало координат заняло бы некоторое средневесовое положение начал двух решений (по длинным и коротким дугам). Поэтому нормальные уравнения коротких дуг добавлялись к нормальным уравнениям длинных дуг с включением семи элементов трансформирования в качестве неизвестных. В этом случае взаимное положение пунктов КГС при совместном уравнивании уточняется, однако система координат, закрепленная решением по длинным дугам, остается неизменной. Эти вопросы исследовались К.К. Насретдиновым экспериментально и в настоящее время применяются при совместном уравнивании нескольких геодезических сетей.

Итак, основными элементами методики построения геоцентрической системы координат являются:

- выбор по возможности равномерно распределенной

совокупности пунктов из числа имеющихся пунктов КГС с помощью анализа ковариационной матрицы координат начала системы;

– выбор равномерно распределенных на длинных дугах сеансов наблюдений (в идеальном случае непрерывное наблюдение дуг на всем их протяжении);

– составление нормальных уравнений длинных орбитальных дуг;

– составление нормальных уравнений коротких орбитальных дуг с включением в качестве дополнительных неизвестных семи элементов трансформирования координат;

– сложение нормальных уравнений и их решение орбитальным или динамическим методом.

Данная методика была в полной мере реализована при выводе параметров Земли 1985 года (ПЗ–85). При выводе ПЗ–90 новый анализ ковариационной матрицы начала координат не выполнялся, хотя и были добавлены новые наблюдения.

Положение начала координат КГС относительно центра референц-эллипсоида Красовского, по советским и американским данным, приведено в табл. 3.2.

Т а б л и ц а 3.2

Система координат	Геоцентрические координаты, м		
	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$
ПЗ–85	26	– 139	– 84
ПЗ–90	25	– 141	– 80
ЦНИИГАиК–95	25,9	– 130,94	– 81,76
WGS–72	27	– 135	– 89
WGS–84	27	– 135	– 84,5

Отличие параметров ЦНИИГАиК–95 относительно других определений объясняется изменением ориентирования референц-эллипсоида Красовского в результате переруливания АГС в 1995 году. Американские определения 1972 и 1984 годов выполнялись по небольшому числу

пунктов ГГС СССР, участвовавших в международных спутниковых программах (Пулково, Рига, Ужгород и Николаев, возможно Симеиз). Кроме того, эти определения относились к КГС США. Неизвестно, предпринимались ли какие-либо меры американскими геодезистами для лучшего отнесения начала координат КГС к ЦМЗ. Однако из табл. 3.2 легко заметить хорошее согласие между практически одновременными определениями координат ЦМЗ от разных КГС при сравнении параметров ПЗ–85 и WGS–84. Остаточное несогласие по оси  $Y$  можно объяснить тем, что основная часть пунктов КГС СССР расположена в I и II четвертях, а КГС США в III и IV четвертях, т. е. противоположных концах оси  $Y$ . Видимо, координаты ЦМЗ занимают промежуточное положение между ними.

## Часть II

---

### Относительный метод космической геодезии

#### Глава 4

---

#### ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

---

##### 4.1. Первичная обработка результатов измерений и получение разностей координат в относительном методе

---

При относительном методе непосредственно измеряемыми величинами являются разности фаз несущей частоты между генераторами приемника и наблюдаемых НИСЗ. Как было показано в разделе 2.4, по относительному фазовому сдвигу принимаемого сигнала легко вычисляется псевдодальность до спутника. В относительном методе определяется разность координат между двумя пунктами, на которых были выполнены синхронные наблюдения одних и тех же НИСЗ. Поэтому этот метод пригоден только для сгущения геодезических сетей и не обеспечивает создание геоцентрической системы координат.

Получение разностей координат между пунктами осуществляется с помощью специального программного обеспечения фирмы-разработчика приемной аппаратуры. Исходными данными для обработки являются файлы, сформированные в приемной аппаратуре при выполнении наблюдений. Первый файл (в приемнике американской фирмы Ashtech В-файл) содержит фазовые измерения, “привязанные” к шкале времени, сведения о наблюдаемых спутниках и приемнике, а также о качестве выполненных измерений. Во втором файле (Е-файл) содержится

информация о параметрах наблюдавшихся НИСЗ. Наконец, третий файл (S-файл) содержит сведения о пункте стояния приемника. В результате кросскорреляционной совместной обработки данных с двух пунктов можно получить искомые разности координат в геоцентрической системе и их ковариационную матрицу. Эти данные первичной обработки непосредственных измерений фиксируются в соответствующих протоколах, которые используются для дальнейшей обработки и уравнивания геодезических сетей.

---

#### **4.2. Последовательность предварительных вычислений**

---

Предварительные вычисления выполняются в следующей последовательности.

1. Формирование рабочих файлов для уравнивания.
  2. Контроль качества измеренных разностей координат.
  2. Приведение к центрам пунктов разностей геоцентрических координат, определенных относительным методом.
  3. Предварительное уравнивание спутниковых измерений для устранения возможных смещений геоцентрических координат в горизонтальной плоскости.
  4. Приведение к центрам пунктов дальностей и зенитных расстояний, которые затем используются для вычисления предварительных координат наземных пунктов при их совместном уравнивании со спутниковыми измерениями.
  5. Вычисление предварительных геоцентрических координат пунктов наземных геодезических сетей.
  6. Приведение к центрам пунктов горизонтальных углов.
- Обработка спутниковых наблюдений и формат итоговых протоколов различаются в зависимости от типа аппаратуры и фирмы ее изготовителя. Каждая фирма имеет свой пакет прикладных программ. Рассмотрим наиболее распространенные из них.

SKI – пакет программ для обработки радиотехнических измерений аппаратурой швейцарской фирмы Leica, аналогичный русифицированный пакет имеется для аппаратуры “Землемер-Л1”, собираемой из деталей этой фирмы в России. PRIZM-пакет программ фирмы Ashtech. Эти пакеты вырабатывают большое число различных файлов, однако для уравнивательных вычислений необходимы те файлы, которые содержат разности геоцентрических координат между парами пунктов, их предварительные координаты и ковариационные матрицы разностей координат.

Вид протокола наблюдений для аппаратуры фирмы Leica, полученный после первичной обработки пакетом программ SKI, представлен на рис. 4.1, для аппаратуры “Землемер-Л1” – на рис. 4.2, для аппаратуры Dimension фирмы Ashtech – на рис. 4.3.

CH.1 ===== NEW STATIC CHAIN

#####

BL.1 1039 RUB001 10/28/96 10:34:00 AM #

#####

BL\_FC.1 FINAL COORDINATES

-----

Rov:1039 Ref:RUB001 Amb:Y 10/28/96 10:34:00 AM

Cartesian:

X 2876047.6745 m Y 2169417.9300 m Z 5245865.8900 m

dX 646.5868 m dY -7696.0012 m dZ 2766.3973 m

sX 0.0004 m sY 0.0003 m sZ 0.0008 m

Geodetic:

Lat 55 42 2.69701 N Lon 37 01 38.79504 E h 153.8185 m

dLat 2 40.56715 dLon 6 13.65172 dh -40.6626 m

sLat 0.0005 m sLon 0.0002 m sh 0.0007 m

Distance:

Slope 8203.6250 m sSlope 0.0003 m

BL\_VC.1 VARIANCE-COVARIANCE MATRIX

-----

a posteriori rms: 0.0032 m

Co-factor matrix (upper triangle):

	qx	qy	qz
qx	+1.5271433E-002	+4.3516266E-003	+7.5366343E-003
qy		+6.5715974E-003	+3.6152799E-003
qz			+5.4580934E-002

**Рис. 4.1. Протокол наблюдений аппаратуры фирмы Leica**

Вид протокола для аппаратуры GG-24 фирмы Ashtech, которая работает как по спутникам навигационной системы GPS, так и по спутникам навигационной системы России ГЛОНАСС, приведен на рис. 4.4.

В протоколе 4.1 даны измеренные значения разностей геоцентрических декартовых координат  $dX$ ,  $dY$ ,  $dZ$  с пункта RUB001 на пункт 1039. За названиями пунктов указаны дата и время наблюдений, далее следуют координаты пункта 1039. Если из этих координат вычесть разности координат, получим координаты пункта RUB001 – они могут быть приняты в качестве предварительных для уравнивания. В нижней части протокола приводятся элементы верхней треугольной части корреляционной матрицы разностей координат, а над ними – средняя квадратическая ошибка единицы веса, полученная из первичной обработки измеренных псевдодальностей (0,0032 м). Ковариационная матрица разностей координат может быть получена по формуле

$$\mathbf{K} = \sigma^2 \mathbf{Q}, \quad (4.2.1)$$

где  $\sigma$  – СКО единицы веса;  $\mathbf{Q}$  – корреляционная матрица.

Для уравнивательных вычислений обычно используется файл, который объединяет протоколы измерений для всех сторон данной сети. Если сеть большая, то может быть использовано несколько таких файлов. Уравнивание в фирменном пакете выполняется в геоцентрической декартовой системе координат с одним (свободное уравнивание) или несколькими исходными пунктами, затем полученные координаты перевычисляются в любую требуемую систему

координат. Такое уравнивание может применяться лишь для небольших местных сетей и обладает множеством недостатков, которые будут рассмотрены в следующем разделе. В данной работе предлагается единый комплекс уравнивания геодезических сетей, независимо от типов применяемой аппаратуры и пакетов первичной обработки измерений. Для чего на основе различных протоколов первичной обработки формируются единые рабочие файлы. Из этих протоколов формируются три рабочих файла, которые затем используются для уравнивательных вычислений, – это файлы названий пунктов *паzv*, их предварительных координат *коог* и разностей координат с их ковариационными пунктами *izm*.

Базовая линия: ВИС \_\_\_\_\_ – 8297 \_\_\_\_\_

Декартовы проекции:

X 2891024.3162 Y 2289638.2670 Z 5186679.4970

DX 644.2559 DY –6886.9377 DZ 2678.0731

sX 0.0044 sY 0.0037 sZ 0.0070

Геодезические проекции:

Lat 54 46 03.37601 Lon 38 22 42.88269 h 217.5403

dLat 00 02 29.44251 dLon –00 05 24.66317 dh 16.4897

Расстояние:

Slope 7417.3481

Корреляционная матрица:

	qx	qy	qz
qx	1.908E–5	7.988E–6	1.523E–5
qy	7.988E–6	1.337E–5	1.275E–5
qz	1.523E–5	1.275E–5	4.862E–5

**Рис. 4.2. Протокол наблюдений аппаратуры “Землемер-Л1”**

На рис. 4.2 приведен протокол наблюдений с пункта ВИС на пункт 8297. В нижней части протокола дана полная ковариационная матрица разностей координат, которая ошибочно названа корреляционной. В остальном он аналогичен предыдущему протоколу (см. рис. 4.1)

PRISM 2.0.00 12/08/93

Common start of two UFILES: 1996/06/13 08:13:40.00

Common end of two UFILES: 1996/06/13 09:03:40.00

Selected first epoch: 1

Selected last epoch: 151

For SV 4 there are 34 triple-difference measurements.

For SV 5 there are 150 triple-difference measurements.

For SV 6 there are 150 triple-difference measurements.

For SV 16 there are 93 triple-difference measurements.

For SV 24 there are 150 triple-difference measurements.

For SV 25 there are 150 triple-difference measurements.

Epoch interval (seconds): 20.000000

### THE TRIPLE DIFFERENCE SOLUTION (L1)

Measure of geometry: 0.005346

num\_meas = 576      num\_used = 568      rms\_resid =  
0.003337(m)

Post-Fit Chisq = 2172.137      NDF = 5.259

Sigmax (m): 0.852451

Sigmay (m): 0.977967

Sigmaz (m): 0.724513

sx y z

x 1.00

y -0.06y 1.00

z 0.50z -0.53z 1.00

del\_station: -0.000000 0.000000 -0.000000

Station1: STATION 0152 Station2: STATION 0159

(00000) (0152)                      (00000) (0159)

Latitude: 54.97381113 54 58 25.72005 55.07048529 55 4 13.74704

E-Long: 36.79382501 36 47 37.77003      36.54648294 36 32 47.33858

W-Long: 323.20617499 323 12 22.22997 323.45351706 323 27 12.66142

E-Height: 161.0200                      168.1349

Baseline vector: 2378.0135      -17953.0962      6175.4947

Mark1\_xyz: 2938179.3007 2197545.1083 5199842.6122

Az1 Ell D1: 304.32873                      -0.0645      19133.8795

E1 N1 U1 : -15839.1474 10762.3342 7.1149  
Mark2\_xyz : 2940557.3142 2179592.0121 5206018.1069  
Az2 E12 D2 : 124.12606 -0.1071 19133.8795  
E2 N2 U2 : 15801.0963 -10762.5182 -7.1149

Double-Difference Epochs:

Prn: 4 Start epoch: 2 End epoch: 54  
Prn: 5 Start epoch: 2 End epoch: 151  
Prn: 6 Start epoch: 2 End epoch: 151  
Prn: 16 Start epoch: 59 End epoch: 151  
Prn: 24 Start epoch: 2 End epoch: 151  
Prn: 25 Start epoch: 2 End epoch: 151

THE FLOAT DOUBLE DIFFERENCE SOLUTION (L1)  
Measure of geometry: 0.000611 Wavelength = 0.190294 (m/cycle)  
num\_meas = 578 num\_used = 575 rms\_resid = 0.011617(m)  
Post-Fit Chisq = 132.653 NDF = 5.324

Reference SV: 6

SV	Ambiguity	FIT	Meas	SV	Ambiguity	FIT	Meas
4	17087355.974f	0.093	32	5	12611170.729f	0.050	150
16	17619544.812f	0.067	93	24	1153261.774f	0.058	150
25	12646967.179f	0.061	150				

Sigmax (m): 0.057561  
Sigmay (m): 0.094225  
Sigmaz (m): 0.055003  
SigmaN (cy): 0.542661  
SigmaN (cy): 0.559052  
SigmaN (cy): 0.718432  
SigmaN (cy): 0.481005  
SigmaN (cy): 0.276795  
x y z N N N N N  
x 1.00  
y-0.41y 1.00  
z 0.48z-0.34z 1.00  
N-0.94N 0.65N-0.52N 1.00

N-0.62N 0.94N-0.61N 0.81N 1.00  
 N-0.73N 0.89N-0.63N 0.88N 0.98N 1.00  
 N-0.85N 0.82N-0.45N 0.95N 0.90N 0.94N 1.00  
 N 0.16N-0.95N 0.19N-0.42N-0.81N-0.73N-0.63N 1.00

del\_station: -0.000570 -0.002446 -0.000597  
 Station1: STATION 0152 Station2: STATION 0159  
 (00000) (0152) (00000) (0159)  
 Latitude: 54.97381113 54 58 25.72005 55.07048571 55 4 13.74856  
 E-Long: 36.79382501 36 47 37.77003 36.54648112 36 32 47.33203  
 W-Long: 323.20617499 323 12 22.22997 323.45351888 323 27 12.66797  
 E-Height: 161.0200 168.2162

Baseline vector: 2378.0889 - 17953.1848 6175.5883

Mark1\_xyz: 2938179.3007 2197545.1083 5199842.6122  
 Az1 E11 D1: 304.32865 - 0.0643 19134.0023  
 E1 N1 U1: - 15839.2638 10762.3813 7.1962  
 Mark2\_xyz: 2940557.3896 2179591.9235 5206018.2005  
 Az2 E12 D2: 124.12598 - 0.1074 19134.0023  
 E2 N2 U2: 15801.2125 - 10762.5655 -7.1962

INTEGER FIXED DOUBLE DIFFERENCE (L1)  
 SOLUTION

	1	2	3	4
Abs Contrast	0.438	0.000	0.000	0.000
Contrast	100.000	100.000	100.000	
Change Chi2	124.684	732.375	872.896	906.249
Bias S 6: 4	17087356	17087355	17087355	17087355
Bias S 6: 5	12611171	12611170	12611171	12611169
Bias S 6:16	17619545	17619544	17619545	17619543
Bias S 6:24	1153262	1153261	1153261	1153261
Bias S 6:25	12646967	12646967	12646967	12646968

NDF=62.5000 Chi2=132.6528  
 rms\_resid = 0.011592(m)  
 Sigmax (m): 0.009615

Sigma<sub>y</sub> (m): 0.008992

Sigma<sub>z</sub> (m): 0.016626

x y z

x 1.00

y 0.62y 1.00

z 0.47z 0.72z 1.00

del\_station: 0.006766 0.065509 0.030855

Station1: STATION 0152 Station2: STATION 0159

(00000) (0152)

(00000) (0159)

Latitude: 54.97381113 54 58 25.72005 55.07048554 55 4 13.74796

E-Long: 36.79382501 36 47 37.77003 36.54648188 36 32 47.33477

W-Long : 323.20617499 323 12 22.22997 323.45351812 323 27 12.66523

E-Height: 161.0200

168.2669

Baseline vector: 2378.0957 -17953.1193 6175.6192

Mark1\_xyz: 2938179.3007 2197545.1083 5199842.6122

Az1 E1 D1: 304.32868 -0.0641 19133.9516

E1 N1 U1: -15839.2150 10762.3626 7.2469

Mark2\_xyz: 2940557.3964 2179591.9890 5206018.2314

Az2 E2 D2: 124.12602 -0.1075 19133.9516

E2 N2 U2: 15801.1641 -10762.5469 -7.2469

### THE FIXED DOUBLE DIFFERENCE SOLUTION (L1)

Measure of geometry: 0.000018 Wavelength = 0.190294 (m/cycle)

num\_meas = 578 num\_used = 578 rms\_resid = 0.016200(m)

Post-Fit Chisq = 260.429 NDF = 5.352

Reference SV: 6 Integer Search Ratio = 100.000

SV Ambiguity FIT Meas SV Ambiguity FIT Meas

4 17087356.000X 0.141 35 5 12611171.000X 0.093 150

16 17619545.000X 0.084 93 24 1153262.000X 0.077 150

25 12646967.000X 0.066 150

Sigma<sub>x</sub> (m): 0.013235

```

Sigmay (m): 0.012509
Sigmaz (m): 0.023182
x y z
x 1.00
y 0.62y 1.00
z 0.47z 0.71z 1.00

del_station: - 0.000000 - 0.000000 0.000000
Station1: STATION 0152 Station2: STATION 0159
          (00000) (0152)          (00000) (0159)
Latitude: 54.97381113 54 58 25.72005 55.07048555 55 4 13.74796
E-Long: 36.79382501 36 47 37.77003 36.54648188 36 32 47.33478
W-Long: 323.20617499 323 12 22.22997 323.45351812 323 27 12.66522
E-Height: 161.0200          168.2662

Baseline vector: 2378.0951 -17953.1196 6175.6188
Mark1_xyz: 2938179.3007 2197545.1083 5199842.6122
Az1 E11 D1: 304.32868 - 0.0641 19133.9517
E1 N1 U1: -15839.2149 10762.3629 7.2462
Mark2_xyz: 2940557.3958 2179591.9887 5206018.2310
Az2 E12 D2: 124.12602 - 0.1075 19133.9517
E2 N2 U2: 15801.1640 - 10762.5472 - 7.2462
Sat Jun 29 20:13:20 1996

```

**Рис. 4.3. Протокол наблюдений аппаратуры Dimension  
фирмы Ashtech**

Полная расшифровка файла (рис. 4.3) дается в инструкции к пакету программ PRIZM, нас же будет интересоваться лишь ее последняя часть – результаты фиксированного решения по двойным разностям. Здесь приводятся стандартные ошибки по каждой координате и нормированная корреляционная матрица разностей координат. Для получения ковариационной матрицы разностей координат необходимо использовать формулу

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{xy} & 1 & \rho_{yz} \\ \rho_{xz} & \rho_{yz} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad (4.2.2)$$

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  – СКО по каждой координате;  $\rho_{xy}$ ,

$\rho_{xz}$ ,  $\rho_{yz}$  – коэффициенты взаимной корреляции разностей координат.

Далее идут названия пунктов, между которыми выполнялись наблюдения – 0152 и 0159. Ниже приводятся разности координат между ними, затем их координаты – Mark1\_xyz и Mark2\_xyz, которые при уравнивании могут быть приняты за предварительные.

PRISM GPS/GLONASS

Version: 1.19

Project information

Project name: GPS Survey

Session: A

Survey type: STATIC

Known-station parameters

Short name: 0100

Long name: STATION 0100

Comment: meteo\_\_\_\_\_

Position extraction: proj.file

N-Latitude (deg-min-sec): 43 23'49.92069"

E-Longitude (deg-min-sec): 132 09'27.28517"

W-Longitude (deg-min-sec): 227 50'32.71483"

Ellipsoidal height (m): 62.9931

North antenna offset (m): 0.0000

East antenna offset (m): 0.0000

Vert antenna offset (m): slant radius added\_offset  
0.0000 0.0000 0.0000

Temperature (degrees C): 20.0  
Humidity (%): 50.0  
Pressure (millibars): 1010.0  
Measurement filename: G0100A97.244

---

Unknown-station parameters

Short name: 0101  
Long name: STATION 0101  
Comment: METEO\_\_\_\_\_

Position extraction: U-file

N-Latitude (deg-min-sec): 43 23'50.17131"  
E-Longitude (deg-min-sec): 132 09'27.61070"  
W-Longitude (deg-min-sec): 227 50'32.38930"  
Ellipsoidal height (m): 57.5241  
North antenna offset (m): 0.0000  
East antenna offset (m): 0.0000  
Vert antenna offset (m): slant radius added\_offset  
0.1500 0.0000 0.0000

Temperature (degrees C): 20.0  
Humidity (%): 50.0  
Pressure (millibars): 1010.0  
Measurement filename: G0101A97.244

---

Run-time parameters

Elevation cutoff angle (degrees): 10  
Used measurements cutoff number: 10  
Processing mode: L1 ONLY  
Edit criterion (\* RMS): 3.0  
Convergence criterion (meters): 0.0100  
Omit these satellites: No  
Forbidden reference SVs: No  
Maximum iterations: 6  
Apply tropo delay correction: Y  
Use one reference satellite: Y,Y  
Contrast cutoff: 95.0  
Common start of two UFILES: 01 Sep 1997 01:17:00  
Common end of two UFILES: 01 Sep 1997 03:42:40  
Epoch interval (seconds): 20.000

# THE UNAMBIGUOUS OBSERVABLE BASED SOLUTION

Measure of geometry = 1.733799

Num Meas = 3822 / Num Used = 3794 (99%)

Post-Fit Chi-Square = 341.898 NDF = 461.5

GPS Carrier Phase Triple Differences

Num Meas = 1273 / Num Used = 1256 (98%)

RMS Resid = 0.003511 meters

SV-SV	C/A	
	Num Used Meas	RMS Resid (meters)
04-24	218	0.0018
10-24	215	0.0023
18-24	213	0.0021
16-24	140	0.0038
07-24	131	0.0034
19-24	106	0.0040
05-24	104	0.0042
06-24	71	0.0063
27-24	58	0.0071

GPS Code Phase Double Differences

Num Meas = 2549 / Num Used = 2538 (99%)

RMS Resid = 1.217953 meters

SV-SV	C/A	
	Num Used Meas	RMS Resid (meters)
04-24	436	1.0083
10-24	434	1.0708
18-24	436	1.0252
16-24	282	1.1604
07-24	263	1.1218
19-24	217	1.3879
05-24	208	1.3971
06-24	147	1.9416
27-24	115	1.5517

Sigma X = 0.194703 meters  
Sigma Y = 0.212920 meters  
Sigma Z = 0.179213 meters  
X Y Z  
X 1.000  
Y -0.440 Y 1.000  
Z -0.258 Z 0.287 Z 1.000

del\_station: 0.003645 -0.002693 0.006574 ( 0.007985 )

Station1: STATION 0100 Station2: STATION 0101  
(0100) (0101)

Latitude: 43.39720019 43 23'49.92069" 43.39727094 43  
23'50.17539"

E-Long: 132.15757921 132 09'27.28517" 132.15767271 132  
09'27.62175"

W-Long: 227.84242079 227 50'32.71483" 227.84232729 227  
50'32.37825"

E-Height: 62.9931 57.0959

Baseline Vector: 0.8856 -12.2636 1.6597

Mark1 XYZ: -3115440.8218 3440968.7869 4359713.3422

Az1 El1 D1: 43.9389 -28.3795 12.4071

E1 N1 U1: 7.5745 7.8604 -5.8972

Mark2 XYZ: -3115439.9362 3440956.5232 4359715.0019

Az2 El2 D2: 223.9390 28.3794 12.4071

E2 N2 U2: -7.5745 -7.8604 5.8972

-----  
Cycle Slips in GPS Carrier Phase Double Differences (C/A)  
are not found  
-----

**THE FLOAT DOUBLE DIFFERENCE SOLUTION**

Measure of geometry = 0.068590

Num Meas = 5098 / Num Used = 5036 (98%)

Post-Fit Chi-Square = 469.252 NDF = 612.5

**GPS Carrier Phase Double Differences**

Num Meas = 2549 / Num Used = 2498 (97%)

RMS Resid = 0.003944 meters

SV-SV	C/A	
	Num Used Meas	RMS Resid (meters)
04-24	436	0.0032
10-24	417	0.0041
18-24	436	0.0029
16-24	283	0.0039
07-24	266	0.0039
19-24	212	0.0046
05-24	199	0.0050
06-24	135	0.0048
27-24	114	0.0051

**GPS Code Phase Double Differences**

Num Meas = 2549 / Num Used = 2538 (99%)

RMS Resid = 1.256877 meters

SV-SV	C/A	
	Num Used Meas	RMS Resid (meters)
04-24	436	1.0368
10-24	433	1.0168
18-24	436	1.1402
16-24	282	1.3239
07-24	263	1.1187
19-24	218	1.4794
05-24	208	1.3867
06-24	147	1.9271
27-24	115	1.5596

Sigma X = 0.005732 meters

Sigma Y = 0.014801 meters

Sigma Z = 0.003883 meters

X Y Z  
 X 1.000  
 Y 0.653 Y 1.000  
 Z -0.260 Z 0.002 Z 1.000

del\_station: -0.000006 -0.002954 0.001942 ( 0.003535 )

Station1: STATION 0100 Station2: STATION 0101  
 (0100) (0101)  
 Latitude: 43.39720019 43 23'49.92069" 43.39726938 43  
 23'50.16977"  
 E-Long: 132.15757921 132 09'27.28517" 132.15766989 132  
 09'27.61160"  
 W-Long: 227.84242079 227 50'32.71483" 227.84233011 227  
 50'32.38840"  
 E-Height: 62.9931 57.3338

Baseline Vector: 0.8590 -11.8938 1.6971

Mark1 XYZ: -3115440.8218 3440968.7869 4359713.3422  
 Az1 El1 D1: 43.7011 -28.0247 12.0450  
 E1 N1 U1: 7.3461 7.6869 -5.6593  
 Mark2 XYZ: -3115439.9628 3440956.8930 4359715.0393  
 Az2 El2 D2: 223.7012 28.0246 12.0450  
 E2 N2 U2: -7.3461 -7.6869 5.6593

-----  
 Integer search ratio = 100.000

GPS Carrier Phase Double Difference (C/A) Ambiguities:

SV-SV	Start epoch	End epoch	Float Ambiguity	Sigma Amb.	Fixed	Used
				(cycles)	Ambiguity	meas
04-24	2	437	32824.933	0.0363	32825.000	436
10-24	2	437	-83261.966	0.0366	-83262.000	417
18-24	2	437	16200.864	0.0685	16201.000	436
16-24	2	284	119218.837	0.0917	119219.000	283
07-24	2	268	118368.977	0.0314	118369.000	266
19-24	218	437	-8485251.161	0.0802	-8485251.000	212
05-24	2	209	8267.031	0.0338	8267.000	199
06-24	291	437	-18289012.978	0.0350	-18289013.000	135
27-24	322	437	-20728184.091	0.0586	-20728184.000	114

## THE FIXED DOUBLE DIFFERENCE SOLUTION

Measure of geometry = 0.011867

Num Meas = 5098 / Num Used = 5076 (99%)

Post-Fit Chi-Square = 468.984 NDF = 617.6

### GPS Carrier Phase Double Differences

Num Meas = 2549 / Num Used = 2538 (99%)

RMS Resid = 0.005400 meters

SV-SV	C/A	
	Num Used Meas	RMS Resid (meters)
04-24	435	0.0032
10-24	436	0.0076
18-24	436	0.0042
16-24	281	0.0039
07-24	266	0.0042
19-24	220	0.0070
05-24	206	0.0065
06-24	142	0.0058
27-24	116	0.0054

### GPS Code Phase Double Differences

Num Meas = 2549 / Num Used = 2538 (99%)

RMS Resid = 1.252310 meters

SV-SV	C/A	
	Num Used Meas	RMS Resid (meters)
04-24	436	1.0325
10-24	433	1.0205
18-24	436	1.1283
16-24	282	1.3066
07-24	263	1.1188
19-24	218	1.4718
05-24	208	1.3896
06-24	147	1.9270
27-24	115	1.5579

Sigma X = 0.000803 meters

Sigma Y = 0.000829 meters

Sigma Z = 0.000853 meters

X Y Z  
X 1.000  
Y - 0.597 Y 1.000  
Z - 0.362 Z 0.253 Z 1.000

del\_station: -0.000463 0.000577 0.000631 ( 0.000972 )

Station1: STATION 0100      Station2: STATION 0101  
(0100)                      (0101)

Latitude: 43.39720019 43 23'49.92069"      43.39726947 43  
23'50.17008"

E-Long: 132.15757921 132 09"27.28517"      132.15767017 132  
09'27.61261"

W-Long: 227.84242079 227 50'32.71483"      227.84232983 227  
50'32.38739"

E-Height: 62.9931                      57.3231

Baseline Vector: 0.8519 -11.9197 1.6968

Mark1 XYZ: -3115440.8218 3440968.7869 4359713.3422

Az1 El1 D1:                      43.7529                      -28.0190                      12.0699

E1 N1 U1:                              7.3686                              7.6966                              -5.6700

Mark2 XYZ: -3115439.9699 3440956.8672 4359715.0390

Az2 El2 D2:                      223.7529                      28.0189                      12.0699

E2 N2 U2:                              -7.3686                              -7.6966                              5.6700

-----  
25 Sep 1997 14:57:24

**Рис. 4.4. Протокол наблюдений аппаратуры GG-24 фирмы Ashtech**

Интересующая нас часть файла (см. рис. 4.4) также находится внизу. За исключением некоторых редакционных изменений этот файл аналогичен предыдущему (см. рис. 4.3).

Файл названий пунктов используется лишь при выдаче результатов уравнивания на внешний носитель информации – в файл или на протокол через принтер, поэтому при ее редактировании после формирования условные названия пунктов могут заменяться действительными, но

не более 20 символов кириллицы. При уравнильных вычислениях удобнее пользоваться порядковыми номерами пунктов, поэтому в процессе формирования файлов им придаются соответствующие номера, которые могут включаться как в файл названий пунктов, так и в файлы предварительных координат пунктов. В этом случае файл названий пунктов будет содержать записи вида

NP, название пункта,

где NP — номер пункта.

Формат записей в файле координат следующий

NP, X, Y, Z.

Формат записей в файле измерений имеет вид

$N_1, N_2, \Delta X, \Delta Y, \Delta Z, K_{XX}, K_{XY}, K_{XZ}, K_{YY}, K_{YZ}, K_{ZZ},$

где  $N_1$  — номер базового (ведущего) пункта;  $N_2$  — номер определяемого (ведомого) пункта;  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  — разности координат между ними (ведомый — ведущий);  $K_{ij}$  — элементы верхнего треугольника ковариационной матрицы,  $i, j = X, Y, Z$ .

Рабочим файлам даются стандартные наименования pazv, коог и izm соответственно, поэтому, если при формировании новых файлов есть необходимость сохранить данные предыдущих файлов, то их надо переименовать или скопировать в другую директорию.

При совместном уравнивании спутниковых данных с наземными измерениями для последних составляется отдельный файл, имеющий следующий формат

$N_1, N_2, Pr, O, m_0,$

где Pr — признак вида измерения, например, для направлений Pr = 0, для дальностей Pr = 6 и т. д.; O — измеренное значение (угловое в градусах, минутах и секундах, возможно с долями; линейное в метрах);  $m_0$  — средняя квадратическая ошибка измерения в той же размерности. Остальные файлы для наземных данных имеют такой же формат, что и для спутниковых данных.

### **4.3. Проверка качества разностей координат**

После получения рабочих файлов измерений *izm*, предварительных координат *koog* и названий пунктов *navz* выполняется контроль качества измеренных величин и при необходимости перевычисление их в другую систему координат, что будет рассмотрено в дальнейшем.

Контроль качества измеренных разностей координат выполняется по двум критериям: во-первых, по соответствию диагональных элементов ковариационных матриц установленным допускам и, во-вторых, по величине невязок замкнутых фигур. Сюда же можно было бы добавить вычисление невязок по ходовым линиям между исходными пунктами.

Однако, как неоднократно подчеркивалось, точность исходной геодезической основы – государственной геодезической сети (ГГС) значительно ниже точности спутниковых измерений, поэтому такая отбраковка привела бы к исключению доброкачественных измерений.

Допуски к диагональным элементам и невязкам фигур должны устанавливаться по результатам статистической обработки достаточного количества измерений для каждого типа приемной аппаратуры и в соответствии с требованиями к точности создаваемого класса геодезической сети. В этом случае можно было бы установить, какие типы аппаратуры следует применять для развития геодезической сети заданного класса, обоснованно проводить метрологическую аттестацию спутниковой аппаратуры. В настоящее время такие допуски можно приближенно принять на основании следующих эмпирических средних квадратических ошибок (СКО), полученных при обработке реальных измерений небольшого объема:

– для двухчастотной аппаратуры 0,005 и 0,01 м для СКО разностей координат (формальная оценка по диагональным элементам ковариационных матриц) и для стороны при подсчете невязок фигур;

— для одночастотной аппаратуры 0,01 и 0,02 м соответственно. Допуски установим как предельные ошибки с коэффициентом 2,5 к указанным СКО, т. е.  $m_{\text{ф.доп}} = 2,5 m_{\text{дк}}$ , где  $m_{\text{дк}}$  — допустимая СКО для диагонального элемента ковариационной матрицы разностей координат;  $m_{\text{н.доп}} = 2,5 m_{\text{дн}} \sqrt{n}$ , где  $n$  — число сторон в замкнутой фигуре;  $m_{\text{дн}}$  — СКО разности координат для подсчета невязок.

Программа анализа качества разностей координат построена следующим образом. Вначале диагональные элементы ковариационной матрицы разностей координат  $K_{xx}$ ,  $K_{yy}$ ,  $K_{zz}$  сравниваются с допустимой дисперсией  $6,25 m_{\text{дк}}^2$  и одновременно происходит их суммирование. При  $K_{xx}$ ,  $K_{yy}$ ,  $K_{zz} > m_{\text{ф.доп}}^2$  выполняется запись недопустимых измерений в файл sco. После проверки всех измерений оператор может отбраковать некоторые измерения из файла sco. Для этого вместо номера первого пункта в строке измерений файла sco записывается нуль. Это выполняется с помощью любого текстового редактора. При отбраковке оператор может принять во внимание следующие моменты: насколько превышен допуск, есть ли возможность повторить измерение и насколько ослабнет жесткость сети при отбраковке данного измерения.

После этого запускается вторая часть программы, при которой исключаются отмеченные оператором измерения, вычитаются дисперсии отбракованных разностей координат из общей суммы и определяется дисперсия по формуле

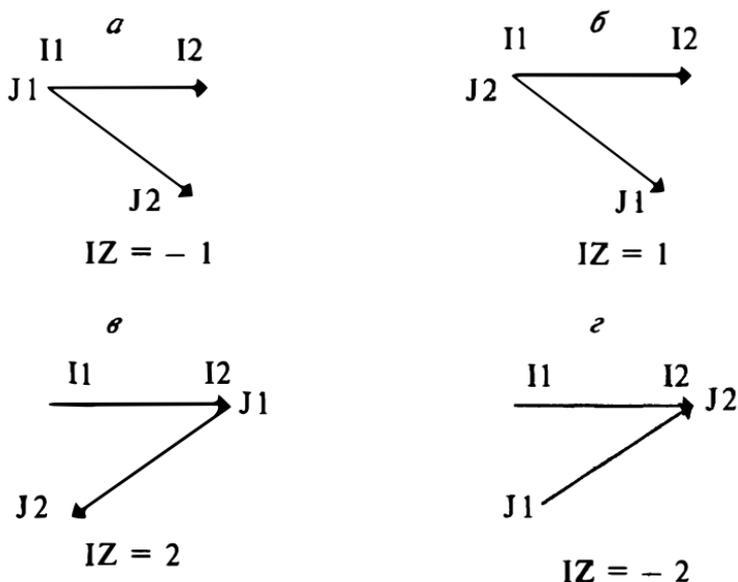
$$m_{\text{ф}}^2 = \sum K_{ii} / 3r, \quad (4.3.1)$$

где  $r$  — число измеренных линий в сети.

Здесь же проверяется, не появились ли пункты вообще без измерений (“висячие”). Такие пункты также исключаются из файлов коог и pazv.

Третья часть программы позволяет подсчитывать невязки всех треугольников по каждой координате. Эта операция выполняется в тройном цикле. В первом цикле из массива измерений выбирается очередное с номерами пунктов  $\Pi$  —

ведущий и I2 – ведомый. Направление этого вектора считается положительным. Во втором цикле, начиная с измерения  $i + 1$ , отыскивается вторая сторона между пунктами J1 и J2. При этом могут встретиться случаи I1 = J1 или J2, I2 = J1 или J2 ( рис. 4.5). В зависимости от того, совпадают или нет направления второй стороны и ходовой линии, переменной IZ присваивается значение  $\pm 1$  или  $\pm 2$ .



**Рис. 4.5. Порядок нахождения сторон треугольника**

В третьем цикле, начиная с измерения  $i + 2$ , выполняется поиск измерения, замыкающего треугольник, между пунктами K1 и K2. В зависимости от направления этого вектора переменной IX присваивается значение 1 или  $-1$ . Если такой вектор найден, то вычисляются невязки  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $w_z$  данного треугольника, которые сравниваются с допустимой невязкой. Если какая-либо из невязок окажется недопустимой, то невязки и измерения, входящие в этот треугольник, записываются в файл nev. Если необходимо просмотреть невязки всех треугольников в сети, то устанавливается  $m_{дн} = 0$ . Тогда все невязки окажутся

недопустимыми и будут записаны в файл невязок. Допустимые невязки в файл не записываются.

Далее происходит поиск замыкающей стороны до конца массива измерений, так как по этой стороне может оказаться повторное измерение. Если замыкающее направление не найдено, продолжается поиск второй стороны во втором цикле до конца массива измерений. После этого происходит выборка следующего базового измерения в первом цикле до тех пор, пока не будут найдены все существующие в сети треугольники.

При вычислении невязок разности координат складываются ( $I_Z, I_X > 0$ ) или вычитаются ( $I_Z, I_X < 0$ ) в зависимости от совпадения или несовпадения направления вектора с направлением ходовой линии, задаваемой направлением базовой стороны (вектора). При вычислении невязок одновременно происходит суммирование квадратов невязок.

Кроме невязок треугольников, могут вычисляться невязки и других замкнутых фигур, если остались стороны, не вошедшие ни в один треугольник. В этом случае оператор должен ввести номера пунктов на вершинах многоугольника, для чего необходимо иметь под рукой схему сети. Поиск сторон и их направлений выполняется в этом случае в соответствии с введенными номерами пунктов. Невязки многоугольников вычисляются по запросу после определения невязок треугольников до тех пор, пока не будет получен отрицательный ответ на очередной запрос о необходимости вычисления невязки других фигур.

Измерения, попавшие в файл недопустимых невязок замкнутых фигур  $n$ -уг, по решению оператора могут быть отбракованы аналогично предыдущему случаю – недопустимых диагональных элементов ковариационных матриц. В этом случае достаточно разорвать замкнутую фигуру, поставив нуль на место первого пункта в измерении с наибольшим диагональным элементом ковариационной матрицы, или по другим соображениям. Невязки отбракованной фигуры из суммы квадратов невязок вычитаются.

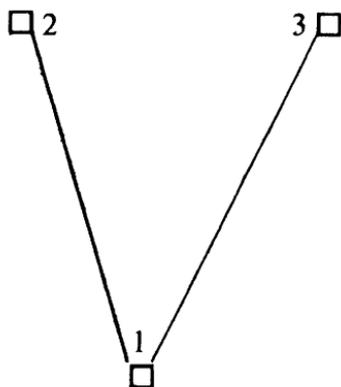
После этого вычисляется дисперсия измерений по

невязкам 
$$m^2 = \frac{\sum_1^{3k} w_i^2}{3n}, \quad (4.3.2)$$

где  $k$  — число фигур;  $n$  — число сторон в фигурах.

Оценка разностей координат, полученная по формуле (4.3.2), представляется более реалистичной, чем формальная оценка по диагональным элементам, поэтому ковариационные матрицы измерений умножаются на коэффициент  $t = m^2 / m_{\phi}^2$ .

При оценке точности измерений по невязкам фигур необходимо избегать использования зависимых измерений, получающихся при одновременных наблюдениях большим числом комплектов аппаратуры (рис. 4. 6). Пусть на пунктах 1—3 выполнялись синхронные наблюдения одних и тех же спутников. По этим наблюдениям вычислены разности координат между пунктами 1 — 2 и 1 — 3. Если по данным на пунктах 2 и 3 вычислена и эта сторона, то она будет зависимой, а невязка треугольника 1 — 2 — 3 будет равной нулю или близкой к нему даже при плохом разрешении неоднозначности на одном из пунктов. При



**Рис. 4.6. Независимые измерения**

большом числе таких фигур дисперсия, вычисленная по невязкам замкнутых фигур, может оказаться даже меньше, чем вычисленная по диагональным элементам ковариационных матриц. Конечно, такая оценка будет неверной и сильно завышенной. Поэтому на этапе проектирования должны быть предусмотрены способы получения каждой стороны сети, привязки к исходной геодезической основе

и другие технические вопросы, отражаемые в техническом проекте.

---

#### 4.4. Приведение к центрам пунктов разностей геоцентрических координат

---

##### 4.4.1. Приведение к центрам пунктов разностей координат за высоту

Измеренные разности геоцентрических координат относятся к фазовым центрам приемных антенн, установленных на пунктах. Назовем пункт, координаты которого вычитаются при вычислении разностей координат, ведущим, а другой пункт – ведомым по аналогии с радиодальномерными измерениями. Рассмотрим вначале учет в разностях координат высот антенн над центрами пунктов.

Для выяснения характера влияния приведения разностей координат к центрам пунктов за высоту рассмотрим более простую двумерную систему координат  $x, y$  (рис. 4.7). Перемещение точки  $l$  в точку  $l'$  по направлению к началу координат вызовет их масштабное изменение, и координаты точки  $l'$  будут равны

$$x' = x \frac{O1'}{O1}; \quad y' = y \frac{O1'}{O1},$$

где  $O1'/O1$  – это новый масштаб координат. Так как перемещение точки по высоте – это движение вдоль направления к началу координат, то аналогичное изменение координат происходит и в трехмерном случае. Оценим, насколько велико при этом влияние несовпадения направлений нормали в данной точке и геоцентрического радиус-вектора. На рис. 4.8  $O1$  – геоцентрический радиус-вектор;  $1A$  – нормаль;  $AO = N e^2 \sin B$ . Предположим, что центр пункта  $P$  расположен на референц-эллипсоиде. Тогда из подобных треугольников  $1OC$  и  $1QP$  получим  $QP = 1QOC/O1$ .

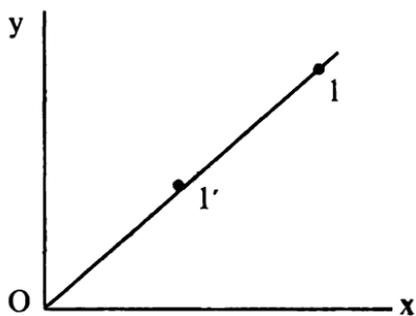


Рис. 4.7. Масштабное изменение

к ошибке в плановом положении более, чем на 1 мм, а по высоте на 0,5 мм, что пренебрежимо даже для такого высокоточного метода.

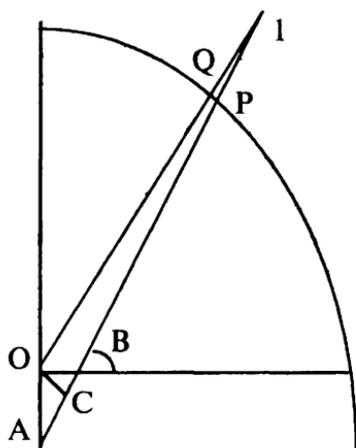


Рис. 4.8. Нормаль и радиус-вектор

где  $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ .

Учитывая, что  $X_2 = X_1 + \Delta X_{изм}$ ;  $Y_2 = Y_1 + \Delta Y_{изм}$ ;  $Z_2 = Z_1 + \Delta Z_{изм}$ , получим окончательные формулы для приведения разностей координат к центрам пунктов за высоту

Так как из рис. 4.8  $OC = N e^2 \sin B \cos B$ ;  $N \approx \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ , то  $QP = 1Q e^2 \sin B \cos B$ . Обозначив  $1P = h$ , получим  $h = 1Q \sqrt{1 - e^4 \sin^2 B \cos^2 B} \approx 1Q (1 - 0,00002 \sin^2 B \cos^2 B)$ . На широте  $45^\circ$  изменение высоты на 100 м не приведет к ошибке в плановом положении более, чем на 1 мм, а

Обозначим по традиции высоту прибора на ведущей и ведомой станциях  $i$  и  $v$  соответственно. Тогда приведенные к центрам пунктов разности координат будут равны

$$\Delta X = \frac{R_2 - v}{R_2} X_2 - \frac{R_1 - i}{R_1} X_1;$$

$$\Delta Y = \frac{R_2 - v}{R_2} Y_2 - \frac{R_1 - i}{R_1} Y_1;$$

$$\Delta Z = \frac{R_2 - v}{R_2} Z_2 - \frac{R_1 - i}{R_1} Z_1,$$

$$\begin{aligned} \Delta X &= \Delta X_{\text{ИЗМ}} \left( 1 - \frac{v}{R_2} \right) + X_1 \left( \frac{i}{R_1} - \frac{v}{R_2} \right); \\ \Delta Y &= \Delta Y_{\text{ИЗМ}} \left( 1 - \frac{v}{R_2} \right) + Y_1 \left( \frac{i}{R_1} - \frac{v}{R_2} \right); \\ \Delta Z &= \Delta Z_{\text{ИЗМ}} \left( 1 - \frac{v}{R_2} \right) + Z_1 \left( \frac{i}{R_1} - \frac{v}{R_2} \right). \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Такое приведение разностей координат к центрам пунктов за высоту антенны выполняется при первичной обработке измерений фирменными пакетами программ (PRIZM – фирмы Ashtech, SKI – фирмы Leica и т. д.).

#### 4.4.2. Аналитическое определение элементов приведения и высоты знака

При расположении прибора на геодезическом знаке могут применяться обычные методы определения элементов приведения с помощью центрировочного листа и определения высоты знака с помощью рулетки. Так как прямой видимости между ведущей и ведомой станциями, как правило, нет, то азимут на центр пункта в этом случае передается от других пунктов ГГС или от ориентирных пунктов (ОРП).

Для получения азимута  $A$  из дирекционного угла  $\alpha$  используется формула

$$A = \alpha + \gamma - \delta, \quad (4.4.2)$$

где  $\gamma = (L - L_0) \sin B$  – сближение меридианов на пункте;  $\delta$  – поправка за изображение стороны, от которой передается дирекционный угол, на плоскости в проекции Гаусса.

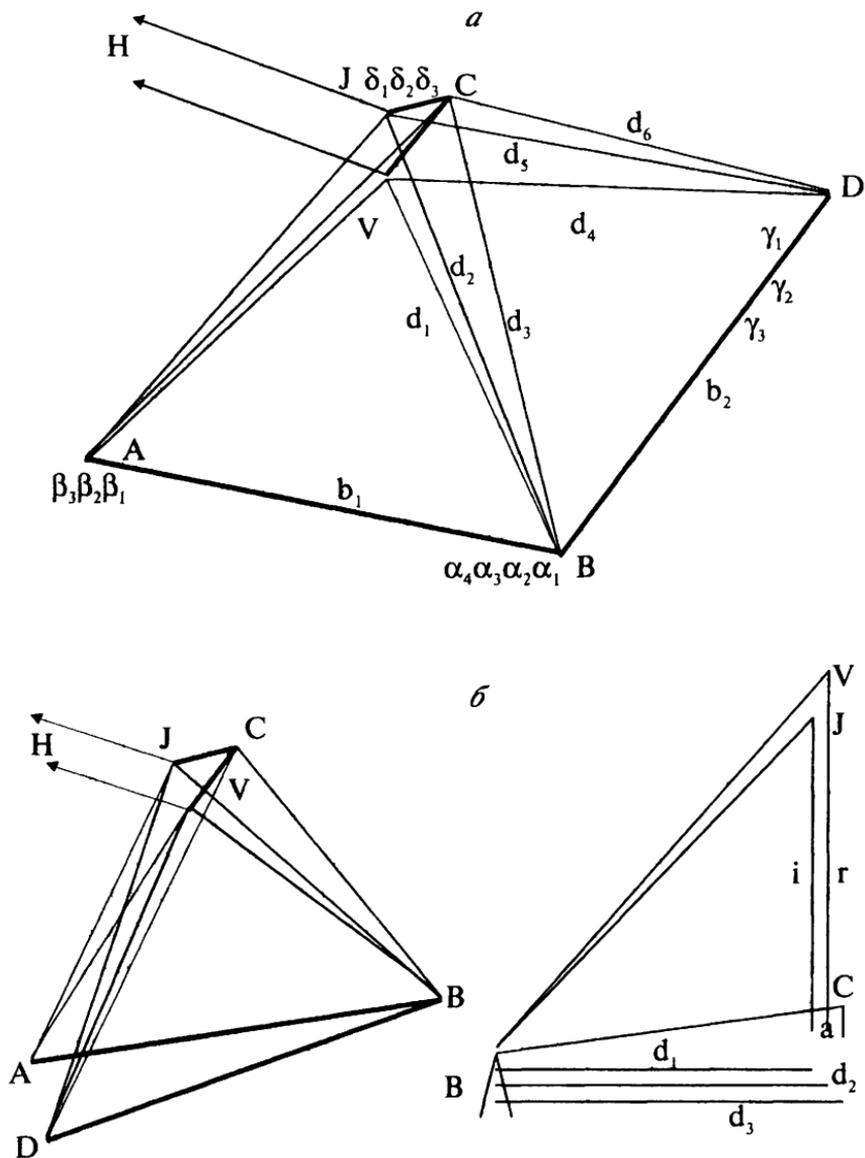


Рис. 4.9. Схемы определения элементов приведения

При наличии теодолита или тахеометра и/или расположении прибора на крыше здания может применяться аналитический метод определения элементов приведения и высоты прибора над центром пункта.

Для этого на местности измеряют два базиса  $b_1'$  и  $b_2'$  (рис. 4.9, *a* и *б*) так, чтобы их длина была не менее полуторной высоты знака, а углы  $\delta_1$  и  $\delta_2$  —  $\delta_1$  составляли около  $60^\circ$ . На рис. 4.9, *a*, *б* визирный цилиндр обозначен  $V$ , центр пункта  $C$ , инструментальный столик  $J$  и начальное направление  $H$ . При измерении углов начальным выбирается направление вдоль базиса, а на точке  $J$  самая левая точка  $D$  (см. рис. 4.9, *a*).

Измерения выполняются в следующем порядке. Стальной лентой или дальномером измеряются базисы  $b_1'$  и  $b_2'$ . Одним приемом при двух кругах без замыкания горизонта измеряют направления на точке  $A$ :

$$\begin{aligned} B &- 0^\circ; \\ J &- \beta_2; \\ C &- \beta_3; \\ V &- \beta_1. \end{aligned}$$

На точке  $B$  измеряют направления и зенитные расстояния:

$$\begin{aligned} A &- 0^\circ, z_1; \\ J &- \alpha_2, z_3; \\ V &- \alpha_1, z_2; \\ C &- \alpha_3, z_4; \\ D &- \alpha_4. \end{aligned}$$

На точке  $D$  выполняют аналогичные измерения:

$$\begin{aligned} B &- 0^\circ, z_5; \\ V &- \gamma_1, z_6; \\ C &- \gamma_3, z_8; \\ J &- \gamma_2, z_7. \end{aligned}$$

На точке  $J$  измеряют следующие направления:

$$\begin{aligned} D &- 0^\circ; \\ B &- \delta_1; \\ A &- \delta_2; \\ H &- \delta_3. \end{aligned}$$

Точность выполненных измерений считается удовлетворительной, если расхождение приведенных к нулю направлений в полуприемах (КЛ и КП) не превышает  $20''$ , а невязки треугольников  $AJB$  и  $VJD$  составляют не более  $30''$ . Если значения направлений допустимы, то из них

берутся средние и вычисляются зенитные расстояния. Невязки AJB и BJD определяются по схеме (см. рис. 4.9, а) по формулам соответственно

$$\begin{aligned}w_1 &= 180^\circ + \alpha_2 - \beta_2 - \delta_1 + \delta_2; \\w_2 &= \alpha_2 + \alpha_4 + \gamma_2 + \delta_1 - 180^\circ.\end{aligned}\quad (4.4.3)$$

Если наблюдения не удовлетворяют установленным допускам, то их повторяют заново.

Вычисления ведутся в следующей последовательности. Базисы приводятся к горизонту по формулам

$$b_1 = b_1' \sin z_1; \quad b_2 = b_2' \sin z_5. \quad (4.4.4)$$

Далее из соответствующих смежных треугольников вычисляются расстояния

$$\begin{aligned}d_1 &= b_1 \frac{\sin \beta_1}{\sin(\beta_1 - \alpha_1)} = b_2 \frac{\sin \gamma_1}{\sin(\alpha_4 + \gamma_1 - \alpha_1)}; \\d_2 &= -b_1 \frac{\sin \beta_2}{\sin(\delta_2 - \delta_1)} = b_2 \frac{\sin \gamma_2}{\sin \delta_1}; \\d_3 &= b_1 \frac{\sin \beta_3}{\sin(\beta_3 - \alpha_3)} = b_2 \frac{\sin \gamma_3}{\sin(\alpha_4 - \alpha_3 + \gamma_3)}; \\d_4 &= b_2 \frac{\sin(\alpha_4 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_4 + \gamma_1 - \alpha_1)}; \quad d_5 = b_2 \frac{\sin(\alpha_4 - \alpha_2)}{\sin \delta_1}; \\d_6 &= b_2 \frac{\sin(\alpha_4 - \alpha_3)}{\sin(\alpha_4 - \alpha_3 + \gamma_3)}.\end{aligned}\quad (4.4.5)$$

Расхождение расстояний  $d_1$ ,  $d_2$  и  $d_3$ , вычисленных из двух треугольников, не должны превышать относительную ошибку 1/1000, иначе необходимо перемерять базисы.

Дальнейшие вычисления выполняются в местных системах координат. Для построений, связанных с базисом  $b_1$ ,

принимается система координат с началом в точке В и направлением оси  $x$  на точку А, поэтому углы  $\alpha_i$  являются местными азимутами. Таким образом,

$$\begin{aligned}x_v &= d_1 \cos\alpha_1; & x_j &= d_2 \cos\alpha_2; & x_c &= d_3 \cos\alpha_3; \\y_v &= d_1 \sin\alpha_1; & y_j &= d_2 \sin\alpha_2; & y_c &= d_3 \sin\alpha_3.\end{aligned}\quad (4.4.6)$$

Тогда линейные элементы и дирекционные углы центрировки и редукции равны соответственно

$$\begin{aligned}l &= \sqrt{(x_c - x_j)^2 + (y_c - y_j)^2}; & \alpha_{jc} &= \arctg \frac{y_c - y_j}{x_c - x_j}; \\l_1 &= \sqrt{(x_c - x_v)^2 + (y_c - y_v)^2}; & \alpha_{vc} &= \arctg \frac{y_c - y_v}{x_c - x_v}.\end{aligned}\quad (4.4.7)$$

Дирекционный угол на начальное направление в точке J равен

$$\alpha_H = \alpha_2 + \angle ВJH + 180^\circ = \alpha_2 - \delta_3 + 180^\circ.$$

Очевидно, что дирекционный угол в точке V на начальное направление будет почти таким же. Поэтому угловые элементы центрировки и редукции будут равны соответственно

$$\Theta = \alpha_H - \alpha_{jc} \pm 360^\circ; \quad \Theta_1 = \alpha_H - \alpha_{vc} \pm 360^\circ.\quad (4.4.8)$$

Далее вычисляются высоты  $i$  и  $r$  (значение  $a$  измеряется рулеткой)

$$r = d_1 \operatorname{ctg}z_2 - d_3 \operatorname{ctg}z_4 + a; \quad i = d_2 \operatorname{ctg}z_3 - d_3 \operatorname{ctg}z_4 + a.\quad (4.4.9)$$

Аналогично вычисляются элементы приведения и высоты знака с базиса  $b_2$ , за начало координат принимается точка D, ось  $x$  направлена в точку B:

$$x_v = d_4 \cos\gamma_1; \quad x_j = d_5 \cos\gamma_2; \quad x_c = d_6 \cos\gamma_3;$$

$$y_v = d_4 \sin \gamma_1; \quad y_l = d_5 \sin \gamma_2; \quad y_c = d_6 \sin \gamma_3. \quad (4.4.10)$$

$l, l_1, \alpha_{1C}, \alpha_{vC}$  вычисляются по вышеприведенным формулам,

$$\alpha_n = \gamma_2 + \delta_3 \pm 180^\circ. \quad (4.4.11)$$

$\Theta, \Theta_1$  также вычисляются по ранее приведенным формулам,

$$r = d_4 \operatorname{ctg} \gamma_6 - d_6 \operatorname{ctg} \gamma_8 + a; \quad i = d_5 \operatorname{ctg} \gamma_7 - d_6 \operatorname{ctg} \gamma_8 + a. \quad (4.4.12)$$

Аналогичные вычисления выполняются по схеме (см. рис. 4.9, *б*), где во втором треугольнике роль точек В и D меняется местами.

Расхождения элементов приведения и высот с двух базисов не должны превышать следующих допусков:

- для линейного элемента центрировки – 5 мм;
- для линейного элемента редукции – 10 мм;
- для высот – 10 см.

За окончательные значения элементов и высот принимаются их средние значения из двух определений. Этот алгоритм использован в математическом обеспечении электронного журнала – прибора обработки геодезических измерений (ПОГИ). Ниже приводится пример аналитического определения элементов приведения и высоты знака, который может использоваться для отладки программ.

### Пример 2.1.

#### Наблюдения на точке А

Точка визирования	КЛ	КП	Среднее по гор. кругу
В	0° 00' 10,5"	180° 00' 11,5"	0° 00' 11,0"
Ј	314 57 51,6	134 57 52,6	314 57 52,1
С	315 23 48,5	135 23 49,5	315 23 49,0
V	315 25 02,8	135 25 03,8	315 25 03,3

### Наблюдения на точке В

A	0° 00' 10,5"	180° 00' 11,5"	0° 00' 11,0"
V	44 01 56,9	224 01 57,9	44 01 57,4
J	44 11 05,9	224 11 06,9	44 11 06,4
C	45 32 22,5	225 32 23,5	45 32 23,0
D	105 32 24,5	285 32 25,5	105 32 25,0

Вертикальные углы      Зенитные расстояния

A	90° 44' 20"	269° 15' 46"	90° 44' 17"
V	53 07 51	306 52 15	53 07 48
J	57 59 44	302 00 22	57 59 41
C	85 42 42	274 17 24	85 42 39

### Наблюдения на точке D

B	0° 00' 10,5"	180° 00' 11,5"	0° 00' 11"
V	59 14 54,5	239 14 55,5	59 14 55
J	59 41 55,5	239 41 56,5	59 41 56
C	60 00 17,5	240 00 18,5	60 00 18

Вертикальные углы      Зенитные расстояния

B	90° 29' 38"	269° 30' 28"	90° 29' 35"
V	53 47 52	306 12 14	53 47 49
J	58 26 43	301 33 23	58 26 40
C	85 42 42	274 17 24	85 42 39

### Наблюдения на точке J

D	0° 00' 10,5"	180° 00' 11,5"	0° 00' 11"
B	58 57 08,5	238 57 09,5	58 57 09
A	149 43 47,5	329 43 48,5	149 43 48
H	194 14 35,5	14 14 36,5	194 14 36

$$b_1' = 57,08 \text{ м}; \quad b_2' = 40,08 \text{ м}; \quad a = 1,32 \text{ м}.$$

В результате вычислений получаем:

$$\begin{aligned}
w_1 &= -6,7''; & w_2 &= 1,6''; & b_1 &= 57,075 \text{ м}; & b_2 &= 40,079 \text{ м}; \\
d_1' &= 40,077 \text{ м}; & d_1'' &= 40,078 \text{ м}; & d_4'' &= 40,989 \text{ м}; \\
d_2' &= 40,389 \text{ м}; & d_2'' &= 40,39 \text{ м}; & d_5'' &= 41,057 \text{ м}; \\
d_3' &= 40,08 \text{ м}; & d_3'' &= 40,081 \text{ м}; & d_6'' &= 40,08 \text{ м}; \\
l &= 1,000 \text{ м}; & \alpha_{JC}' &= 152^\circ 52' 16,6''; & \alpha_H' &= 359^\circ 28' 22,4''; \\
l_1' &= 1,054 \text{ м}; & \alpha_{VC}' &= 134^\circ 39' 15''; \\
\Theta &= 206^\circ 36' 05,8''; & \Theta_1' &= 224^\circ 49' 07,4''; & r &= 28,37 \text{ м}; & i' &= 23,56 \text{ м}; \\
l' &= 1,001 \text{ м}; & \alpha_{JC}'' &= 227^\circ 20' 55,9''; & \alpha_H'' &= 73^\circ 56' 10''; \\
l_1'' &= 1,055 \text{ м}; & \alpha_{VC}'' &= 209^\circ 09' 55,5''; \\
\Theta' &= 206^\circ 35' 14,1''; & \Theta_1'' &= 224^\circ 46' 14,5''; & r' &= 28,32 \text{ м}; & i'' &= 23,53 \text{ м}.
\end{aligned}$$

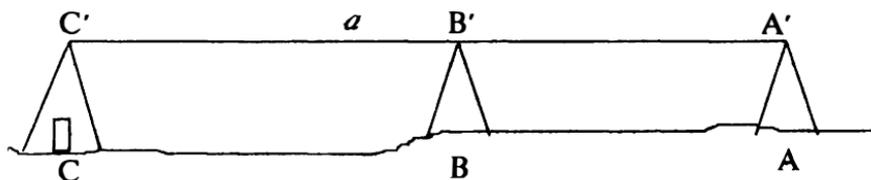
После передачи дирекционного угла от пунктов ГГС или ОРП на отрезок JC вычисляются приращения геодезических координат

$$\begin{aligned}
\Delta X_c &= -l (\cos \alpha_{JC} \sin B \cos L + \sin \alpha_{JC} \sin L); \\
\Delta Y_c &= -l (\cos \alpha_{JC} \sin B \sin L - \sin \alpha_{JC} \cos L); \\
\Delta Z_c &= l (\cos \alpha_{JC} \cos B).
\end{aligned} \tag{4.4.13}$$

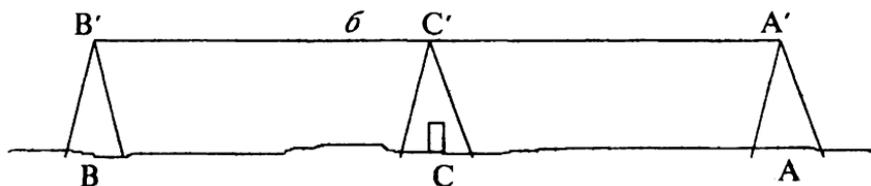
Вывод значений направляющих косинусов приращений и их знаков приводится ниже.

#### 4.4.3. Метод створных наблюдений

Метод створных наблюдений применяется в случаях, когда с конца измеренной базисной линии виден центр пункта и в створе между этими точками есть возможность установить дополнительную приемную антенну. В противном случае возможно введение дополнительной точки так, чтобы это условие выполнялось с нее. Здесь возможны, по крайней мере, две схемы расположения антенн (рис. 4.10, а, б).



На рис. 4.10, *a* дополнительная антенна В устанавливается между центром пункта С и концом базиса А. На рис. 4.10, *б* дополнительная антенна В устанавливается так, чтобы центр пункта находился между точками А и В.



**Рис. 4.10. Схемы створных наблюдений на центр пункта**

В обоих случаях синхронные наблюдения на точках А и В позволяют определить направляющие косинусы створного направления, а измеренные высоты и расстояние  $l$  — приращения координат от конца базисной линии А до центра пункта С, т. е. привести линию к центру пункта. Наблюдения между точками А и В могут выполняться как совместно с наблюдением базисной линии, так и раздельно.

Так как при первичной обработке базисной линии она одновременно приводится к поверхности Земли за высоту антенн, то вначале требуется привести координаты точки А к высоте антенны, т. е. в точку А', потому что нам потребуются направляющие косинусы линии А'В'. Для этого используются формулы

$$X'_A = \frac{R_A + i}{R_A} X_A; \quad Y'_A = \frac{R_A + i}{R_A} Y_A; \quad Z'_A = \frac{R_A + i}{R_A}. \quad (4.4.14)$$

Направляющие косинусы линии А'В' вычисляются по

неприведенным на поверхность Земли разностям координат точек А' и В' по формулам

$$\cos\alpha_x = \frac{\Delta X_{A'B'}}{S}; \quad \cos\alpha_y = \frac{\Delta Y_{A'B'}}{S}; \quad \cos\alpha_z = \frac{\Delta Z_{A'B'}}{S},$$

где  $S = \sqrt{\Delta X_{A'B'}^2 + \Delta Y_{A'B'}^2 + \Delta Z_{A'B'}^2}$ .

Координаты точки С вычисляются по формулам

$$X_C = X_B + / \cos\alpha_x; \quad Y_C = Y_B + / \cos\alpha_y; \quad Z_C = Z_B + / \cos\alpha_z;$$

$$X_C = X_A + / \cos\alpha_x; \quad Y_C = Y_A + / \cos\alpha_y; \quad Z_C = Z_A + / \cos\alpha_z.$$

Затем определяются разности координат точек А и С, которые приводятся за высоту антенн по формулам (4.4.1).

На рис. 4.11 показано, какие алгебраические знаки присваиваются разностям координат точек А и С в зависимости от направления базисной линии.

Здесь общее правило такое, что если направление вектора АС совпадает (служит продолжением) направления базисной линии, то разности координат  $\Delta X_{AC}$ ,  $\Delta Y_{AC}$ ,  $\Delta Z_{AC}$  прибавляются к разностям координат базисной линии со своими арифметическими знаками, а при противоположных направлениях — вычитаются.

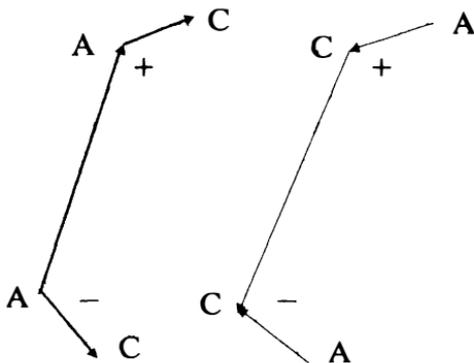


Рис. 4.11. Схемы сложения приращений

Если геодезический пункт расположен на крыше здания, а центром пункта является стенной репер, то можно представить и третий вариант, когда ориентировка на центр пункта передается от пунктов ГГС, а линейный элемент центрировки и

высота до репера измеряются лентой. Последние три схемы приведения к центрам пунктов объединены в общую программу и опробованы при реальных измерениях. Здесь необходимо также отметить, что при привязке к стенному реперу (рис. 4.10, а) высота створной точки считается положительной, если она выше репера и, наоборот, отрицательной, если створная точка ниже репера.

Элементы приведения необходимо определять с такой же точностью, что и сами наблюдения между пунктами, чтобы не понизить точность разностей координат.

---

#### **4.5. Приведение к центрам пунктов наземных измерений**

---

При совместном уравнивании спутниковых и наземных измерений в системе геоцентрических координат уравнения связи должны быть выражены в той же системе координат. Для наземных измерений это означает, что линии, углы и другие измеренные величины должны быть выражены через геоцентрические координаты, для чего они должны быть приведены к центрам пунктов. Но для наземных измерений это означает не только введение поправок за центрировку, редукцию и высоту, но и их преобразование. Это, прежде всего, относится к горизонтальным направлениям и углам. Они преобразовываются в углы между направлениями на центры пунктов, т. е. в углы на поверхности Земли, а не в горизонтальной плоскости.

Приведение наклонных дальностей к центрам пунктов означает приведение одной наклонной дальности к другой (рис. 4.12). Здесь  $D$  — измеренная дальность;  $D_0$  — приведенная к центрам пунктов;  $i$  и  $v$  — высоты прибора и визирной цели соответственно;  $D_1$  и  $D_2$  — расстояния до начала координат, вычисленные по формулам

$$D_1 = N_1 + H_1; D_2 = N_2 + H_2,$$

где  $N = a/\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$  – радиус кривизны первого вертикала;  $H$  – геодезическая высота.

По теореме косинусов находим

$$D^2 = (D_1 + i)^2 + (D_2 + v)^2 - 2(D_1 + i)(D_2 + v) \cos\psi;$$

$$D_0^2 = D_1^2 + D_2^2 - 2 D_1 D_2 \cos\psi. \quad (4.5.1)$$

Из второго выражения (4.5.1) находим центральный угол  $\psi$  и подставляем его в первое. После несложных преобразований находим

$$D_0 = \sqrt{\frac{D^2 + \left(\frac{v}{D_2} - \frac{i}{D_1}\right) \left[ D_1^2 \left(1 + \frac{i}{D}\right) - D_2^2 \left(1 + \frac{v}{D_2}\right) \right]}{\left(1 + \frac{i}{D_1}\right) \left(1 + \frac{v}{D_2}\right)}}. \quad (4.5.2)$$

Это точная формула для редуцирования наклонных дальностей к центрам пунктов. Погрешность редуцирования будет, в основном, зависеть от точности предварительных координат, т. е. вычисления  $D_1$  и  $D_2$ . Их требуемая точность составляет 5 м [41].

Поправки за центрировку и редукицию вводятся, как обычно, по формулам

$$c_d = - l \cos(M + \Theta);$$

$$r_d = - l_1 \cos(M + \Theta_1),$$

где  $l$  и  $l_1$  – линейные элементы центрировки и редукиции;  $\Theta$  и  $\Theta_1$  – соответствующие углы от линейных элементов до начального направления;  $M$  – величина угла до других направлений.

При редуцировании зенитных расстояний дальность  $D_0$

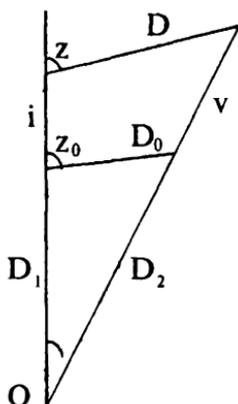


Рис. 4.12. Приведение линии и зенитного расстояния к центрам пунктов

вычисляется по предварительным координатам пунктов,  $D$  – по формулам (4.5.1), что позволяет исключить  $\cos\psi$ . По теореме синусов можем написать

$$\frac{D_2 + v}{\sin z} = \frac{D}{\cos \psi}; \quad \frac{D_2}{\sin z_0} = \frac{D_0}{\cos \psi},$$

откуда, исключив  $\cos\psi$ , находим

$$\sin z_0 = \frac{D \sin z}{D_0(1 + v / D_2)}. \quad (4.5.3)$$

Формула (4.5.3) позволяет найти значение зенитного расстояния, приведенного к центрам пунктов.

При редуцировании направлений к центрам пунктов вначале, как обычно, вводятся поправки за центрировку и редукицию по формулам

$$c = \frac{l}{S} \sin(M + \Theta); \quad r = \frac{l}{S} \sin(M + \Theta_1),$$

где  $S$  – расстояние на плоскости.

Вместо  $S$  можно использовать  $D_0$ , вычисленное по предварительным геоцентрическим координатам

$$D_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}. \quad (4.5.4)$$

Затем вычисляются углы между направлениями на центры пунктов. Так как углы измеряются в горизонтальной плоскости, положение которой в геоцентрической системе координат не фиксируется, то для приведения направлений к центрам пунктов можно использовать только вертикальные углы, которые также отсчитываются от горизонтальной плоскости.

На рис. 4.13  $\angle AOB$  – измеренный горизонтальный угол, который требуется привести к центрам пунктов  $A'$  и  $B'$ ,  $z_A$  и  $z_B$  – приведенные к центрам пунктов зенитные расстояния.

ния. Из сферического треугольника  $A'ZB'$  по теореме косинусов получаем

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \cos z_A \cos z_B + \sin z_A \sin z_B \cos b = \sinh_A \sinh_B + \\ &+ \cosh_A \cosh_B \cos b, \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

где  $b = \angle AOB$ ;  $\beta$  – приведенный к центрам угол;  $h_A, h_B$  – углы возвышения точек  $A'$  и  $B'$  над горизонтом.

Формулу (4.5.5) можно использовать для редуцирования к центрам пунктов геодезических азимутов. Пусть на рис. 4.14  $AC$  является направлением на север, т. е.  $h_C = 0$ , тогда

$$\cos A'_{AB} = \cos A_{AB} \cosh'_{AB},$$

где  $A_{AB}$  – измеренный азимут в горизонтальной плоскости;  $A'_{AB}$  – приведенный.

Найдем также приведенное дополнение к азимуту направления на восток, которое нам понадобится для вычисления предварительных координат

$$\begin{aligned} \sin A' &= \cos \times \\ &\times (90^\circ - A_{AB}) \cosh'_{AB}, \end{aligned}$$

где  $A' = \angle B'AW$ .

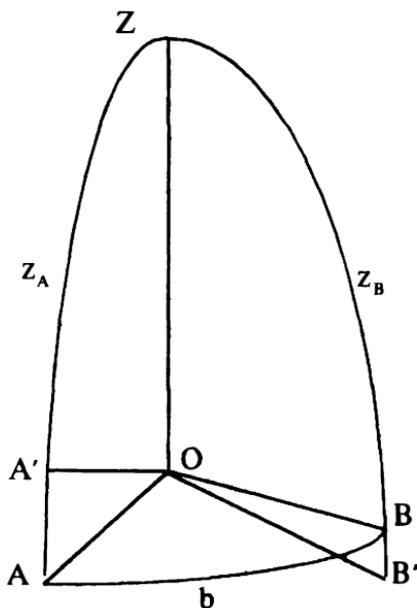


Рис. 4.13. Редуцирование угла

Теперь рассмотренные виды измерений связаны только с координатами пунктов на поверхности Земли, и для них могут быть выведены уравнения связи и поправок координат. Но прежде, чем перейти к уравнениям поправок, необходимо рассмотреть два вопроса.

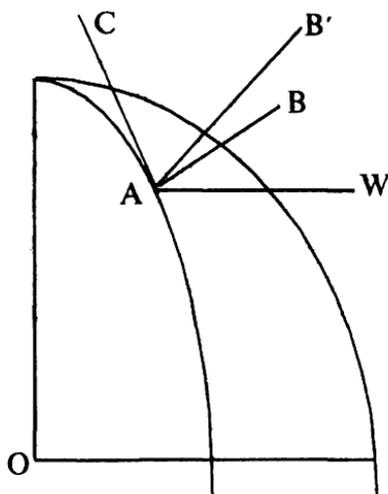
Во-первых, зенитные расстояния, как отмечалось выше, используются для редуцирования к центрам пунктов горизонтальных углов, поэтому их повторное использование при уравнивании сети привело бы к необходимости учета корреляции между поверхностными и вертикальными углами. Кроме того, зенитные расстояния и углы возвышения связаны с использованием нормали при горизонтальной плоскости, которые в геоцентрической системе координат не фиксируются. По этим причинам уравнивание зенитных расстояний нецелесообразно и было бы даже ошибочным.

Во-вторых, выше было рассмотрено приведение к центрам пунктов горизонтальных углов. Если же на пунктах были измерены горизонтальные направления, то они образуют поверхностные углы, число которых определяется сочетанием из  $n$  по два, т. е.

$$m = (n / 2) = n (n - 1) / 2. \quad (4.5.6)$$

Например, при  $n = 2$   $m = 1$ , при  $n = 3$   $m = 3$  и т. д., причем полученные углы являются независимыми, так как функциональную связь между ними можно установить только через вертикальные углы, которые были исключены. Таким образом, горизонтальные направления редуцируются в  $m$  поверхностных углов.

Как было показано в этом разделе, для редуцирования измерений к центрам пунктов необходимо вычисление их предварительных геоцентрических координат.



**Рис. 4.14. Редуцирование геодезического азимута**

---

#### 4.6. Вычисление предварительных геоцентрических координат пунктов наземной сети

---

Предварительные координаты пунктов спутниковой сети выбираются из соответствующих файлов наблюдений после их обработки фирменными пакетами программ. При наличии предварительных координат наземных пунктов  $x, y, N^y$  или  $B, L, N^y$  вначале определяется геодезическая высота  $N = N^y + \zeta$ , где  $\zeta$  – высота квазигеоида для данного пункта, выбираемая по карте высот квазигеоида над референц-эллипсоидом Красовского. Затем координаты  $x, y$  перевычисляются в геодезические, которые перевычисляются на общий земной эллипсоид, а затем  $B, L, N$  в геоцентрические координаты. Возможен и другой вариант. Вначале геодезические координаты перевычисляются в  $X_{42}, Y_{42}, Z_{42}$  с началом в центре референц-эллипсоида Красовского, а затем последние приводятся на общий земной эллипсоид с помощью соответствующих параметров трансформирования системы координат ПЗ–90 или WGS–84.

Если указанных координат нет и определяется новый пункт, то его предварительные координаты вычисляются по приведенным к центрам пунктов измерениям в зависимости от их состава. Предположим вначале, что с пункта, геоцентрические координаты которого уже вычислены, выполнены наблюдения расстояния  $D_0$ , зенитного расстояния  $z_0$  и азимута  $A$ . Азимут на данное направление может передаваться от другой исходной стороны, что будет рассмотрено ниже.

Тогда можно использовать формулы

$$\begin{aligned}\cos A &= -(\Delta x \sin B \cos L + \Delta y \sin B \sin L - \Delta z \cos B) / D_0; \\ \cos z_0 &= (\Delta x \cos B \cos L + \Delta y \cos B \sin L + \Delta z \sin B) / D_0; \\ \sin A' &= -(\Delta x \sin L - \Delta y \cos L) / D_0,\end{aligned}\tag{4.6.1}$$

где  $\cos B \cos L, \cos B \sin L, \sin B$  – направляющие косинусы

нормали;  $-\sin B \cos L$ ,  $-\sin B \sin L$ ,  $\cos B$  – направляющие косинусы направления на север (касательной к меридиану);  $-\sin L$ ,  $\cos L$ ,  $0$  – направляющие косинусы направления на восток (касательная к параллели);  $\Delta x/\Delta_0$ ,  $\Delta y/\Delta_0$ ,  $\Delta z/D_0$  – направляющие косинусы направления с известного пункта на определяемый;  $B$ ,  $L$ ,  $H$  – геодезические координаты исходного пункта.

Умножив первое уравнение на  $\cos B$ , второе на  $\sin B$ , найдем

$$\Delta z = D_0 (\cos A \cos B + \cos z_0 \sin B).$$

Теперь, умножив их соответственно на  $-\sin B$  и  $\cos B$  и сложив произведения, найдем

$$\Delta x \cos L + \Delta y \sin L = D_0 (\cos z_0 \cos B - \cos A \sin B).$$

С учетом третьего уравнения найдем

$$\begin{aligned} \Delta x &= D_0 [(\cos z_0 \cos B - \cos A \sin B) \cos L - \sin A' \sin L]; \\ \Delta y &= D_0 [(\cos z_0 \cos B - \cos A \sin B) \sin L + \sin A' \cos L]. \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

Теперь координаты определяемого пункта 2 равны

$$X_2 = X_1 + \Delta x; \quad Y_2 = Y_1 + \Delta y; \quad Z_2 = Z_1 + \Delta z,$$

где  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $Z_1$  – координаты исходного пункта.

Так как горизонтальные углы и зенитные расстояния (для приведения первых к центрам пунктов) измеряются всегда, вероятнее всего, что  $D_0$  может отсутствовать, как, например, в триангуляции. Если зенитные расстояния тоже отсутствуют, то приближенно  $z_0$  может быть найдено по формуле

$$\operatorname{tg} z_0 = (H_2 - H_1)/D_0.$$

Рассмотрим вначале способ передачи азимута от исходной стороны на другие направления. Азимут исходной стороны вычисляется по вытекающей из выражений (4.6.1) формуле

$$A = \operatorname{arctg} \frac{-\Delta x \sin L + \Delta y \cos L}{-\Delta x \sin B \cos L - \Delta y \sin B \sin L + \Delta z \cos B}, \quad (4.6.3)$$

где  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  — разность координат исходных пунктов.

Формула (4.6.3) может показаться ошибочной, так как исходная сторона может не лежать в горизонтальной плоскости (рис. 4.15), однако легко доказать обратное. Действительно, угол между векторами  $s$  и  $AB$  равен

$$\cos A = -(\Delta x \sin B \cos L - \Delta y \sin B \sin L + \Delta z \cos B) / d_{AB} -$$

угол между векторами  $AB$  и  $v$  равен

$$\sin A' = -(\Delta x \sin L + \Delta y \cos L) / d_{AB}.$$

Зенитное расстояние стороны  $AB$  равно

$$\cos z_{AB} = (\Delta x \cos B \cos L + \Delta y \cos B \sin L + \Delta z \sin B) / d_{AB}.$$

Приведем функции углов  $A$  и  $A'$  к горизонту, т. е.

$$\cos A_r = \cos A / \sin z_{AB};$$

$$\sin A'_r = \sin A / \sin z_{AB}.$$

Так как теперь функции относятся к горизонтальным углам, то

$$\operatorname{tg} A_r = \frac{\sin A'_r}{\cos A_r} = \frac{\sin A'}{\cos A},$$

что и требовалось доказать.

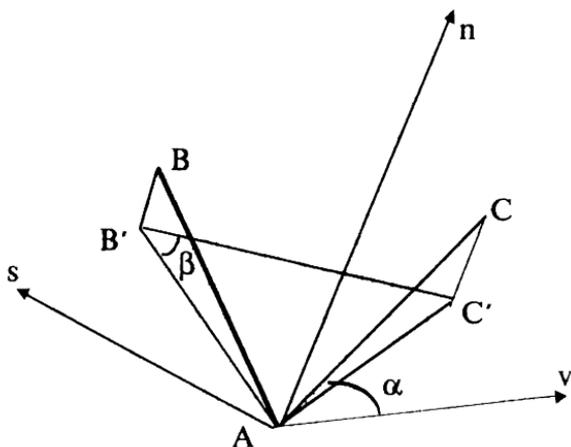
Необходимо отметить, что это свойство относится исключительно к функциям тангенса и котангенса.

Приведем к горизонту и длину стороны  $AB$

$$d_{AB}^r = d_{AB} / \sin z_{AB}.$$

Теперь, решая по теореме синусов  $\triangle AB'C'$ , найдем длину стороны  $AC'$   $d_{AC}^r = d_{AB}^r \sin \beta / \sin(\alpha + \beta)$  и приведем ее к центрам пунктов  $d_{AC} = d_{AC}^r \sin z_{AC}$ . Аналогично поступаем с азимутом  $A_{AC} = A_r + \alpha$  и  $\cos A_{AC} = \cos A_{AC} \sin z_{AC}$ .

Теперь мы снова возвращаемся к формулам (4.6.2) для нахождения разностей координат, формула  $d_{AC}^2 = \Delta x_{AC}^2 +$



**Рис. 4.15. Азимут наклонного расстояния**

$+ \Delta u_{AC}^2 + \Delta z_{AC}^2$  служит контрольной. Заметим, что в формулах для вычисления разностей координат исходного и определяемого пунктов величины

$$\begin{aligned}
 & (\cos z_{AC} \cos B - \cos A_{\Gamma} \sin z_{AC} \sin B) \cos L - \\
 & - \sin A_{\Gamma} \sin L \sin z_{AC}; \\
 & (\cos z_{AC} \cos B - \cos A_{\Gamma} \sin z_{AC} \sin B) \sin L + \\
 & + \sin A_{\Gamma} \cos L \sin z_{AC}; \\
 & \cos z_{AC} \sin B + \cos A_{\Gamma} \cos B \sin z_{AC}
 \end{aligned}$$

являются направляющими косинусами стороны AC в горизонтальной системе координат. Поэтому могут быть построены другие схемы вычисления координат определяемых пунктов, сводящиеся к вычислению длины и направляющих косинусов стороны между исходными и определяемым пунктами.

Таким же образом определяются предварительные координаты остальных определяемых пунктов. Для уменьшения накопления ошибок целесообразно находить коор-

динаты определяемых пунктов из нескольких треугольников или пересекающихся маршрутов. В этом случае берется среднее из нескольких значений. Так как в предварительных координатах пунктов, определенных относительным методом, служащих исходными при вычислении предварительных координат остальных пунктов, возможны заметные смещения, то рекомендуется вначале убрать эти смещения на исходных пунктах ГГС или провести предварительное уравнивание спутниковой сети.

Как видно из схемы вычислений, в результате получаются геоцентрические координаты, легко перевычисляемые в геодезические и поэтому на данном этапе нет необходимости для привлечения карт высот квазигеоида. Во всех вычислениях и при уравнивании высоты пунктов сохраняются неизменными. При устранении смещений удаляются только горизонтальные составляющие, поэтому геоцентрические координаты перевычисляются в плоские прямоугольные и после устранения плановых смещений — снова в геоцентрические. Разделение плановых и высотной составляющих при всех вычислениях — один из краеугольных принципов обработки пространственных построений. Попытка привлечь неточные карты высот квазигеоида для использования при вычислениях сразу же нарушает согласованность измерений и предварительных координат, приводит к резкому понижению точности конечного результата.

# УРАВНИВАНИЕ РАЗНОСТЕЙ КООРДИНАТ

---

### 5.1. Варианты уравнивания разностей координат

---

Различные варианты уравнивания разностей координат возникают, во-первых, из поставленных целей создания геодезической сети, во-вторых, из стремления сохранить более высокую потенциальную точность спутниковых измерений. Относительный метод позволяет почти на порядок точнее определять взаимное положение пунктов, чем в триангуляции или другими наземными методами. Если спутниковые измерения уравнивать, взяв за исходные пункты наземной сети, то ошибки этих пунктов распространятся по всей геодезической сети, что приведет к искажению положения определяемых пунктов и ухудшению оценок точности результатов уравнивания.

Если потребителю важнее получить более точное взаимное положение пунктов, то геодезическая сеть может быть уравнена как свободная (с одним исходным пунктом). Затем по методу наименьших квадратов сеть как жесткое построение может быть вставлена в совокупность исходных пунктов (определение элементов трансформирования — сдвигов и поворотов методом Резави). Именно этот метод реализуется в фирменных пакетах программ. В этом случае взаимное положение пунктов сохранится, но на исходных пунктах возникнут неустраняемые координатные невязки.

Кроме этих двух конкурирующих методов, возможен вариант уравнивания с буферной зоной. В этом варианте спутниковая сеть окаймляется тремя-четырьмя рядами треугольников из наземной сети, и исходные пункты назначаются по наружному краю такой буферной зоны. В

данном случае из-за большого веса спутниковых измерений взаимное положение пунктов спутниковой сети практически не исказится.

Ошибки координат исходных пунктов в буферной зоне будут в значительной степени погашены. Влияние спутниковых измерений на наземную сеть будет ограничено буферной зоной, т. е. координаты пунктов наземной сети за буферной зоной не изменятся. Этот метод особенно привлекателен для модернизации городских и региональных сетей спутниковыми методами. Полученные из такого уравнивания координаты пунктов могут заменить часть существующих каталогов ГГС.

Именно уравнивание с буферной зоной потребует совместного уравнивания спутниковых и наземных измерений. Что касается наземных измерений в сетях, заполняющих спутниковые сети, то здесь проще вначале уравнивать спутниковую сеть, затем, приняв координаты пунктов этой сети за исходные, уравнивать остальные пункты наземной сети. Результаты фактически получатся такими же, как и при их совместном уравнивании.

Таким образом, возможны четыре варианта уравнивания спутниковых измерений в зависимости от поставленных целей создания геодезической сети и наличия наземных измерений. Так как эти методы отличаются между собой только организационными мерами, достаточно рассмотреть один из них – метод совместного уравнивания спутниковых и наземных измерений. Дополнительный вопрос об определении элементов трансформирования координат в методе Резави будет рассмотрен позже.

---

## **5.2. Уравнения поправок и нормальные уравнения спутниковых измерений**

---

Уравнения связи для разностей координат, определенных относительным методом, вытекают из формулы (1.2.5)

$$\begin{aligned}\Delta X_{\text{изм}} &= \Delta X (1 + m) - \Delta Y \omega_z + \Delta Z \omega_y; \\ \Delta Y_{\text{изм}} &= \Delta Y (1 + m) + \Delta X \omega_z - \Delta Z \omega_x; \\ \Delta Z_{\text{изм}} &= \Delta Z (1 + m) - \Delta X \omega_y + \Delta Y \omega_x,\end{aligned}\quad (5.2.1)$$

где  $\Delta X_{\text{изм}}, \Delta Y_{\text{изм}}, \Delta Z_{\text{изм}}$  – измеренные значения разностей координат;  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  – разности координат, вычисленные по предварительным координатам пунктов;  $m, \omega_x, \omega_y, \omega_z$  – элементы, согласующие системы координат исходных пунктов и измеренных величин (при свободном уравнивании с одним исходным пунктом эти элементы не включаются в уравнения связи).

Из уравнений (5.2.1) вытекают соответствующие уравнения поправок

$$\begin{aligned}-\delta X_i &+ \delta X_j + \Delta X m - \Delta Y \omega_z + \Delta Z \omega_y - l_{\Delta X} = v_{\Delta X} \\ -\delta Y_i &+ \delta Y_j + \Delta Y m + \Delta X \omega_z - \Delta Z \omega_x - l_{\Delta Y} = v_{\Delta Y} \mathbf{P}_{\Delta}, \\ -dZ_i &+ dZ_j + \Delta Z m - \Delta X \omega_y + \Delta Y \omega_x - l_{\Delta Z} = v_{\Delta Z},\end{aligned}$$

где  $\delta X, \delta Y, \delta Z$  – поправки в координаты пунктов; свободные члены равны

$$l_{\Delta X} = \Delta X_{\text{изм}} - \Delta X; \quad l_{\Delta Y} = \Delta Y_{\text{изм}} - \Delta Y; \quad l_{\Delta Z} = \Delta Z_{\text{изм}} - \Delta Z;$$

$v_{\Delta X}, v_{\Delta Y}, v_{\Delta Z}$  – поправки в измеренные разности координат;  $\mathbf{P}_{\Delta} = \mu_0^2 \mathbf{K}_{\Delta}^{-1}$  ( $\mu_0^2$  – априорная дисперсия единицы веса;  $\mathbf{K}_{\Delta}$  – ковариационная матрица разностей координат).

Представим предыдущее уравнение в матричном виде

$$-\begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{bmatrix}_j + \mathbf{C} [m \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T - \mathbf{L}_{\Delta} = v_{\Delta}, \quad \mathbf{P}_{\Delta}, \quad (5.2.2)$$

$$\text{где} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta Z & -\Delta Y \\ 1 - \Delta Z & 0 & \Delta X & \\ 1 & \Delta Y & -\Delta X & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}_{\Delta} = \begin{bmatrix} l_{\Delta X} \\ l_{\Delta Y} \\ l_{\Delta Z} \end{bmatrix};$$

$$P_{\Delta} = \begin{bmatrix} P_{\Delta X \Delta X} & P_{\Delta X \Delta Y} & P_{\Delta X \Delta Z} \\ P_{\Delta X \Delta Y} & P_{\Delta Y \Delta Y} & P_{\Delta Y \Delta Z} \\ P_{\Delta X \Delta Z} & P_{\Delta Y \Delta Z} & P_{\Delta Z \Delta Z} \end{bmatrix}$$

Тогда нормальные уравнения, соответствующие уравнению (5.2.2), примут вид

$$\begin{bmatrix} P & -P & -PC \\ -P & P & PC \\ -C^T P & C^T P & C^T PC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_i \\ \Delta U_j \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -PL_{\Delta} \\ PL_{\Delta} \\ C^T PL_{\Delta} \end{bmatrix} = 0, \quad (5.2.3)$$

где  $\Delta U = [\delta X \ \delta Y \ \delta Z]^T$ .

Суммируя частные нормальные уравнения вида (5.2.3) для каждой пары пунктов, между которыми выполнены наблюдения, найдем общую систему нормальных уравнений для всей сети.

Так как координаты исходных пунктов при уравнивании не должны получать поправки, то строки и столбцы нормальной системы, относящиеся к ним, обнуляются, а диагональные элементы матрицы нормальных уравнений приравниваются к единице. Такой прием позволяет, не изменяя размера системы уравнений, правильно решить ее. Естественно, что и в векторе свободных членов элементы, относящиеся к исходным пунктам, также обнуляются, иначе умножение единиц на диагонали на эти свободные члены исказило бы решение.

Из решения системы уравнений (5.2.3) получают уравненные координаты пунктов сети и ковариационную матрицу для них

$$K_{xyz} = \mu^2 \begin{bmatrix} P & -P & -PC \\ -P & P & PC \\ -C^T P & C^T P & C^T PC \end{bmatrix}^{-1}, \quad (5.2.4)$$

где  $\mu^2$  – апостериорная дисперсия единицы веса, которая вычисляется по формуле

$$\mu^2 = \frac{L_{\Delta}^T P_{\Delta} L_{\Delta} + \Delta U_i^T P_{\Delta} L_{\Delta} - \Delta U_j^T P_{\Delta} L_{\Delta} - w^T C^T P_{\Delta} L_{\Delta}}{3(n-k) - 4},$$

где  $n$  – число измеренных сторон;  $k$  – число определяемых пунктов.

При свободном уравнивании

$$\mu^2 = \frac{L_{\Delta}^T P_{\Delta} L_{\Delta} + \Delta U_i^T P_{\Delta} L_{\Delta} - \Delta U_j^T P_{\Delta} L_{\Delta}}{3(n-k)}.$$

Кроме того, из уравнивания получаются систематические ошибки масштаба и поворота.

---

### 5.3. Уравнения поправок для наземных измерений

---

Прежде, чем рассматривать вопросы пересчета результатов уравнивания в плоскую систему координат, приведем уравнения поправок для остальных видов измерений, которые могут участвовать в совместном уравнивании спутниковых и наземных данных.

Уравнение связи для дальности, приведенной к центрам пунктов, имеет известный вид

$$D^2 = \Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2, \quad (5.3.1)$$

откуда следует уравнение поправок

$$\begin{aligned} & -\frac{\Delta X}{D} \delta X_i + \frac{\Delta X}{D} \delta X_j - \frac{\Delta Y}{D} \delta Y_i + \frac{\Delta Y}{D} \delta Y_j - \frac{\Delta Z}{D} \delta Z_i + \\ & + \frac{\Delta Z}{D} \delta Z_j - l_D = v_D, P_D, \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

где  $l_D = D_{изм} - D$ ;  $P_D = \mu_0^2/m_D^2$ ,  $D$  — дальность, вычисленная по предварительным координатам с использованием формулы (5.3.1).

Уравнения поправок для углов, приведенных к центрам пунктов, составляются для независимых углов, полученных при приведении измеренных направлений к центрам пунктов.

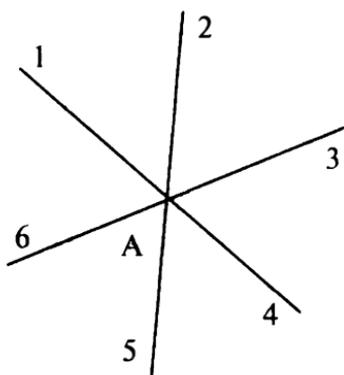


Рис. 5.1. Схема направлений на пункте А

Для шести направлений, показанных на рис. 5.1, независимыми будут углы 1А2—1А6, 2А3—2А6, 3А4—3А6, 4А5, 4А6, 5А6. Здесь отсутствуют условия полюса и горизонта, и остаются только условия треугольников и сторон. В качестве уравнения связи для углов используем формулу вычисления угла между двумя пространственными векторами

$$\cos \beta = \frac{\Delta X_{12} \Delta X_{13} + \Delta Y_{12} \Delta Y_{13} + \Delta Z_{12} \Delta Z_{13}}{D_{12} D_{13}}. \quad (5.3.3)$$

Обозначив направляющие косинусы сторон

$$\cos \alpha_{12}^x = \Delta X_{12} / D_{12}; \quad \cos \alpha_{13}^x = \Delta X_{13} / D_{13};$$

$$\cos \alpha_{12}^y = \Delta Y_{12} / D_{12}; \quad \cos \alpha_{13}^y = \Delta Y_{13} / D_{13};$$

$$\cos \alpha_{12}^z = \Delta Z_{12} / D_{12}; \quad \cos \alpha_{13}^z = \Delta Z_{13} / D_{13},$$

найдем уравнение поправок для угла в виде

$$\left[ \frac{\cos \alpha_{12}^x}{D_{13}} + \frac{\cos \alpha_{13}^x}{D_{12}} - \cos \beta \left( \frac{\cos \alpha_{12}^x}{D_{12}} + \frac{\cos \alpha_{13}^x}{D_{13}} \right) \right] dX_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{\cos \alpha_{12}^Y}{D_{13}} + \frac{\cos \alpha_{13}^Y}{D_{12}} - \cos \beta \left( \frac{\cos \alpha_{12}^Y}{D_{12}} + \frac{\cos \alpha_{13}^Y}{D_{13}} \right) \right] \frac{dY_1}{\sin \beta} + \\
& + \left[ \frac{\cos \alpha_{12}^Z}{D_{13}} + \frac{\cos \alpha_{13}^Z}{D_{12}} - \cos \beta \left( \frac{\cos \alpha_{12}^Z}{D_{12}} + \frac{\cos \alpha_{13}^Z}{D_{13}} \right) \right] \frac{dZ_1}{\sin \beta} + \\
& + \frac{\cos \alpha_{12}^X \cos \beta - \cos \alpha_{13}^X}{D_{12} \sin \beta} dX_2 + \frac{\cos \alpha_{12}^Y \cos \beta - \cos \alpha_{13}^Y}{D_{12} \sin \beta} dY_2 + \\
& + \frac{\cos \alpha_{12}^Z \cos \beta - \cos \alpha_{13}^Z}{D_{12} \sin \beta} dZ_2 + \frac{\cos \alpha_{13}^X \cos \beta - \cos \alpha_{12}^X}{D_{13} \sin \beta} dX_3 + \\
& + \frac{\cos \alpha_{13}^Y \cos \beta - \cos \alpha_{12}^Y}{D_{13} \sin \beta} dY_3 + \frac{\cos \alpha_{13}^Z \cos \beta - \cos \alpha_{12}^Z}{D_{13} \sin \beta} dZ_3 - \\
& - \iota_\beta = v_\beta, \quad P_\beta, \quad (5.3.4)
\end{aligned}$$

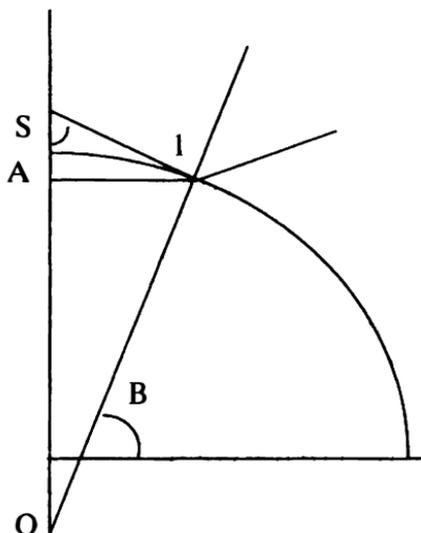
где  $\iota_\beta = (\cos \beta_{\text{изм}} - \cos \beta) / \sin \beta$ , но учитывая, что  $\cos \beta_{\text{изм}} - \cos \beta = 2 \sin[(\beta_{\text{изм}} + \beta)/2] \sin[(\beta_{\text{изм}} - \beta)/2]$ , получаем  $\iota_\beta = \beta_{\text{изм}} - \beta$ .

Так как разности координат получены с учетом ориентирования очень высокой степени точности, в спутниковой сети можно было бы не учитывать азимуты, полученные астрономическим путем. Но для совместного уравнивания с наземными измерениями или для уравнивания “чисто” наземных сетей в геоцентрической системе координат они могут быть полезными.

Уравнение связи для геодезического азимута выводится как угол между направлениями на север и на местный предмет — другой пункт. На рис. 5.2 пункт стояния 1 имеет координаты  $X_1, Y_1, Z_1$ , второй пункт 2 имеет координаты  $X_2, Y_2, Z_2$ . Точка севера S имеет координаты  $X_s = Y_s = 0$ ,

аппликата равна  $Z_1 + SA$ . Из треугольника  $AS1$  со стороны  $A1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}$  искомый отрезок равен

$$SA = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} / \operatorname{tg} B_1. \quad (5.3.4')$$



Из формул (1.6.2) следует, что

$$\operatorname{tg} B_1 = \frac{Z_1}{\left(1 - \frac{Ne^2}{N+H}\right) \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}.$$

Подставив полученную формулу в уравнение (5.3.4'), найдем

$$\Delta Z_s = \frac{X_1^2 + Y_1^2}{Z} \left(1 - \frac{Ne^2}{N+H}\right). \quad (5.3.5)$$

Рис. 5.2. Геодезический азимут

Теперь уравнение связи для геодезического азимута можно записать в виде

$$\cos \alpha = \frac{-(X_1 \Delta X_{12} + Y_1 \Delta Y_{12}) Z_1 + (X_1^2 + Y_1^2) \left(1 - \frac{Ne^2}{N+H}\right) \Delta Z_{12}}{D_{12} \sqrt{(X_1^2 + Y_1^2) Z_1^2 + (X_1^2 + Y_1^2)^2 \left[1 - Ne^2 / (N+H)\right]^2}}. \quad (5.3.6)$$

Обозначим  $s = A1$ ;  $n = 1 - Ne^2 / (N + H)$ ;  $d = \sqrt{s^2 n^2 + Z_1^2}$ . Величина  $1 - Ne^2 / (N + H)$  принимается за постоянную, так как в окрестностях точки 1 радиус кривизны первого вертикала  $N$  практически не меняется. Оценим эту величину, если пункт 1 в результате уравнивания получит поправку  $1''$ . Ее можно представить в виде

$$1 - \frac{e^2}{1 - \frac{H}{N}} = 1 - e^2 + \frac{H}{N} e^2.$$

Продифференцировав это выражение по  $B$ , получим  $-\frac{H}{N^2} e^4 (1 + e^2 \sin^2 B) \sin B \cos B dB$ , откуда при  $H = 1$  км и  $B = \frac{\pi}{4}$  изменение  $dB = 1''$  приведет к изменению функции на  $4 \cdot 10^{-28}$ , т. е.  $n$  можно считать постоянным.

Из уравнения (5.3.6) следует уравнение поправок для геодезического азимута

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{X_2 Z_1 - 2X_1 (Z_1 - \Delta Z_n)}{D_{12} s d} + \cos a \left( \frac{X_1}{s^2} - \frac{\Delta X}{D_{12}^2} + \frac{X_1 n^2}{d^2} \right) \right] \frac{dX_1}{\sin a} + \\ & + \left[ \frac{Y_2 Z_1 - 2Y_1 (Z_1 - \Delta Z_n)}{D_{12} s d} + \cos a \left( \frac{Y_1}{s^2} - \frac{\Delta Y}{D_{12}^2} + \frac{Y_1 n^2}{d^2} \right) \right] \frac{dY_1}{\sin a} + \\ & + \left[ \frac{X_1 \Delta X + Y_1 \Delta Y + s n^2}{D_{12} s d} + \cos a \left( -\frac{\Delta Z}{D_{12}^2} + \frac{Z_1}{d^2} \right) \right] \frac{dZ_1}{\sin a} + \\ & + \left( \frac{\Delta X}{D_{12}^2} \cos a + \frac{X_1 Z_1}{D_{12} s d} \right) \frac{dX_2}{\sin a} + \left( \frac{\Delta Y}{D_{12}^2} \cos a + \frac{Y_1 Z_1}{D_{12} s d} \right) \frac{dY_2}{\sin a} + \\ & + \left( \frac{\Delta Z}{D_{12}^2} \cos a - \frac{s n}{D_{12} d} \right) \frac{dZ_2}{\sin a} - (a_{c,m} - a) = v_a, P_a. \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

В формулах (5.3.4) и (5.3.7) необходимо следить за тем, чтобы  $\sin \beta$  или  $\sin a$  не были равны нулю. Можно, например, установить, чтобы при  $a, \beta \leq 1''$  принималось значение  $1/\sin a = 1/\sin \beta = 2 \cdot 10^5$ .

Зенитные расстояния в уравнение не включаются, так как они используются для приведения направлений к центрам пунктов, иначе пришлось бы учитывать корреляции, возникающие между углами и зенитными расстояниями. Нивелирные хода уравниваются отдельно. Полу-

ченные по ним нормальные высоты пунктов играют важную роль при уравнивании сетей, созданных относительным методом космической геодезии, фактически заменяют собой карты высот квазигеоида.

---

#### **5.4. Ковариационный анализ ошибок результатов уравнивания**

---

В результате уравнивания геодезической сети в общеземной системе координат получаются уравненные координаты пунктов  $X, Y, Z$  и их ковариационная матрица

$$K_{XYZ} = \mu^2 Q_{XYZ},$$

где  $\mu^2$  – апостериорная дисперсия единицы веса;  $Q_{XYZ}$  – корреляционная матрица определяемых пунктов (обратная матрица нормальных уравнений).

После этого координаты и их ковариационную матрицу необходимо перевычислить в местную систему координат  $x_m, y_m, H^l$  в следующей последовательности:

– пересчет координат  $X, Y, Z$  по формулам (1.2.6) из общеземной системы к центру референц-эллипсоида Красовского;

– пересчет координат  $X_k, Y_k, Z_k$  по формулам (1.6.4) в геодезические  $B, L, H$ ;

– пересчет геодезических координат по формулам (1.8.10) в систему 1942 г. или 1963 г.;

– пересчет последних по формулам (1.8.14) или аналогичным формулам в местную систему координат.

Каждое преобразование координат влечет за собой соответствующее преобразование ковариационной матрицы координат. Оно состоит в следующем.

Пусть новые координаты  $B, L, H$  являются некоторыми функциями исходных координат  $X, Y, Z$ , имеющих ковариационную матрицу  $K_{XYZ}$ ,

$$\begin{aligned}
 B &= f_1(X, Y, Z); \\
 L &= f_2(X, Y, Z); \\
 H &= f_3(X, Y, Z).
 \end{aligned}
 \tag{5.4.1}$$

Продифференцируем функции (5.4.1) по координатам  $X, Y, Z$

$$\begin{aligned}
 dB &= \frac{\partial f_1}{\partial X} dX + \frac{\partial f_1}{\partial Y} dY + \frac{\partial f_1}{\partial Z} dZ; \\
 dL &= \frac{\partial f_2}{\partial X} dX + \frac{\partial f_2}{\partial Y} dY + \frac{\partial f_2}{\partial Z} dZ; \\
 dH &= \frac{\partial f_3}{\partial X} dX + \frac{\partial f_3}{\partial Y} dY + \frac{\partial f_3}{\partial Z} dZ
 \end{aligned}
 \tag{5.4.2}$$

и вычислим математические ожидания случайных величин

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{U}^T &= (dB, dL, dH); & d\mathbf{v}^T &= (dX, dY, dZ) \\
 \mathbf{M}(d\mathbf{U}, d\mathbf{U}^T) &= \mathbf{A} \mathbf{M}(d\mathbf{v}, d\mathbf{v}^T) \mathbf{A}^T,
 \end{aligned}
 \tag{5.4.3}$$

где матрица производных

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial X & \partial f_1 / \partial Y & \partial f_1 / \partial Z \\ \partial f_2 / \partial X & \partial f_2 / \partial Y & \partial f_2 / \partial Z \\ \partial f_3 / \partial X & \partial f_3 / \partial Y & \partial f_3 / \partial Z \end{bmatrix}.$$

Математическое ожидание вектора  $d\mathbf{U}$  в левой части равенства (5.4.3) является ковариационной матрицей координат  $B, L, H$ , в правой части – ковариационной матрицей координат  $X, Y, Z$ , т. е.

$$\mathbf{K}_{BLH} = \mathbf{A} \mathbf{K}_{XYZ} \mathbf{A}^T.
 \tag{5.4.4}$$

Теперь можем аналогично написать формулу для получения ковариационной матрицы координат в местной системе

$$\mathbf{K}_{xM, yM, zM} = \mathbf{A} \mathbf{B}_1 \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{K}_{XYZ} \mathbf{D}^T \mathbf{C}^T \mathbf{B}_1^T \mathbf{A}^T,
 \tag{5.4.5}$$

где из-за малости углов поворота и масштабной поправки

можно принять матрицу  $D$  за единичную  $E$

$$C = \begin{bmatrix} -\sin B \cos L & -\sin B \sin L & \cos B \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ \cos B \cos L & \cos B \sin L & \sin B \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \sin B \cos B & 0 \\ -\lambda \sin B & \cos B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \gamma - a - d - b \Delta y & \sin \gamma - b \Delta x & 0 \\ 2f \Delta x - \sin \gamma & \cos \gamma - a - 2c \Delta y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $a, b, c, d, f$  – параметры местной системы координат;  $\Delta x = x - x_0$ ;  $\Delta y = y - y_0$ ;  $\gamma$  – сближение меридианов в начале местной системы координат.

Общие матрицы  $B_1, C, A$ , хотя и имеют квазидиагональный вид из блоков вида  $B_1, C, A$ , умножение на них дважды матрицы  $K_{XYZ}$  является непростой задачей для больших геодезических сетей. Допущенное здесь некоторое упрощение матриц вполне допустимо, если конечная ковариационная матрица служит только для оценки точности результатов. Если же полученная ковариационная матрица будет участвовать в уравнительных вычислениях в местной системе координат, то, возможно, придется использовать более строгие формулы.

Так как ковариационная матрица нужна нам именно для первой цели, то ниже предлагается более простая схема оценки точности полученных результатов. Для этого сначала рассмотрим некоторые свойства эллипса и эллипсоида ошибок, которым соответствуют ковариационные матрицы координат определяемых пунктов.

На рис. 5.3 изображен эллипс, оси которого совпадают с осями координат. Ему соответствует ковариационная матрица второго порядка

$$K = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{13} \end{bmatrix},$$

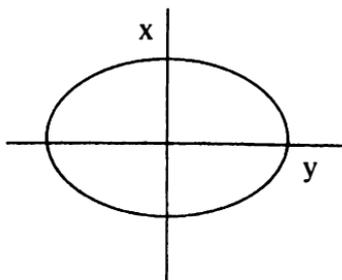


Рис. 5.3. Эллипс ошибок

где  $\sqrt{a_{11}}$  и  $\sqrt{a_{22}}$  являются полуосями эллипса,  $a_{12}$  выражает корреляцию между координатами  $x$  и  $y$ . При совпадении осей эллипса с осями системы координат  $a_{12} = 0$ .

При преобразовании системы координат, например при повороте вокруг начала координат на некоторый угол  $\alpha$ , ковариационную матрицу также необходимо соответствующим образом преобразовать.

Пусть матрица поворота имеет вид

$$\Theta = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Отметим, что такие матрицы являются ортогональными, так как  $\Theta\Theta^T = \mathbf{E}$ , т. е. транспонированная матрица является обратной к исходной. Для преобразования ковариационной матрицы, как отмечалось выше, ее необходимо умножить слева на матрицу  $\Theta$ , справа на  $\Theta^T$ . Тогда новая матрица будет иметь вид

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cos^2 \alpha - 2a_{12} \sin \alpha \cos \alpha + a_{22} \sin^2 \alpha & \\ (a_{11} - a_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + a_{12} \cos 2\alpha & \\ (a_{11} - a_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + a_{12} \cos 2\alpha & \\ a_{11} \sin^2 \alpha + 2a_{12} \sin \alpha \cos \alpha + a_{22} \cos^2 \alpha & \end{bmatrix}.$$

Ясно, что теперь элемент  $a'_{12}$  не будет равен нулю.

Чтобы привести эллипс ошибок обратно к осям координат, ковариационную матрицу надо умножить слева на матрицу  $\Theta^T$ , справа на матрицу  $\Theta$ . Тогда недиагональный элемент  $a_{12}$  снова становится равным нулю, т. е.

$$a_{12} = a_{11}' \sin \alpha \cos \alpha - a_{12}' (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - a_{22}' \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Из последнего уравнения можно определить значение угла, на который следует повернуть эллипс, чтобы привести его к координатным осям.

Разделим его на  $\cos^2\alpha$ , тогда

$$a_{12}' \operatorname{tg}^2\alpha - (a_{11}' - a_{22}') \operatorname{tg}\alpha - a_{12}' = 0, \quad (5.4.6)$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-a_{11}' + a_{22}' \pm \sqrt{(a_{11}' - a_{22}')^2 + 4a_{12}'^2}}{2a_{12}'}. \quad (5.4.6')$$

Чаще вместо этой формулы приводится другая, которая также получается из уравнения (5.4.6).

Так как  $0,5 a_{11}' \sin 2\alpha - a_{12}' \cos 2\alpha - 0,5 a_{22}' \sin 2\alpha = 0$ , то

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}'}{a_{11}' - a_{22}'}. \quad (5.4.7)$$

Но учитывая, что  $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha / (1 - \operatorname{tg}^2\alpha)$ , из последнего равенства легко получить предыдущее, которое более удобно для определения четверти, в которую попадает угол  $\alpha$ . Здесь четверть определяется по знакам числителя и знаменателя (табл. 5.1).

Т а б л и ц а 5.1

Числитель Знаменатель	+	-
+	1	4
-	2	3

Как видно из рис. 5.3, здесь рассматривается не математическая система координат, а геодезическая, когда ось  $x$  направлена на север, а ось  $y$  — на восток. Для иллюстрации изложенного приведем небольшой численный пример.

П р и м е р 5.1.

Пусть исходному эллипсу ошибок (рис. 5.3) соответствует ковариационная матрица

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Повернем этот эллипс на  $45^\circ$ , тогда

$$\mathbf{K}' = 0,5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Как видно из данного примера, при поворотах след матрицы, т. е. сумма диагональных элементов, не изменяется, на чем и основано оценивание положения пункта по формуле

$$M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}, \quad (5.4.8)$$

что не совсем верно, так как при заданной вероятности  $P$  точка не должна выходить за пределы эллипса ошибок. Т. е. для данного примера  $M \leq \sqrt{6}$ , тогда как получается  $M = \sqrt{8}$ . Вероятность попадания точки в эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

вычисляется по формуле [1]

$$P = 1 - e^{-k^2/2}, \quad (5.4.9)$$

где  $k = a/m_x = b/m_y$ ;  $a$ ,  $b$  – большая и малая полуоси эллипса соответственно.

Зависимость величин  $k$  и  $P$  показана в табл. 5.2 и 5.3.

Т а б л и ц а 5.2

k	0	1	2	3	4	5
P	0	0,3935	0,8647	0,9889	0,9997	1

P	0,05	0,1	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	0,999
k	0,32	0,459	0,845	1,177	1,552	1,794	2,146	3,717

Чтобы определить среднюю квадратическую ошибку по какому-нибудь направлению, необходимо задать его направляющие косинусы ( $\cos\beta$   $\sin\beta$ ). Тогда

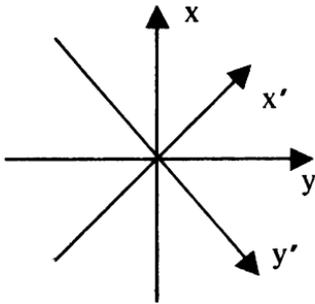


Рис. 5.4. Оси координат и эллипса

$$M^2 = [\cos\beta \ \sin\beta] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix}.$$

Например, ось  $x$  имеет направляющие косинусы  $[1 \ 1]$ , ось  $y$  —  $[0 \ 1]$ . Для рассматриваемого примера  $m_x = \pm 2$ ,  $m_y = \pm 2$ . Определим ошибки по направлениям  $\beta = \pm \pi/4$

$$m(\pi/4) = \sqrt{2}, \quad m(-\pi/4) = \sqrt{6}.$$

Следовательно, оси преобразованного эллипса расположены так, как показано на рис. 5.4.

Для приведения этого эллипса к осям координат, его необходимо повернуть в соответствии с формулой (5.4.6) на угол  $\alpha = \pm \pi/4$ . Здесь знак “плюс” относится к оси  $x$ , “минус” — к оси  $y$ . В соответствии с вышеуказанной формулой имеем

$$K = 0,5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим трехмерный эллипсоид вращения с ковариационной матрицей

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Здесь нас будут интересовать составляющие ошибок по осям топоцентрической системы координат, оси которой совпадают с направлениями осей плоской системы координат. Вращение по широте и долготе осуществляется с помощью матриц

$$\Theta'_B = \begin{bmatrix} \cos B' & 0 & \sin B' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin B' & 0 & \cos B' \end{bmatrix}; \quad \Theta_L = \begin{bmatrix} \cos L & \sin L & 0 \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

однако в нашей топоцентрической системе ось  $x$  направлена в другую сторону (на север), поэтому она становится левой, а не правой. Направляющие косинусы этой оси, выраженные через геодезические координаты и объединенные в матрицу, принимают вид

$$\Theta_B = \begin{bmatrix} -\sin B & 0 & \cos B \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos B & 0 & \sin B \end{bmatrix}.$$

Перемножив матрицы  $\Theta_B$  и  $\Theta_L$ , находим

$$\Theta = \begin{bmatrix} -\sin B \cos L & -\sin B \sin L & \cos B \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ \cos B \cos L & \cos B \sin L & \sin B \end{bmatrix}$$

матрицу направляющих косинусов осей топоцентрической системы координат.

Приведем эллипсоид ошибок к осям топоцентрической системы координат, тогда

$$a_{xx} = a_{11} \sin^2 B \cos^2 L + a_{22} \sin^2 B \sin^2 L + a_{33} \cos^2 B +$$

$$+ 2a_{12} \sin^2 B \sin L \cos L - 2a_{13} \sin B \cos B \cos L - \\ - 2a_{23} \sin B \cos B \sin L;$$

$$a_{yy} = a_{11} \sin^2 L + a_{22} \cos^2 L - 2a_{12} \sin L \cos L; \quad (5.4.10)$$

$$a_{HH} = a_{11} \cos^2 B \cos^2 L + a_{22} \cos^2 B \sin^2 L + a_{33} \sin^2 B + \\ + 2a_{12} \cos^2 B \sin L \cos L + 2a_{13} \sin B \cos B \cos L + \\ + 2a_{23} \sin B \cos B \sin L;$$

$$a_{xy} = a_{11} \sin B \sin L \cos L - a_{22} \sin B \sin L \cos L + \\ + a_{12} \sin B (\sin^2 L - \cos^2 L) - a_{13} \cos B \sin L + a_{23} \cos B \cos L;$$

$$a_{xH} = - a_{11} \sin B \cos B \cos^2 L - a_{22} \sin B \cos B \sin^2 L + \\ + a_{33} \sin B \cos B - 2a_{12} \sin B \cos B \sin L \cos L + \\ + a_{13} \cos L (\cos^2 B - \sin^2 B) + a_{23} \sin L (\cos^2 B - \sin^2 B);$$

$$a_{yH} = - a_{11} \cos B \sin L \cos L + a_{22} \cos B \sin L \cos L - \\ - a_{12} \cos B (\cos^2 L - \sin^2 L) - a_{13} \sin B \sin L + a_{23} \sin B \cos L.$$

По условию последние три уравнения должны быть равны нулю, т. е.

$$a_{11} \sin B \sin L \cos L - a_{22} \sin B \sin L \cos L + \\ + a_{12} \sin B (\sin^2 L - \cos^2 L) - a_{13} \cos B \sin L + a_{23} \cos B \cos L = 0; \\ - a_{11} \sin B \cos B \cos^2 L - a_{22} \sin B \cos B \sin^2 L + a_{33} \sin B \cos B - \\ - 2a_{12} \sin B \cos B \sin L \cos L + a_{13} \cos L (\cos^2 B - \sin^2 B) + \\ + a_{23} \sin L (\cos^2 B - \sin^2 B) = 0;$$

$$- a_{11} \cos B \sin L \cos L + a_{22} \cos B \sin L \cos L - \\ - a_{12} \cos B (\cos^2 L - \sin^2 L) - a_{13} \sin B \sin L + a_{23} \sin B \cos L = 0.$$

Умножив первое уравнение на  $\sin B$ , третье на  $-\cos B$ , найдем

$$a_{11} \sin 2L - 2a_{12} \cos 2L - a_{22} \sin 2L = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}2L = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}, \quad (5.4.11)$$

что совпадает с формулой (5.4.7) для эллипса.

Из второго уравнения получаем

$$\operatorname{tg}2B = \frac{2(a_{13} \cos L + a_{23} \sin L)}{a_{11} \cos^2 L + a_{12} \sin 2L + a_{22} \sin^2 L - a_{33}}. \quad (5.4.12)$$

Формулы (5.4.10) позволяют вычислять средние квадратические ошибки плоских координат без учета сближения меридианов. Более строгими являются формулы

$$m_x^2 = a_{11} \sin^2 B \cos^2 L_0 + a_{22} \sin^2 B \sin^2 L_0 + a_{33} \cos^2 B + \\ + 2(a_{12} \sin^2 B \sin L_0 \cos L_0 - a_{13} \sin B \cos B \cos L_0 - \\ - a_{23} \sin B \cos B \sin L_0);$$

$$m_y^2 = (a_{11} \sin^2 L_0 + a_{22} \cos^2 L_0 - 2a_{12} \sin L_0 \cos L_0) \cos^2 B; \quad (5.4.13)$$

$$m_H^2 = a_{11} \cos^2 B \cos L_0 + a_{22} \cos^2 B \sin^2 L_0 + a_{33} \sin^2 B + \\ + 2(a_{12} \cos^2 B \sin L_0 \cos L_0 + a_{13} \sin B \cos B \cos L_0 + \\ + a_{23} \sin B \cos B \sin L_0),$$

где  $L_0$  — долгота осевого меридиана той зоны, к которой относятся координаты  $x$ ,  $y$ .

Рассмотрим возможность оценки точности функций плоских координат — расстояний и дирекционных углов. Так как расстояния инвариантны относительно поворотов, то будем оценивать ошибку расстояния непосредственно в геоцентрической системе координат. Среднюю квадратическую ошибку дирекционного угла будем оценивать как ошибку направления в горизонтальной плоскости, перпендикулярной к направлению между пунктами.

В случае уравнивания плоских прямоугольных координат мы имеем эллипсы ошибок для пунктов, а оцениваемые функции вычисляются по координатам с помощью формул

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \operatorname{tg} \alpha = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1). \quad (5.4.14)$$

Если продифференцировать формулы (5.4.14) по координатам пунктов, получим

$$ds = -\cos \alpha dx_1 - \sin \alpha dy_1 + \cos \alpha dx_2 + \sin \alpha dy_2; \quad (5.4.15)$$

$$da = (\sin \alpha dx_1 - \cos \alpha dy_1 - \sin \alpha dx_2 + \cos \alpha dy_2)/s,$$

т. е. направляющие косинусы равны соответственно

$$U_s = (-\cos \alpha \quad -\sin \alpha \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha);$$

$$U_\alpha = (\sin \alpha \quad -\cos \alpha \quad -\sin \alpha \quad \cos \alpha).$$

Для дирекционного угла полученную поперечную к стороне составляющую, кроме того, необходимо поделить на ее длину.

Фрагмент ковариационной матрицы координат пунктов, относящийся к данным пунктам  $i, j$  и умножаемый на направляющие косинусы, будет иметь вид

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} m_{ii}^{xx} & m_{ii}^{xy} & m_{ij}^{xx} & m_{ij}^{xy} \\ m_{ii}^{xy} & m_{ii}^{yy} & m_{ij}^{xy} & m_{ij}^{yy} \\ m_{ji}^{xx} & m_{ji}^{xy} & m_{jj}^{xx} & m_{jj}^{xy} \\ m_{ji}^{xy} & m_{ji}^{yy} & m_{jj}^{xy} & m_{jj}^{yy} \end{bmatrix}, \quad (5.4.16)$$

где верхние и нижние индексы относятся к неизвестным и номерам пунктов соответственно.

Если в ковариационной матрице координат пунктов эллипсы ошибок выбираемых пунктов расположены в обратном порядке, т. е. элементы, относящиеся к первому пункту, расположены ниже элементов второго пункта, то фрагмент будет иметь другой вид

$$\mathbf{K}_{ji} = \begin{bmatrix} m_{jj}^{xx} & m_{jj}^{xy} & m_{ji}^{xx} & m_{ji}^{xy} \\ m_{jj}^{xy} & m_{jj}^{yy} & m_{ji}^{xy} & m_{ji}^{yy} \\ m_{ji}^{xx} & m_{ji}^{xy} & m_{ii}^{xx} & m_{ii}^{xy} \\ m_{ji}^{xy} & m_{ji}^{yy} & m_{ii}^{xy} & m_{ii}^{yy} \end{bmatrix}, \quad (5.4.17)$$

т. е. недиагональные блоки, связывающие пункты, транспонируются, а сами эллипсы ошибок переставляются местами.

Обозначим матрицы (5.4.16) и (5.4.17) в обобщенном треугольном виде

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_4 & m_7 \\ & m_3 & m_5 & m_8 \\ & & m_6 & m_9 \\ & & & m_{10} \end{bmatrix},$$

тогда

$$m_s^2 = \sigma_x^2 \cos^2 \alpha + 2\sigma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_y^2 \sin^2 \alpha; \quad (5.4.18)$$

$$m_\alpha^2 = (\sigma_x^2 \sin^2 \alpha - 2\sigma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_y^2 \cos^2 \alpha) (\rho''/s)^2,$$

где  $\sigma_x^2 = m_1 - 2m_4 + m_6$ ;  $\sigma_{xy} = m_2 - m_5 - m_7 + m_9$ ;

$\sigma_y^2 = m_3 - 2m_8 + m_{10}$ .

Направляющие косинусы направления между пунктами будут равны

$$\cos \alpha = \frac{\Delta X}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}}; \quad \cos \beta = \frac{\Delta Y}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}};$$

$$\cos \gamma = \frac{\Delta Z}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}}.$$

Направляющие косинусы в поперечном направлении вычисляются как векторное произведение векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{t}$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{t} = \left( \begin{bmatrix} \cos B \sin L & \sin B \\ \cos \beta & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin B & \cos B \cos L \\ \cos \gamma & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos B \cos L & \cos B \sin L \\ \cos \alpha & \cos \beta \end{bmatrix} \right),$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор нормали;  $\mathbf{t}$  – вектор направления между пунктами. Тогда получаем направляющие косинусы поперечного направления в виде

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos B \sin L \cos \gamma - \sin B \cos \beta; \\ \cos b &= \sin B \cos \alpha - \cos B \cos L \cos \gamma; \\ \cos c &= \cos B (\cos L \cos \beta - \sin L \cos \alpha). \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

Для вычисления ошибки расстояния и дирекционного угла из общей ковариационной матрицы пунктов выбирается фрагмент, который относится к рассматриваемым пунктам 1 и 2

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{14} & a_{24} & a_{34} \\ a_{45} & a_{55} & a_{56} & a_{15} & a_{25} & a_{35} \\ a_{46} & a_{56} & a_{66} & a_{16} & a_{26} & a_{36} \\ a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Для обратного направления, от пункта 2 к пункту 1, ковариационная матрица будет иметь вид, представленный рядом с первой матрицей. Для расстояния направляющие

косинусы равны ( $-\cos a - \cos b - \cos \gamma \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ ), поэтому получаем

$$m_d^2 = (a_{11} - 2a_{14} + a_{44}) \cos^2 \alpha + (a_{22} - 2a_{25} + a_{55}) \cos^2 \beta + \\ + (a_{33} - 2a_{36} + a_{66}) \cos^2 \gamma + 2(a_{12} - a_{24} - a_{15} + a_{45}) \cos \alpha \cos \beta + \\ + 2(a_{13} - a_{34} - a_{16} + a_{46}) \cos \alpha \cos \gamma + 2(a_{23} - a_{35} - a_{26} + a_{56}) \times \\ \times \cos \beta \cos \gamma. \quad (5.4.20)$$

Для дирекционного угла поперечную составляющую необходимо поделить на расстояние, поэтому получаем

$$m_\alpha^2 = [(a_{11} - 2a_{14} + a_{44}) \cos^2 a + (a_{22} - 2a_{25} + a_{55}) \cos^2 b + \\ + (a_{33} - 2a_{36} + a_{66}) \cos^2 c + 2(a_{12} - a_{24} - a_{15} + a_{45}) \cos a \cos b + \\ + 2(a_{13} - a_{34} - a_{16} + a_{46}) \cos a \cos c + 2(a_{23} - a_{35} - a_{26} + a_{56}) \times \\ \times \cos b \cos c] (\rho''/D)^2,$$

где  $D$  – расстояние между пунктами.

Здесь также не учтено сближение меридианов, которое используется при переходе от геодезического азимута к дирекционному углу

$$\alpha = A - \gamma + \delta, \quad (5.4.21)$$

где  $A$  – геодезический азимут;  $\delta$  – поправка за кривизну изображения геодезической линии на плоскости.

Однако при оценке точности такое пренебрежение в  $2-3^\circ$  вполне допустимо и полностью компенсируется простотой алгоритма по сравнению с необходимостью вычислений по формуле (5.4.5).

Для учета сближения меридианов при вычислении направляющих косинусов по формулам (5.4.18) следует принять для всех пунктов данной зоны  $L = L_0$ , где  $L_0$  – долгота осевого меридиана зоны, так как сетка абсцисс параллельна осевому меридиану. Поэтому дополнительно придется определять, в какую зону попадает данный пункт. Неучет поправки  $\delta$  не повлияет на результаты даже самого строго уравнивания полученных функций в местной системе координат, если такое уравнивание потребуется проводить.

### **НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО УРАВНИВАНИЯ**

В предыдущих главах изложена основная схема уравнительных вычислений в пространственной прямоугольной системе координат. Однако при ее реализации возникает ряд проблем, для преодоления которых необходимы специальные технологические меры.

Это, прежде всего, получение в пространственной системе координат исходных пунктов. Как известно, при пересчете плоских координат пунктов в пространственные необходимо использование геодезических высот, которые являются суммой нормальных высот и высот квазигеоида. Точность высот квазигеоида, взятая с карт, составляет по России от 2 м на европейской части территории до 4–6 м на востоке. Если даже точность разности высот квазигеоида на небольшой территории составляет несколько дециметров, это непоправимо искажает результаты уравнивания. Для координат одного исходного пункта, как при свободном уравнивании, высоту квазигеоида можно принять нулевой, и тогда нормальные высоты определяемых пунктов будут вычислены относительно этого исходного в предположении, что высоты квазигеоида на всех пунктах равны. Но если исходных пунктов будет больше, ошибки высот квазигеоида на них будут непосредственно влиять на результаты уравнивания, причем не только высот, но и плановых координат, так как в геоцентрической прямоугольной системе все координаты взаимосвязаны.

Вторая проблема состоит в том, что если координаты исходных пунктов даны в условной системе координат, то для перехода от них в общеземную систему координат необходимо знать ключи местной системы и параметры

перехода от государственной системы координат к общеземной. Если параметры перехода являются открытыми и опубликованы в печати, то ключи местной системы закрыты и они доступны не всем производителям геодезических работ с помощью спутниковой аппаратуры. Это приводит к легальному или нелегальному распространению закрытых данных или изобретению замороженных способов их определения. Преодоление этой проблемы с помощью математических расчетов привело бы к потере интереса к таким данным. Причем предлагаемые методы определения ключей позволяют определять их приближенные значения для одноразового использования, которые включают разного рода смещения в наблюдениях и вычислениях. Однако при наличии безошибочных координат в двух системах методики дают возможность получать и точные значения ключей, поэтому знание этих методов может помочь при разработке более эффективных ключей и их сохранению.

Наконец, после определения уравнированных координат пунктов в пространственной прямоугольной системе возникает проблема получения нормальных высот определяемых пунктов, которые интересуют потребителей. Эта проблема связана с получением местной карты высот квазигеоида, которая не всегда совпадает с официальными картами из-за ряда причин, частично анализируемых ниже. Точность определения высот квазигеоида по местной карте зависит в основном от точности нормальных высот на исходных пунктах, которые на пунктах АГС получаются из геометрического нивелирования и имеют примерно такую же точность как спутниковые относительные измерения. Можно обойтись без карты высот квазигеоида в традиционном ее понимании, если использовать математические методы интерполяции высот с исходных на определяемые пункты, тем более, что высоты квазигеоида изменяются весьма плавно, кроме тектонически активных регионов.

---

## 6.1. Получение пространственных прямоугольных координат исходных пунктов

---

### 6.1.1. Традиционные методы получения высот квазигеоида

Понятие высоты квазигеоида введено М.С. Молоденским в 1945 году в работе “Внешнее гравитационное поле и фигура Земли” и определяется им в виде

$$\zeta = \frac{1}{\gamma} \sum_n T_n,$$

где  $\gamma$  – значение нормальной силы тяжести в данной точке;  $T_n$  – возмущающий потенциал простого слоя.

В первом приближении высота геоида определяется формулой Стокса

$$\zeta = \frac{1}{4\pi\gamma R} \int (g - \gamma) S(\psi) d\sigma,$$

где  $R$  – радиус Земли как сферы;  $g - \gamma$  – аномалия силы тяжести в свободном воздухе;  $\psi$  – дуга большого круга от данной точки до текущей;  $\sigma$  – поверхность шара; функция Стокса равна

$$S(\psi) = \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right).$$

Обычно этот интеграл заменяют суммированием по площадкам  $\Delta S_i$  средних значений аномалий  $\Delta g_i$ ,

$$\zeta = \frac{1}{2\pi\gamma R} \sum_i \Delta g_i S(\psi_i) \Delta S_i. \quad (6.1.1)$$

Значения  $\Delta g_i$  должны быть известны для всех трапеций, поэтому применяются различные способы заполнения “белых пятен”. Кроме того, функция Стокса не убывает с

возрастанием  $\psi$ , поэтому аномалии, расположенные на  $90^\circ$  и даже на  $150-160^\circ$  от исследуемой точки, весьма заметно влияют на величину  $\xi$  [22]. Хотя наибольшее влияние на высоту геоида оказывают центральное точечное значение и ближайшая зона к исследуемой точке, значение высоты получается довольно сглаженным и с точностью не лучше нескольких дециметров.

Другим способом получения высот квазигеоида является вычисление по разложению в виде сферических функций [66]

$$\zeta = \frac{fM}{a_e \gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a_e}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\Delta C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (6.1.2)$$

где  $fM$  – геоцентрическая гравитационная постоянная;  $a_e$  – большая полуось земного эллипсоида;  $r$  – радиус-вектор исследуемой точки;  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  – коэффициенты ГПЗ;  $P_{nm}(\sin \varphi)$  – сферические функции;  $\varphi$ ,  $\lambda$  – сферические координаты точки;  $\Delta C_{nm} = C_{nm} - C_{nm}^0$ ,  $C_{nm}^0$  – соответствующий зональный коэффициент.

Даже при использовании разложения до 360 степени и порядка эта формула дает сглаженные значения высоты квазигеоида на площадках со стороной 50 км. Модели точечных масс также дают сглаженные значения высот квазигеоида.

В настоящее время на морских поверхностях высоты квазигеоида определяются с помощью спутниковых радиовысотометров с точностью около 1 дм. На суше при уравнивании астрономо-геодезических сетей обычно применяют метод астрономо-гравиметрического нивелирования. При этом методе астрономо-геодезические высоты квазигеоида, полученные на астропунктах, интерполируются на остальные пункты сети через гравиметрические высоты.

Относительный метод космической геодезии позволяет получать высоты квазигеоида с точностью, сравнимой с тригонометрическим нивелированием.

### 6.1.2. Получение высот квазигеоида относительным методом космической геодезии

Чтобы проиллюстрировать сущность метода и его возможности, рассмотрим пример создания опорной межевой сети с помощью одночастотной аппаратуры Dimension (Ashtech), схема которой представлена на рис. 6.1.

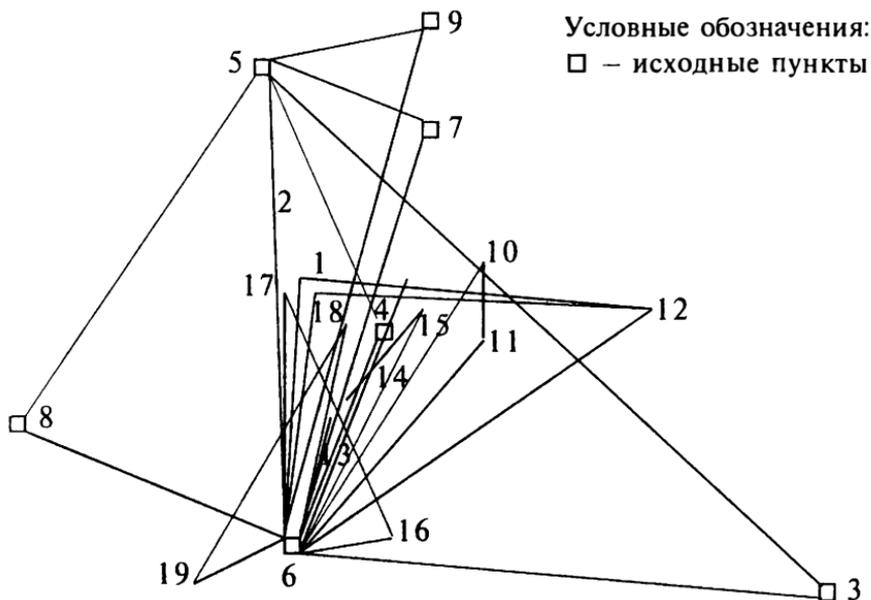


Рис. 6.1. Схема межевой сети (20 пунктов, 34 стороны)

Пункты 5 и 6 были получены в результате простого осреднения по ближайшим исходным пунктам. Их точность оказалась невысокой, поэтому в некоторых вариантах они также были приняты за определяемые. В табл. 6.1 представлены измеренные разности координат и их ковариационные матрицы, в табл. 6.2 – предварительные координаты пунктов, выбранные из *l*-файлов.

**Разности координат и их ковариационные матрицы**

Сторона	D X DY DZ	$K_{xx}$	$K_{xy}$ $K_{yy}$	$K_{xz}$ $K_{yz}$ $K_{zz}$
1	2	3	4	5
1 – 2	-3,5581 1,5044 1,6083	0,89094721	0,3790928936 0,43349056	0,7530972223 0,5253090488 1,82871529
3 – 4	2378,0951 -17953,1196 6175,6188	1,75165225	1,026451013 1,56475081	1,442024719 2,0588838298 5,37405124
3 – 5	-5183,6696 -28540,5369 14820,8638	1,97205849	1,182223998 1,96868961	1,6996327158 2,6211044511 6,92268721
3 – 6	9787,8535 -18690,1318 2376,8258	0,27321529	0,184047897 0,28462225	0,236317897 0,241200685 0,60762025
4 – 5	-7561,7648 -10587,4175 8645,2336	0,27321529	0,184047897 0,28462225	0,236317897 0,241200685 0,60762025
4 – 6	7409,7623 -737,006 -3798,7769	0,269361	0,10247655 0,15594601	0,225862572 0,1619409869 0,70040161
7 – 5	42,3552 -10530,2837 4326,5659	0,47032164	0,312172731 0,49042009	0,4224377124 0,4172261346 1,01969604
7 – 6	15013,8815 -679,8755 -8117,4419	0,69538921	0,3372091464 0,52142841	0,623857268 0,476123856 1,607824
8 – 5	-19528,6156 5512,4638 8661,7957	1,692601	0,8114337 1,08056025	2,364926576 1,25045613 7,14599824
8 – 6	-4557,0893 15362,8742 -3782,2174	1,00480576	0,419775048 0,60140025	1,096866176 0,72735696 3,818116
9 – 5	5428,5711 – 3933,9374 – 1423,5911	1,352569	0,997884238 1,97852356	1,112173411 1,0584608736 2,45768329
9 – 6	20400,1068 5916,4773 -13867,5924	1,63456225	2,035921755 5,17517001	1,950359421 3,7636446078 4,61648196
10 – 11	1636,9839 1691,8127 -1626,0121	0,741321	0,338830191 0,70107129	0,301115808 0,7442692716 2,12343184

1	2	3	4	5
12 - 2	4191,3006 -15330,6483 4030,0688	3,69677529	1,5731396811 1,79908569	3,361187232 2,1884865408 8,48906496
12 - 1	4194,8584 -15332,1531 4028,4587	1,65482496	0,7639942464 0,88868329	1,59294912 1,09079817 4,1209
13 - 14	-348,9687 40,0003 176,0063	0,37429924	0,163726857 0,35366809	0,385103628 0,28795374 1,46531025
13 - 15	-4730,9586 1350,6404 2091,9812	0,98089216	0,5719678848 2,19276864	1,26483984 1,323790776 6,52393764
14 - 15	-4381,9974 1310,6332 1915,9735	1,033068896	0,7665770112 2,36913664	1,2958581636 1,6160953536 6,24950001
16 - 17	-7195,6455 -7992,8845 7315,7325	1,14789796	0,8473349038 1,05493441	0,9511396356 0,9514561392 1,65533956
18 - 19	12144,4114 -4226,1553 -5007,5932	7,59057601	3,4112876772 2,51983876	8,777395947 3,655845696 1,473331456
5 -- 6	14971,5309 9850,4145 -12444,0044	0,31606884	0,1940478276 0,35414401	0,312223392 0,2809205256 0,85673536
6 - 2	-10048,0585 -4491,5428 7448,5777	2,01384481	0,8003724 0,8836	1,65694116 0,9512048 3,786916
6 - 1	-10044,5007 -4493,0493 7446,9665	1,15906756	0,532093401 0,61544025	1,041804288 0,746492544 2,60112384
6 - 10	-13624,6593 2284,2595 6670,0383	1,46023056	0,4913886096 0,93741124	0,487661904 0,993097263 2,82744225
6 - 11	-11987,6709 3976,0678 5044,0138	1,23520996	0,472211632 0,817216	0,620739128 0,732108016 0,94965369
6 - 12	-14239,3594 10839,1023 3418,5022	0,82682649	0,386707104 0,44156025	0,8246878164 0,54338823 2,21057424
6 - 17	-9803,1442 -4734,576 7419,8156	0,55815841	0,3632205954 0,49646116	0,4034467007 0,4451085028 1,03815721
6 - 13	-5883,8527 101,8421 3197,1007	0,84529636	0,381845208 1,07806689	1,19379493 1,2942534096 6,74388961

1	2	3	4	5
6 – 14	-6232,8089 141,848 3373,1139	1,08597241	0,5328507404 1,35047641	1,3749217296 1,6290747777 7,55535169
6 – 19	2714,8212 -3598,0668 -66,1593	7,52130625	3,603398175 2,83754025	6,4325255225 3,046546272 7,98571081
6 – 16	-2607,4998 3258,3105 104,0857	0,56490256	0,39774672 0,540225	0,4348810212 0,544651905 1,03042801
6 – 18	-9429,5934 628,0882 4941,4282	3,26850241	1,744370394 1,530169	2,707915464 1,200404592 4,45041216
6 – 20	-12225,3465 925,8069 6448,5746	3,77874721	3,6751898253 6,70758201	3,3683024445 5,1197272695 5,95604025
6 – 15	-10614,8129 1452,4772 5289,083	1,02921025	0,636063094 2,33845264	1,525797855 1,939132644 8,696601

**Примечание.** Элементы ковариационной матрицы увеличены в 10 000 раз.

Т а б л и ц а 6.2

### Предварительные координаты пунктов

Номер пункта	X	Y	Z
1	2	3	4
1	2 937 922,7402	2 174 362,0896	5 209 666,4265
2	2 937 919,1821	2 174 363,5941	5 209 668,0348
3	2 938 179,3007	2 197 545,1083	5 199 842,6122
4	2 940 557,3958	2 179 591,9887	5 206 018,231
5	2 932 995,6311	2 169 004,5713	5 214 663,476
6	2 947 967,1542	2 178 854,9765	5 202 219,4379
7	2 932 953,3588	2 179 535,0574	5 210 336,8908
8	2 952 524,333	2 163 492,281	5 206 001,8629
9	2 927 567,2238	2 172 938,7789	5 216 086,9865
10	2 934 342,5815	2 181 139,3984	5 208 889,4983
11	2 935 979,5654	2 182 831,2111	5 207 263,4863
12	2 933 727,8814	2 189 694,2412	5 205 637,9622

1	2	3	4
13	2 942 083,3882	2 178 956,981	5 205 416,5607
14	2 941 734,4195	2 178 996,9813	5 205 592,5671
15	2 937 352,4296	2 180 307,6215	5 207 508,5419
16	2 945 359,741	2 182 113,4494	5 202 323,5457
17	2 938 164,0955	2 174 120,5649	5 209 639,2782
18	2 938 537,6475	2 179 483,2271	5 207 160,8883
19	2 950 682,0589	2 175 257,0718	5 202 153,295
20	2 935 741,8943	2 179 780,9459	5 208 668,0346

При формировании последнего файла за предварительные принимаются те координаты пункта, которые встречаются впервые при считывании файлов разностей координат, в данном случае  $\Delta$ -файлов. Последующие значения координат этого пункта, имеющиеся в  $\Delta$ -файлах игнорируются.

В табл. 6.3 приведены значения координат пунктов, полученные из нескольких базисных линий, и максимальные расхождения между одноименными координатами (последние три графы). Все значения даны в сантиметрах, в координатах общие части исключены. Как видно из этих данных, координаты пунктов отличаются до 3 дм, что подтверждает необходимость уравнивания геодезической сети, построенной относительным методом, при точных геодезических работах. Для картографических целей можно обойтись простым осреднением одноименных координат. Координаты пунктов, не приведенные в табл. 6.3, принимались при вычислении разностей координат за ведущие, поэтому их координаты из разных файлов не расходятся между собой.

Так как геоцентрические прямоугольные координаты не согласованы между собой с помощью измерений, предварительно необходимо выполнить свободное уравнивание сети с одним исходным пунктом. Для этого предварительные координаты любого из пунктов могут быть приняты за исходные. Желательно, чтобы исходный пункт распола-

Номер пункта	X	Y	Z	$\delta X$	$\delta Y$	$\delta Z$
1	4,02	8,96	2,65	-0,03	-0,15	-0,56
	3,99	8,81	2,09			
2	8,21	9,41	3,48	0,04	0,32	0,67
	8,20	9,29	3,10			
	8,24	9,61	3,77			
4	39,58	198,87	23,10	5,76	10,52	-9,04
	45,22	209,39	14,06			
5	63,11	57,13	47,60	16,38	27,03	-10,18
	64,74	67,64	37,42			
	71,40	77,38	45,67			
	71,74	74,56	65,86			
	72,86	75,95	47,18			
	79,49	84,16	39,54			
6	15,42	497,65	43,79	17,64	27,97	28,18
	21,45	508,79	36,37			
	24,04	518,20	44,88			
	24,08	513,89	46,00			
	24,37	515,59	64,55			
	25,95	517,39	46,74			
	33,06	525,62	39,41			
11	6,54	1,11	8,63	0,45	-0,44	-1,25
	6,99	0,67	7,38			
14	1,95	8,13	6,71	1,25	0,56	0,69
	3,20	8,69	7,40			
15	2,96	2,15	4,19	-0,67	0,54	0,55
	3,46	2,02	4,74			
	2,79	1,61	4,30			
17	9,55	6,49	7,82	0,11	-0,20	-2,25
	9,66	6,29	5,57			
19	5,89	7,18	29,50	0,31	0,04	0,58
	6,20	7,22	30,08			

гался ближе к центру сети для того, чтобы ослабить влияние накопления ошибок разностей координат. Координаты исходного пункта могут быть получены из плоских прямоугольных координат, выписанных из каталогов, с учетом или без учета высоты квазигеоида, взятой с карты, путем их пересчета в общеземную систему, если известны параметры перехода и ключи исходной системы координат. При таком уравнивании координаты остальных пунктов будут определены относительно исходного пункта.

Многие землемеры ограничиваются свободным уравниванием, пересчитав полученные из такого уравнивания координаты определяемых пунктов обратно в местную систему координат с использованием одних и тех же параметров перехода от общеземной системы к системе 1942 года и ключей местной системы координат. Однако, как уже говорилось выше, в этом случае на остальных исходных пунктах образуются неустранимые невязки координат. Кроме того, молчаливо принимается, что на всех пунктах сети высота квазигеоида равна тому же значению, что и на единственном исходном пункте. Но в достаточно больших сетях, например в пределах областного города, эта гипотеза не подтверждается, что будет показано в последующих примерах.

Таблица 6.4

**Координаты пунктов  $x$ ,  $y$ ,  $H$  из свободного уравнивания**

Номер пункта	$x$	$y$	$H$
1	6 099 137,455	2 315 306,559	158,943
2	6 099 140,036	2 315 309,848	159,14
3	6 082 307,647	2 334 037,476	152,459
4	6 092 800,524	2 318 036,16	159,4
5	6 107 837,605	2 313 803,806	178,21
6	6 086 029,352	2 313 134,042	207,436
7	6 100 377,197	2 322 403,656	188,892
8	6 092 463,914	2 297 978,51	192,256
9	6 110 404,854	2 320 158,588	195,192
10	6 097 857,407	2 322 903,764	186,138
11	6 095 028,325	2 323 331,261	181,583
12	6 092 334,615	2 330 227,793	162,29
13	6 091 739,57	2 316 633,175	151,671
14	6 092 054,287	2 316 868,359	149,004
15	6 095 453,114	2 320 479,489	151,966
16	6 086 279,038	2 317 301,151	202,258
17	6 099 075,712	2 314 969,696	165,442
18	6 094 855,118	2 319 120,323	130,426
19	6 085 891,396	2 308 628,317	180,319
20	6 097 442,887	2 320 985,188	183,55

Результаты свободного уравнивания рассматриваемой межевой сети в местной системе координат приведены в табл. 6.4.

При этом уравнивании за исходные были приняты координаты пункта 4 из каталога координат, а высота квазигеоида была принята равной нулю. Для сравнения приведем координаты остальных исходных пунктов:

3,	6 028 307,73,	2 334 037,385,	152,500
5,	6 107 837,609,	2 313 803,901,	178,314
6,	6 086 029,383,	2 313 134,044,	207,546
7,	6 100 377,166,	2 322 403,744,	189,000
8,	6 092 464,094,	2 297 978,545,	192,500
9,	6 110 404,707,	2 320 158,719,	195,300.

Из сравнения координат исходных пунктов с полученными из свободного уравнивания можно видеть, что расхождения достигают 2 дм и более.

Теперь координаты  $x$ ,  $y$  исходных пунктов заменяются в файле их каталожными значениями, неизменными остаются геодезические высоты  $N$ . Эти координаты перевычисляются в геоцентрические прямоугольные координаты, и выполняется уравнивание разностей координат в общеземной системе со всеми исходными пунктами.

Таким образом происходит разделение плановых и высотных составляющих положения пункта. Плановые координаты получают поправки, а высотные составляющие не были изменены по сравнению со свободным уравниванием, и поэтому сдвиг в плане почти не затронет высотную составляющую.

Полученные из уравнивания геоцентрические координаты снова пересчитываются в систему координат исходных пунктов. Имея нормальные высоты на исходных пунктах, теперь мы можем вычислить для них высоты квазигеоида. Естественно, что полученная система высот квазигеоида будет пригодна лишь для данного частного уравнивания, так как они могут иметь общий сдвиг и наклон. Наклоны исключаются с помощью неизвестных в результате “подгонки” к исходным пунктам в ходе уравни-

вания. Однако эта система высот вполне пригодна для распространения на определяемые пункты.

В табл. 6.5 приведены координаты пунктов после уравнивания. Так как ключи местной системы были определены приближенно, то произошел небольшой сдвиг по высоте, что никак не сказывается на взаимном положении пунктов. Разность геодезических высот из уравнивания и нормальных высот на исходных пунктах позволяет вычислить на них высоты квазигеоида и использовать их для составления карты высот на район геодезических работ, т. е. получить карту местного квазигеоида для данного случая уравнивания. Для другого варианта уравнивания карта может оказаться уже другой.

Т а б л и ц а 6.5

**Координаты пунктов из уравнивания**

Номер пункта	х	у	Н
1	6 099 137,444	2 315 306,617	161,357
2	6 099 140,025	2 315 309,906	161,554
3	6 082 307,73	2 334 037,385	154,917
4	6 092 800,524	2 318 036,160	161,828
5	6 107 837,609	2 313 803,901	180,618
6	6 086 029,383	2 313 134,044	209,865
7	6 100 377,166	2 322 403,744	191,317
8	6 092 464,094	2 297 978,545	194,66
9	6 110 404,707	2 320 158,719	197,605
10	6 097 857,363	2 322 903,797	188,562
11	6 095 028,287	2 323 331,28	184,012
12	6 092 334,551	2 330 227,783	164,73
13	6 091 739,571	2 316 633,195	154,097
14	6 092 054,287	2 316 868,38	151,429
15	6 095 453,088	2 320 479,517	154,391
16	6 086 279,049	2 317 301,145	204,692
17	6 099 075,703	2 314 969,754	167,856
18	6 094 855,1	2 319 120,352	132,85
19	6 085 891,448	2 308 628,329	182,744
20	6 097 442,853	2 3209 85,224	185,972

---

## 6.2. Вычисление и использование ключей местной системы координат

---

В работе [56] изложена идея вычисления ключей местной системы координат. Рассмотрим этот вопрос более детально, так как излагаемая технология уравнивания геодезических сетей позволяет попутно решить данную проблему. Основой идеи вычисления ключей является сравнение координат и их функций для одних и тех же пунктов в разных системах координат, причем ключи одной из систем считаются известными, например для системы координат Гаусса-Крюгера. Так как эти системы отличаются только ключами (проекция и эллипсоид одни и те же), поэтому и возникает возможность их определения. В указанной работе для реализации этой идеи предлагается использовать геодезические азимуты.

Для определенности положим, что  $x_1, y_1, x_2, y_2$  — координаты двух точек в системе 1942 года,  $x'_1, y'_1, x'_2, y'_2$  — координаты этих же точек в условной системе координат. Тогда геодезический азимут равен

$$A = \alpha_1 + \gamma_1 - \delta_1 = \alpha_2 + \gamma_2 - \delta_2, \quad (6.2.1)$$

где  $\alpha_i = \arctg(y_{i+1} - y_i)/(x_{i+1} - x_i)$  — дирекционные углы, вычисляемые по координатам;  $\gamma_i$  — сближение меридианов,  $\delta_i$  — поправка за кривизну изображения геодезической линии на плоскости в проекции Гаусса.

Так как параметры Системы координат 1942 года известны, сразу можно вычислить геодезический азимут  $A$ . Тогда сближение меридианов в условной системе определяется по формуле

$$\gamma_2 = A - \alpha_2 + \delta_2.$$

Учитывая, что

$$\gamma = \frac{1}{\sin B} [1 + f^2 \cos^2 B (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4)/3 + f^4 \cos^4 B \times \\ \times (2 - \operatorname{tg}^2 B)/15],$$

можем написать

$$l = \frac{A - \alpha_2 + \delta_2}{\sin B \left[ 1 + l^2 \cos^2 B (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) / 3 + l^4 \cos^4 B (2 - \operatorname{tg}^2 B) / 15 \right]}, \quad (6.2.2)$$

где  $l = L - L_0$ ;  $\eta^2 = e'^2 \cos^2 B$ ;  $e'^2 = e^2 / (1 - e^2)$ ;

$$\delta_2 = -\frac{\Delta x}{2R_m^2} \left( y_m - \frac{\Delta y}{6} - \frac{y_m^2}{3R_m} \right) - \frac{e^2 y_m^2 \Delta y}{2R_m^3} \sin 2B;$$

$R_m = a\sqrt{1-e^2} / (1 - e^2 \sin^2 B_m)$ ;  $\Delta x = x'_2 - x'_1$ ;  $\Delta y = y'_2 - y'_1$ ;  
 $y_m = (y'_1 + y'_2) / 2$ ;  $B_m$  — геодезическая широта точки с координатами  $x = (x_1 + x_2) / 2$ ;  $y = (y_1 + y_2) / 2$ ;  $a$ ,  $e^2$  и  $e'^2$  — большая полуось, квадраты первого и второго эксцентриситетов референц-эллипсоида соответственно. Геодезические координаты  $B$ ,  $L$  можно получить в результате пересчета плоских прямоугольных координат по формулам раздела 1.8.3 главы 1.

Уравнение (6.2.2) решается приближениями, если заменять величину  $l$  значением из предыдущего приближения, в первом приближении  $l = 0$ . После получения  $l$  по критерию  $|l_i - l_{i-1}| < \epsilon$ , где  $\epsilon$  — некоторая достаточно малая величина, вычисляем долготу осевого меридиана

$$L_0 = L - l. \quad (6.2.3)$$

После этого вычисляем плоские прямоугольные действительные координаты точек 1 и 2 по их геодезическим координатам относительно найденного осевого меридиана  $L_0$ .

После вычитания из условных координат точек 1 и 2 их действительных значений  $x^l$ ,  $y^l$  и исключив номера зоны из ординаты, найдем координаты условного начала

$$x_0 = x'_i - x_i^l; \quad y_0 = y'_i - y_i^l. \quad (6.2.4)$$

Из нескольких значений  $x_0$  берется среднее. Таким образом, ключи условной системы координат найдены.

Изложим второй способ вычисления ключей условной системы координат по разностям длин линий в разных системах при тех же исходных условиях.

Как известно [40], длина линии  $S$  на плоскости в проекции Гаусса определяется с помощью длины геодезической линии  $s$  на эллипсоиде по формуле

$$S = s \left[ 1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} - \frac{e^2 y_m \Delta x \Delta y}{6R_m^3} \sin 2B_m + \frac{y_m^2}{48R_m^4} (2y_m^2 - 3\Delta y^2 + \Delta x^2) - \frac{\Delta y^2}{5760R_m^4} (16\Delta x^2 + 5\Delta y^2) \right], \quad (6.2.5)$$

где  $x_1, y_1, x_2, y_2$  – плоские прямоугольные координаты концов линии, а остальные данные соответствуют обозначениям в формуле (6.2.2).

Формула (6.2.5) позволяет получать плоскую линию с точностью 3 мм на удалении до 300 км от осевого меридиана, т. е. на краю стандартной шестиградусной зоны.

Так как нам известны только плоские координаты, то с помощью формулы (6.2.5) мы находим длину геодезической линии, поделив длину плоской линии на выражение в квадратных скобках. Впрочем, можно поступить и по другому. Перевычислим плоские координаты в геодезические и решим обратную геодезическую задачу на эллипсоиде для получения  $s$ .

Так как условная система координат отличается от системы 1942 года только ключом, то формула (6.2.5) относится и к ней. Длину плоской линии в условной системе вычисляем по плоским координатам

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

длина геодезической линии остается той же, что и в предыдущем случае – Системы координат 1942 года. Для

нахождения ординаты средней точки в условной системе координат из формулы (6.2.5) получим уравнение четвертой степени

$$Ay_m^4 + By_m^2 + Cy_m + D = 0,$$

$$\text{где } A = \frac{1}{24R_m^4}; \quad B = \frac{1}{2R_m^2} + \frac{2\Delta x^2 - 3\Delta y^2}{48R_m^4}; \quad C = -\frac{e^2 \Delta x \Delta y \sin 2B_m}{6R_m^3};$$

$$D = 1 - \frac{S}{s} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} - \frac{\Delta y^2}{5760R_m^4} (16\Delta x^2 + 5\Delta y^2).$$

Поделив это уравнение на  $A$ , получим уравнение

$$y_m^4 + P y_m^2 + Q y_m + R = 0, \quad (6.2.6)$$

где  $P = 12R_m^2 + \Delta x^2 - 1,5\Delta y^2$ ;  $Q = -4R_m e^2 \Delta x \Delta y \sin 2B_m$ ;

$$R = \left(1 - \frac{S}{s}\right) 24R_m^4 + R_m^2 \Delta y^2 - \frac{\Delta y^2}{240} (16\Delta x^2 + 5\Delta y^2).$$

Решение уравнения (6.2.6) методом Декарта в конечном виде рассматривается в работе [67], однако мы применим итеративный метод решения в виде

$$y_m^2 = \left[ -P + \sqrt{P^2 - 4(R + Q y_m)} \right] / 2, \quad (6.2.7)$$

приняв в первом приближении под знаком корня  $y_m = 0$ . Найденному из решения уравнения значению  $y_m$  присваивается знак “минус”, если точки находились в левой части зоны, и знак “плюс”, если они располагались в правой части.

После вычитания из условной ординаты средней точки найденного действительного значения и исключения номера зоны найдем ординату  $y_0$  условного начала системы. Если отложить от средней точки условную ординату  $y_0$  в обратном направлении, то можно найти ординату точки на осевом меридиане условной системы. Пересчитаем координаты этой точки  $x, y$ , где  $x$  — абсцисса средней

точки в Системе координат 1942 года;  $y = (NZ + 0,5) \cdot 10^6 - y_0$ ;  $NZ$  – номер стандартной зоны проекции Гаусса-Крюгера, в геодезические с осевым меридианом  $L_m$ , где  $L_m$  – долгота средней точки. В результате получим долготу осевого меридиана условной системы координат.

Вычислим действительные плоские прямоугольные координаты точек 1 и/или 2 от нового осевого меридиана. Разность условного и действительного абсцисс точек даст абсциссу условного начала. Таким образом, элементы ключа условной системы найдены. Так как первый способ определения ключей освещался в печати, приведем пример определения ключей вторым способом.

### Пример 6.1.

Пусть координаты точек 1 и 2 (рис. 6.2), вычисленные от осевого меридиана на  $L = 40^\circ$  с началом  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 500\,000$  м (аналог системы 1942 года), равны  $x_1 = 6\,544\,503,322$  м;  $y_1 = 1\,385\,058,447$  м;  $x_2 = 6\,772\,220,511$  м;  $y_2 = 1\,283\,659,705$  м и соответствуют геодезическим координатам, указанным на рис. 6.2. Координаты тех же точек от осевого меридиана  $L = 39^\circ$  с началом  $x_0 = 10\,000$  м и  $y_0 = 300\,000$  м будут равны соответственно

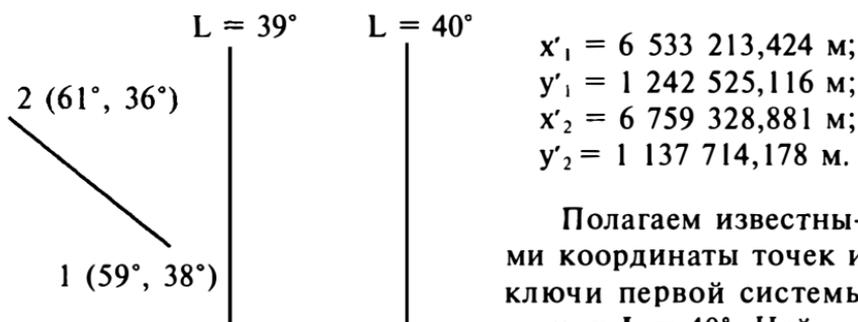


Рис. 6.2. Схема расположения точек

Полагаем известными координаты точек и ключи первой системы  $x_0$ ,  $y_0$  и  $L = 40^\circ$ . Найдем ключи второй системы.

Вычислим следующие величины для первой системы  $\Delta x = 227\,717,189$  м;  $\Delta y = -101\,398,742$  м;  $x_m = 6\,658\,361,9165$  м;  $y_m = -165\,640,924$  м;  $S = 249\,272,588$  м. Широта, соответствующая координатам средней точки, равна

$B_m = 60^{\circ}00'14,675''$ ;  $R_m = 6\,388\,938,548$  м. Подставив эти величины в выражение в квадратных скобках формулы (6.2.5), находим масштаб  $m = 1,0003466295$ . Длину геодезической линии находим из решения обратной задачи на эллипсоиде  $s = 249\,186,214$  м. Поделив  $S$  на это значение, находим контрольное значение масштаба  $m = 1,0003466252$ , т. е. расхождение масштабов составляет  $4 \cdot 10^{-9}$ .

Теперь вычисляем данные, необходимые для второй системы,  $\Delta x = 226\,115,457$  м;  $\Delta y = -104\,810,938$  м;  $y_m = 1\,190\,119,647$  м;  $S = 249\,225,867$  м. Значения  $B_m$ ,  $R_m$  те же. Из решения уравнения (6.2.7) через четыре приближения находим  $y'_m = -109\,882,53$  м; отсюда  $y_0 = y_m - y'_m - NZ = 300\,002,177$  м. После вычисления геодезических координат точки с координатами  $x = 6\,658\,361,9165$  м;  $y = 1\,609\,882,53$  м находим  $L_0 = 39^{\circ}00'04,609''$ . Теперь от этого осевого меридиана вычислим действительные координаты первой точки по геодезическим координатам  $B_1 = 59^{\circ}$ ,  $L_1 = 38^{\circ}$ . Получаем  $x = 6\,543\,213,424$  м;  $y = -57\,474,884$  м, откуда  $x_0 = 9\,999,9996$  м. Ключи полностью вычислены.

Рассмотрим, как эти методики могут быть использованы при уравнивании сетей, создаваемых относительным методом космической геодезии. Как было упомянуто ранее, для согласования координат  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  с “измеренными” разностями координат вначале необходимо выполнить свободное уравнивание с одним исходным пунктом. Полученные из уравнивания координаты перевычисляются в Систему координат 1942 года с использованием известных параметров ПЗ–90 [8] или WGS–84 [70]. В зависимости от точности предварительных координат и учета высот квазигеоида эти координаты будут получены с некоторым сдвигом по каждой координате  $x$ ,  $y$ ,  $H$ , однако, это не будет значительно влиять на последующие вычисления.

Координаты исходных пунктов в условной системе обычно известны, координаты в системе 1942 года берутся из результатов предыдущего пересчета геоцентрических координат. По одной из изложенных методик определяются ключи условной системы координат, и с их помощью коор-

динаты всех пунктов перевычисляются в условную систему. В полученном файле координаты  $x$ ,  $y$  исходных пунктов заменяются на их каталожные значения, не изменяя при этом высотную составляющую.

Далее координаты всех пунктов перевычисляются в общеземную геоцентрическую систему координат, и выполняется уравнивание геодезической сети со всеми исходными пунктами. Уравненные координаты снова перевычисляются в условную систему с использованием ранее найденных ключей, выполняется оценка точности результатов, и вычисляются высоты квазигеоида на исходных пунктах. Необходимо отметить, что найденные ключи и высоты квазигеоида будут довольно грубо напоминать их действительные значения из-за имеющихся в спутниковых данных сдвигов. Кроме того, эти величины могут в значительных пределах изменяться от реализации к реализации, и по сути дела они являются одноразовыми, не пригодными для применения в других случаях. В программах уравнивательных вычислений выдавать их на внешний носитель не имеет смысла.

---

### **6.3. Получение нормальных высот определяемых пунктов**

---

В предыдущем разделе было сказано, что после уравнивания геодезической сети вычисляются высоты квазигеоида на исходных пунктах по формуле

$$\zeta_i = H_i - H_i^y, \quad (6.3.1)$$

где  $H_i$  – геодезические высоты исходных пунктов, полученные из уравнивания;  $H_i^y$  – их нормальные высоты, взятые из каталогов координат.

Так как при уравнивании разностей координат плановые и высотные составляющие положения пунктов разделены, в качестве исходных могут приниматься как

пункты только с исходными плановыми координатами, так и только с исходными высотами (реперы нивелирных сетей), а не только пункты со всеми составляющими положения.

Теперь задача состоит в интерполяции высот квазигеоида на определяемые пункты. Прежде всего, высоты исходных пунктов не должны изменяться, поэтому на них высота равна  $H_i$ . Чем ближе определяемый пункт к исходному, тем ближе его высота квазигеоида к значению на исходном пункте, поэтому вполне естественно, что высота квазигеоида на определяемом пункте будет вычисляться как функция, обратно пропорциональная удалению от исходных пунктов.

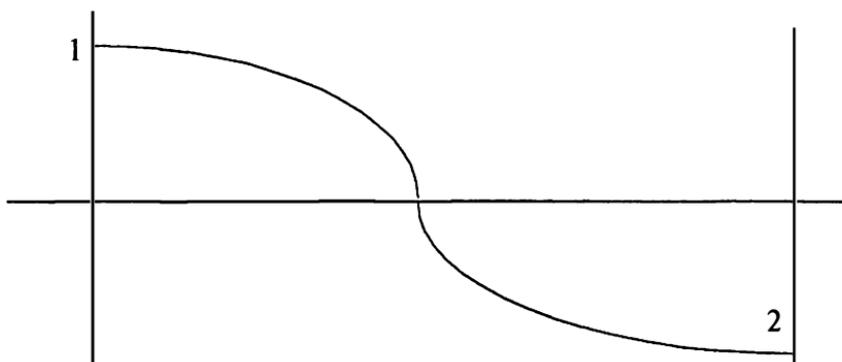
Следующее требование состоит в том, чтобы на вычисление высоты квазигеоида определяемого пункта основное влияние оказывали пункты ближайшего окружения, а дальние пункты оказывали бы ничтожное влияние. Поэтому в качестве веса для исходной высоты квазигеоида возьмем величину, обратную квадрату расстояния до определяемого пункта. Тогда

$$\zeta_j = \frac{\sum_i^k \zeta_i / \rho_{ij}^2}{\sum_i^k 1 / \rho_{ij}^2}, \quad (6.3.2)$$

где  $\zeta_i$  – высота квазигеоида на исходном пункте,  $k$  – их число;  $\zeta_j$  – высота квазигеоида на определяемом пункте;  $\rho_{ij}$  – расстояние между определяемым и исходными пунктами, которое вычисляется по уравненным плоским прямоугольным координатам.

На рис. 6.3 приведен график изменения высот между двумя исходными пунктами с равными высотами, но обратными знаками. Как видно из графика, вблизи исходных пунктов высота изменяется медленно и достигнет нулевого значения на полпути между пунктами. При большем числе исходных пунктов картина более сложная, но она вполне

будет отвечать поставленным условиям. Если продолжить график на рис. 6.7 налево от пункта 1 и направо от пункта 2, то значение высоты при достаточном удалении от исходных пунктов будет стремиться к нулю сверху и снизу соответственно, так как при увеличении расстояний влияние высот обоих пунктов уменьшается и уравнивается. Формулу (6.3.2) можно было бы усовершенствовать, так как к краям сети начинают проявляться краевые эффекты, однако простота вычислений вполне окупает некоторые недостатки способа интерполяции.



**Рис. 6.3. График изменения высот квазигеоида**

После получения высоты квазигеоида, которая изменяется очень плавно, на каждом определяемом пункте вычисляется нормальная высота по формуле

$$H^y = H_j - \zeta_j, \quad (6.3.3)$$

где  $H_j$  — геодезическая высота пункта из уравнивания.

Точность вычисления нормальных высот здесь довольно высокая, если имеется достаточное количество исходных высот, по возможности равномерно распределенных по всей сети. В этом случае она будет соответствовать уровню технического нивелирования или нивелирования IV класса.

Этот метод открывает путь для “чисто” геометрического изучения фигуры квазигеоида с помощью спутниковых методов. Несмотря на то, что высоты местного квази-

геоида могут иметь систематические ошибки, разности высот на парах точек будут на уровне первых сантиметров. Т. е. имея исходные нивелирные пункты с известными высотами квазигеоида, можно передавать их с высокой точностью на удаленные определяемые пункты. Однако этот вопрос требует специальных исследований и экспериментов, возможность проведения которых у авторов отсутствовала.

Приведем карту высот квазигеоида, составленную на основе высот квазигеоида на исходных пунктах, полученных как разность уравненных геодезических высот и нормальных высот из каталога исходных координат (рис. 6.4, рядом с номерами пунктов показаны высоты квазигеоида в метрах). Высоты квазигеоида на этом небольшом участке сети меняются в пределах 27 см. Если провести линии равных высот через 10 см, то на участке пройдут три горизонтали. Нормальные высоты определяемых пунктов будут примерно соответствовать этой карте (с точностью интерполяции высот квазигеоида).

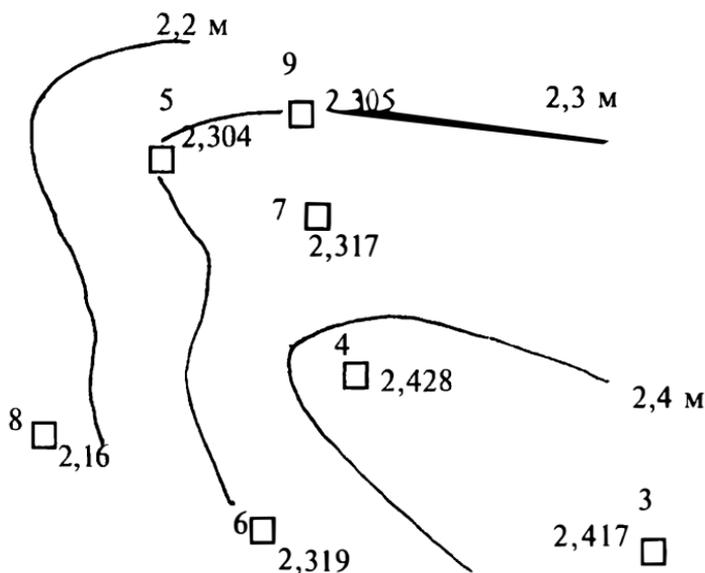


Рис. 6.4. Карта высот местного квазигеоида

Для сравнения приведем результаты уравнивания (табл. 6.6). В данной выдаче даются координаты, нормальные высоты, дирекционные углы и длины сторон с их средними квадратическими ошибками, полученными из уравнивания, как описано в разделе 5.4.

Т а б л и ц а 6.6

**Каталог уравненных величин**

(Местная система координат)

Но- мер пун- кта	Название пункта на пункт №	x N Дирекцион- ный угол	$m_x$ $m_H$ $m_A$	y S	$m_y$ $m_S$																																																																
1	2	3	4	5	6																																																																
1	20FY	6 099 137,444	0,029	2 315 306,617	0,020																																																																
		159,014	0,069				2	51°53'02,05"	1138,6	4,180	0,025	2	20FX	6 099 140,025	0,033	2 315 309,906	0,023	159,211	0,075	3 исход- ный	0152	6 082 307,730	0,000	2 334 037,385	0,000	152,500	0,000	4	303°15'17,41"	0,0	19 134,731	0,000	5	321 36 06,20	0,0	32 575,583	0,000	6	280 05 42,79	0,0	21 232,060	0,000	4 исход- ный	0159	6 092 800,524	0,000	2 318 036,160	0,000		5	344°16'49,77"	0,0	15 621,330	0,000		6	215 54 12,54	0,0	8 359,371	0,000	5 исход- ный	0BZI	61 07 837,609	0,000	2 313 803,901	0,000	178,314	0,000	6
	2	51°53'02,05"	1138,6	4,180	0,025																																																																
2	20FX	6 099 140,025	0,033	2 315 309,906	0,023																																																																
		159,211	0,075			3 исход- ный	0152	6 082 307,730	0,000	2 334 037,385	0,000	152,500	0,000	4	303°15'17,41"	0,0	19 134,731	0,000	5		321 36 06,20	0,0	32 575,583	0,000	6	280 05 42,79	0,0	21 232,060	0,000	4 исход- ный	0159	6 092 800,524	0,000	2 318 036,160	0,000		5	344°16'49,77"	0,0	15 621,330	0,000		6	215 54 12,54	0,0	8 359,371	0,000	5 исход- ный	0BZI	61 07 837,609	0,000	2 313 803,901	0,000	178,314	0,000	6	181°45'33,60"	0,0	21 818,511	0,000									
3 исход- ный	0152	6 082 307,730	0,000	2 334 037,385	0,000																																																																
		152,500	0,000																																																																		
		4	303°15'17,41"				0,0	19 134,731	0,000																																																												
	5	321 36 06,20	0,0	32 575,583	0,000																																																																
	6	280 05 42,79	0,0	21 232,060	0,000																																																																
	4 исход- ный	0159	6 092 800,524	0,000	2 318 036,160	0,000																																																															
	5	344°16'49,77"	0,0	15 621,330	0,000																																																																
	6	215 54 12,54	0,0	8 359,371	0,000																																																																
5 исход- ный	0BZI	61 07 837,609	0,000	2 313 803,901	0,000																																																																
		178,314	0,000																																																																		
		6	181°45'33,60"			0,0	21 818,511	0,000																																																													

1	2	3	4	5	6	
6 исход- ный	0BZ2	6 086 029,383	0,000	2 313 134,044	0,000	
		207,54	0,000			
		2	9°25'22,82"	0,3	13 289,970	0,033
		1	9 24 39,01	0,3	13 286,886	0,030
		10	39 33 22,50	0,4	15 341,095	0,043
		11	48 34 19,53	0,4	13 600,143	0,037
		12	69 45 11,10	0,3	18 219,523	0,023
		17	8 00 33,64	0,3	13 174,835	0,026
		13	31 29 58,52	1,0	6697,037	0,036
		14	31 47 28,77	1,0	7088,351	0,037
		19	268 14 47,52	2,7	4507,826	0,038
		16	86 34 16,68	1,2	4174,573	0,017
		18	34 08 53,75	0,8	10 664,387	0,047
		20	34 31 24,90	1,3	13 853,098	0,058
		15	37 56 06,94	0,8	11 948,313	0,040
7 исход- ный	0189	6 100 377,166	0,000	2 322 403,744	0,000	
		189,000	0,000			
		5	310°56'30,98"	0,0	11 384,881	0,000
	6	212°51'55,33"	0,0	17 081,751	0,000	
8 исход- ный	0192	6 092 464,094	0,000	2 297 978,545	0,000	
		192,500	0,000			
		5	45°49'47,04"	0,0	22 063,247	0,000
	6	113 00 18,26	0,0	16 464,952	0,000	
9 исход- ный	0195	6 110 404,707	0,000	2 320 158,719	0,000	
		195,300	0,000			
		5	248°00'11,58"	0,0	6853,736	0,000
	6	196 04 34,84	0,0	25 367,351	0,000	
10	0301	6 097 857,363	0,041	2 322 903,797	0,031	
		186,234	0,076		0,035	
	11	171°24'26,71"	2,0	2861,191		
11	0303	6 095 028,287	0,037	2 323 331,280	0,029	
		181,654	0,072			
12	0307	6 092 334,551	0,030	2 330 227,783	0,021	
		162,368	0,078			
		2	294°31'20,20"	0,5	16 396,876	0,026
	1	294°30'33,50"	0,4	16 398,797	0,023	

1	2	3	4	5	6
13	0315	6 091 739,571 151,682	0,040 0,086	2 316 633,195	0,028
14	0328	6 092 054,287 149,010	0,041 0,087	23 16 868,380	0,028
	15	46°44'05,98"	1,8	4959,048	0,033
15	099F	6 095 453,088 152,011	0,047 0,099	2 320 479,517	0,036
16	0440	6 086 279,049 202,347	0,025 0,055	2 317 301,145	0,017
	17	349°40'28,82"	0,3	13 007,295	0,028
17	0310	6 099 075,703 165,513	0,026 0,056	2 314 969,754	0,018
18	061F	6 094 855,100 130,445	0,054 0,121	2 319 120,352	0,031
	19	229°29'30,25"	0,8	13 799,623	0,048
19	0430	6 085 891,448 180,426	0,058 0,151	2 308 628,329	0,038
20	089F	6 097 442,85 183,632	0,072 0,173	2 320 985,224	0,072

Сравним высоты квазигеоида, полученные из свободного уравнивания и последнего полного уравнивания (табл. 6.7). Так как при свободном уравнивании за исходный был принят пункт 4, то высоты квазигеоида на остальных пунктах определялись относительно него, т. е. в табл. 6.7 даны разности высот квазигеоида относительно пункта 4.

Во второй колонке табл. 6.7 приведены высоты квазигеоида из свободного уравнивания с исходным пунктом 4, в третьей – из общего уравнивания с исходными пунктами 3 – 9, которые отмечены точками. В четвертой колонке даны разности высот квазигеоида из общего уравнивания относительно пункта 4. В последней колонке показаны расхождения между разностями высот квазигеоида из свободного и полного уравниваний. Все значения в табл. 6.7 даны в сантиметрах. Среднее квадратическое расхождение двух решений равно 1,2 см.

**Высоты квазигеоида из свободного и полного уравниваний**

Номер пункта	$\zeta_{\text{св}}$	$\zeta_{\text{ур}}$	$\Delta\zeta_{\text{ур}}$	$\zeta_{\text{св}} - \Delta\zeta_{\text{ур}}$
1	2	3	4	5
1	-7,1	234,3	-8,5	1,4
2	-7,1	234,3	-8,5	1,4
3	-4,1	241,7	-1,1	-3,0
4	0	242,8	0	0
5	-10,4	230,4	-12,4	2,0
6	-11,0	231,9	-10,9	-0,1
7	-10,8	231,7	-11,1	0,3
8	-24,4	216,0	-26,8	2,4
9	-10,8	230,5	-12,3	1,5
10	-9,6	232,8	-10,0	0,4
11	-7,1	235,8	-7,0	-0,1
12	-7,8	236,2	-6,6	-1,2
13	-1,1	241,5	-1,3	0,2
14	-0,6	241,9	-0,9	0,3
15	-4,5	238,0	-4,8	0,3
16	-8,9	234,5	-8,3	-0,6
17	-7,1	234,3	-8,5	1,4
18	-1,9	240,5	-2,3	0,4
19	-10,7	231,8	-11,0	0,3
20	-8,2	234,0	-8,8	0,6

Как видно из табл. 6.7, наибольшие расхождения возникли на исходных пунктах, что свидетельствует о недостаточном точном согласовании высот на этих пунктах. Кроме того, при полном уравнивании в качестве неизвестных определяются масштабная поправка и углы разворота вокруг осей X, Y, Z. Однако достигнутая точность определения высот квазигеоида, а значит и нормальных высот пунктов может считаться вполне удовлетворительной для одностороннего приемника спутниковых сигналов и данного класса точности исходных пунктов.

Приведенные результаты позволяют утверждать, что высотную составляющую пунктов с точностью нескольких сантиметров можно определить по результатам как свободного уравнивания, так и полного уравнивания гео-

дезических сетей, создаваемых относительным методом космической геодезии. Для изучения фигуры квазигеоида предпочтительно использовать разностный метод относительно пунктов с известными высотами квазигеоида. Если таких пунктов несколько, возникает задача уравнивания высот квазигеоида как нивелирных сетей относительно поверхности эллипсоида.

Если исходных пунктов с нормальными высотами в сети нет или они не вызывают доверия, то для нахождения нормальных высот определяемых пунктов используется карта высот квазигеоида. При этом для определения геоцентрических прямоугольных координат исходных пунктов используется эта же карта, а при свободном уравнивании координаты единственного исходного пункта могут перевычисляться в общеземную систему координат без учета высоты квазигеоида. В этом случае нормальные высоты на определяемые пункты передаются с помощью разностей высот квазигеоида, приведенных к этому исходному пункту.

Если имеется карта высот квазигеоида над референц-эллипсоидом Красовского, то сначала общеземные координаты пунктов перевычисляются на эллипсоид Красовского, затем учитываются высоты квазигеоида. Если имеется карта над общеземным эллипсоидом, то сначала учитываются высоты квазигеоида, а затем выполняется перевычисление координат на референц-эллипсоид Красовского.

## НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ РЕАЛИЗАЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО МЕТОДА КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

### 7.1. От алгоритмов к программам

Из рассмотрения теоретических вопросов относительного метода, приведенных в предыдущих главах, видно, насколько важны организация программ и последовательность выполнения необходимых операций, так как большинство включенных в них алгоритмов достаточно известны. Рассмотрим, к примеру, вопросы пересчета координат пунктов из одной системы в другую.

Как известно, предварительные координаты пунктов в относительном методе получаются после первичной обработки псевдодалностей фирменными пакетами программ в общеземной системе координат ПЗ-90 или WGS-84. Это могут быть пространственные прямоугольные декартовы координаты  $X, Y, Z$  или геодезические координаты  $B, L, H$ . Схема перевычисления этих координат для российского потребителя может иметь вид, представленный на рис. 7.1.

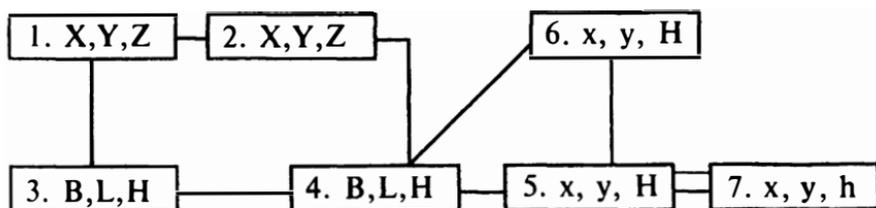


Рис. 7.1. Блок-схема программы перевычисления координат

На рис. 7.1 координаты в блоках 1 и 3 даются в обще-земной системе, в блоках 2 – 6 в системе 1942 года и на референц-эллипсоиде Красовского, а в блоке 7 – в мест-ной системе. В последней система высот также может быть отличной от Балтийской, поэтому высота обозначена  $h$ .

Для составления такой программы нужны следующие процедуры и исходные данные.

1. Пересчет координат из общеземной системы (блок 1) в систему, начало которой совмещено с центром референц-эллипсоида Красовского (блок 2) и обратно. При этом используются параметры WGS–84 или ПЗ–90.

2. Пересчет пространственных прямоугольных коор-динат (1) в геодезические (3) на общеземном эллипсоиде и обратно с использованием параметров этого эллипсоида.

3. Пересчет координат (2) на референц-эллипсоид Кра-совского (4) и обратно с использованием соответствующих параметров эллипсоида.

4. Пересчет геодезических координат с общеземного эллипсоида на референц-эллипсоид Красовского и обратно при использовании их параметров и характеристик систем WGS–84 или ПЗ–90.

5. Пересчет геодезических координат с референц-эллипсоида Красовского в плоские прямоугольные в систе-ме 1942 года (5) или 1963 года (6) и обратно. Кроме параметров референц-эллипсоида Красовского, использу-ются соответствующие наборы коэффициентов и парамет-ры прямоугольных систем координат. Для системы 1963 года последние параметры являются закрытыми.

6. Пересчет плоских прямоугольных координат из системы 1942 года (5) в местную систему координат (7) с использованием ее ключа. Как видно из приведенного перечня, для данной программы необходимо создать, по крайней мере, 12 подпрограмм. Было бы нерациональным выполнять всю последовательность таких вычислений с помощью программ, реализующих отдельные процедуры. При соединении процедур в одну программу возникает довольно сложная логическая схема выбора пути вычис-лений для разных входных и выходных данных (вари-

антов). В нашем примере между блоками 1, 2 и 4 возможен путь перевычисления через прямоугольные или геодезические координаты, и нужен разумный выбор пути с учетом различных обстоятельств.

При выполнении геодезических работ для других стран схема значительно усложняется, так как могут отличаться как национальные референц-эллипсоиды, так и разграфка и даже проекции. Кроме того, при переходе от геодезических к плоским прямоугольным координатам и обратно приходится вычислять соответствующие коэффиценты перехода, т. е. добавлять все новые процедуры. Одним из авторов была составлена программа пересчета координат между 18 различными системами координат. Она содержала более 40 подпрограмм, и возникло около 120 вариантов пересчета координат из одной системы в другую. В программе использовались две проекции — Гаусса и Ламберта, кроме упомянутых, предусматривалась возможность пересчета в топоцентрическую и полярную системы, а также преобразования трехмерных координат на любые углы вращения, смещения и масштаб.

Конечно, для решения ограниченного круга задач может оказаться достаточным и тот минимальный набор подпрограмм, который предусмотрен на рис. 7.1. В любом случае программы должны быть тщательно отлажены и снабжены четкими инструкциями, потому что трудно даже представить себе, какие только ошибки не допускаются операторами при работе с чужими программами даже в такой достаточно простой задаче.

При составлении программ важно удачно установить вид входных и выходных данных, т. е. их состав и формат. Было бы желательным, чтобы входные и выходные данные разных программ были согласованными и стандартными. Это позволило бы выходные данные одной программы передавать другой программе в качестве входных, что было бы очень удобно при эксплуатации программ. Однако при обработке спутниковых данных, полученных относительным методом и обработанных фирменными пакетами программ, входные данные зависят в основном от форма-

тов разнообразных файлов, выдаваемых этими пакетами. Чаще всего это текстовые файлы, поэтому стандарты могут устанавливаться лишь на промежуточные рабочие файлы. Например, для комплекса программ уравнивания геодезических сетей, создаваемых относительным методом, из файлов, полученных фирменными пакетами программ, необходимо создать три рабочих файла, формат которых указан в главе 4: измеренных разностей координат с их ковариационными матрицами, предварительных координат пунктов и их названий.

Для получения необходимых рабочих файлов приходится создавать программы считывания информации из текстовых файлов каждого типа аппаратуры и формата выходного файла. При этом на языке программирования должен быть достаточный набор команд обработки строковых переменных. Очень удобным в этом отношении является язык программирования Basic. Остальные, вычислительные, программы могут создаваться на любом языке программирования. При обработке большого объема измерений желательно использовать такие языки, которые применяют для работы всю оперативную память, например, ФОРТРАН 5.0 или Visual Basic. Последний пригоден для создания приложений в среде Windows.

Стандартные типы рабочих файлов удобны при обработке измерений, выполненных несколькими типами спутниковой приемной аппаратуры. Так как форматы первичных файлов для разных типов аппаратуры могут отличаться, то после их считывания имеется возможность объединить полученные рабочие файлы одного формата. Конечно, при этом необходимо принять меры, чтобы разные пункты не получили одинаковые номера или один и тот же пункт разные номера в объединяемых файлах.

В рассмотренном в начале раздела примере пересчета координат из одной системы в другую входной и выходной форматы данных имеют вид

$N$ , "название пункта",  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,

где вместо  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  могут быть подставлены  $B$ ,  $L$ ,  $H$  или  $x$ ,  $y$ ,  $H$ . Для последних двух систем координат высота  $H$  может

отсутствовать. В зависимости от задач, которые решаются с помощью разрабатываемых программ, форматы входных и выходных данных могут изменяться. Например, при составлении списков или каталогов координат пунктов строковой величины “название пункта” может оказаться недостаточным, придется добавлять “тип знака и класс”, иногда добавляют “тип и номер центра” (нижний, верхний).

Конечно, программу считывания можно включить непосредственно в разрабатываемую программу, но в этом случае она не будет универсальной для выполнения определенной вычислительной задачи, а будет ориентирована на конкретный тип входного файла. Примером может служить программа пересчета координат из PTS-файла (рис. 7.2), выдаваемого пакетом PRIZM (фирма Ashtech), в местную систему координат.

В файле приведены порядковые номера пунктов, их геодезические координаты и условные названия. Пункты, названия которых не содержат цифр, являются исходными, поэтому по ним можно определить ключи местной системы координат, затем с их помощью перевычислить в местную систему координаты остальных пунктов. Кроме того, на исходных пунктах известны нормальные высоты, поэтому по изложенной в главе 4 методике можно вычислить нормальные высоты определяемых пунктов.

#### ASHTECH POINTS FILE

PROGRAM: SDBM v.2.0 JAN 21 1996  
CREATED FROM: Project Basharsk  
DATUM: WGS84 World Geodetic Sys. 1984  
ELLIPSOID: WGS84 World Geodetic Sys. 1984  
SEMI-MAJOR AXIS: 6378137.  
INVERSE FLATTENING: 298.257223563  
HEIGHT: ELLIP Ellipsoidal  
UNITS: METER Meter

POINT	LATITUDE	LONGITUDE	HEIGHT	SITE
00001	56 13 01.67351 N	49 59 30.41447 E	115.239	AL23
00002	56 11 54.08513 N	49 57 29.18651 E	135.004	AL25

00003	56	12	59.16649	N	49	59	34.02098	E	111.974	AS24
00004	56	11	45.94051	N	49	57	22.21366	E	130.993	AS26
00005	56	13	04.08740	N	50	00	14.41735	E	113.668	LL39
00006	56	11	50.69777	N	49	56	48.91312	E	140.779	LL41
00007	56	12	23.36367	N	49	59	36.76190	E	131.996	LL43
00008	56	10	27.21455	N	49	58	11.98071	E	121.175	LL45
00009	56	09	13.42140	N	49	58	49.14679	E	111.087	LL47
00010	56	09	16.61155	N	49	57	30.43732	E	130.723	LL49
00011	56	12	55.00962	N	50	00	28.83914	E	132.002	RS40
00012	56	11	50.82686	N	49	57	03.57861	E	136.907	RS42
00013	56	12	02.37176	N	49	59	24.34994	E	128.763	RS44
00014	56	10	27.04894	N	49	58	14.41121	E	117.484	RS46
00015	56	09	06.27750	N	49	58	46.56536	E	113.997	RS48
00016	56	09	20.35094	N	49	57	29.27255	E	134.311	RS50
00017	56	05	31.11945	N	49	52	37.92650	E	133.930	BAZA
00018	56	25	01.90610	N	49	41	33.81422	E	185.774	2640
00019	56	22	12.84998	N	49	36	27.43526	E	157.437	6309
00020	56	18	00.39611	N	49	43	19.83189	E	177.043	2545
00021	56	11	05.59336	N	49	35	12.50051	E	181.350	URNS
00022	55	58	48.54700	N	49	42	01.93620	E	171.207	KKAM
00023	56	10	37.61536	N	50	03	41.01072	E	170.638	MMUY
00024	56	08	45.85198	N	50	12	02.40063	E	176.471	THUR

**Рис. 7.2. Вид PTS-файла**

Однако указанные операции мы выполним для геодезической сети, приведенной в разделе 6.1.2, для которой имеются результаты уравнивания в разделе 6.3. В табл. 7.1 приводятся результаты пересчета координат в местную систему с использованием известных параметров разграфки и ключа местной системы.

При сравнении полученных координат с исходными замечаем, что они смещены в среднем на следующие величины:  $dx = 0,862$  м,  $dy = 1,35$  м,  $dH = 0,162$  м.

В табл. 7.2 приведены результаты пересчета координат из PTS-файла с определением ключей и интерполяцией высот. Легко заметить, что все смещения добавились к определяемым ключам и были исключены. Однако на ис-

**Результаты пересчета координат с параметрами и ключом**

Номер пункта	Название пункта	х, м	у, м	Н, м
1	20FY	6 099 138,346	2 315 307,942	159,260
2	20FX	6 099 140,926	2 315 311,231	159,456
3	0152	6 082 08,607	2 344 038,723	152,718
4	0159	6 092 801,532	2 318 037,444	159,632
5	0BZ1	6 107 838,631	2 313 805,139	178,431
6	0BZ2	6 086 030,374	2 313 135,303	207,652
7	0189	6 100 378,035	2 322 405,079	189,221
8	0192	6 092 464,957	2 297 979,887	192,720
9	0195	6 110 405,574	2 320 160,051	195,522
10	0301	6 097 858,276	2 322 905,145	186,469
11	0303	6 095 029,197	2 323 332,634	181,922
12	0307	6 092 335,458	2 330 229,152	162,631
13	0315	6 091 740,459	2 316 634,536	151,994
14	0328	6 092 055,178	2 316 869,721	149,324
15	099F	6 095 453,986	2 320 480,862	152,292
16	0440	6 086 279,925	2 317 302,494	202,593
17	0310	6 099 076,604	2 314 971,081	165,759
18	061F	6 094 855,997	2 319 121,693	130,751
19	0430	6 085 892,309	2 308 629,660	180,638
20	089F	6 097 443,759	2 320 986,565	183,875

ходных пунктах остались остаточные расхождения с исходными координатами, хотя взаимное положение пунктов сохранилось.

Как видно из приведенных результатов, простой пересчет координат может привести к значительным ошибкам даже при всех известных параметрах и ключах. Подбор

**Результаты пересчета координат из PTS-файла**

Номер пункта	Название пункта	х, м	у, м	Н, м
1	20FY	6 099 137,418	2 315 306,638	159,063
2	20FX	6 099 139,998	2 315 309,927	159,259
3	0152	6 082 307,678	2 334 037,419	152,500
4	0159	6 092 800,604	2 318 036,140	159,400
5	0BZ1	6 107 837,703	2 313 803,835	178,314
6	0BZ2	6 086 029,446	2 313 133,999	207,546
7	0189	6 100 377,107	2 322 403,775	189,000
8	0192	6 092 464,030	2 297 978,583	192,500
9	0195	6 110 404,646	2 320 158,747	195,300
10	0301	6 097 857,348	2 322 903,841	186,251
11	0303	6 095 028,268	2 323 331,330	181,708
12	0307	6 092 334,529	2 330 227,848	162,425
13	0315	6 091 739,530	2 316 633,232	151,770
14	0328	6 092 054,249	2 316 868,417	149,097
15	099F	6 095 453,058	2 320 479,558	152,075
16	0440	6 086 278,997	2 317 301,190	202,441
17	0310	6 099 075,676	2 314 969,777	165,564
18	061F	6 094 855,068	2 319 120,389	130,527
19	0430	6 085 891,381	2 308 628,356	180,500
20	089F	6 097 442,831	2 320 985,261	183,660

ключей и выполнение интерполяции высот дают результаты, вполне пригодные для картографических целей и геодезических работ низкой точности. Однако наиболее точные результаты в государственной системе координат получаются только из уравнивания геодезических сетей, создаваемых относительным методом космической геодезии.

## 7.2. Определение параметров трансформирования сетей. Метод Резави

Метод Резави состоит в независимом уравнивании участка геодезической сети и в ее вписывании в систему исходных пунктов как целостного построения методом наименьших квадратов. Применительно к участку спутниковой геодезической сети он заключается в ее свободном уравнивании и вписывании в систему исходных пунктов ГГС.

Из формулы (1.2.5) в результате линеаризации получаем три уравнения поправок

$$\begin{bmatrix} X_1 & 0 & Z_1 & -Y_1 & 1 & 0 & 0 \\ Y_1 & -Z_1 & 0 & X_1 & 0 & 1 & 0 \\ Z_1 & Y_1 & -X_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}, \quad (7.2.1)$$

где  $X_1, Y_1, Z_1$  – координаты пункта в системе, от которой переходят в другую систему, где координаты того же пункта равны  $X_2, Y_2, Z_2$ ;  $m$  – масштабная поправка;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – малые углы поворота вокруг соответствующих осей;  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  – координаты начала первой системы во второй системе координат.

Запишем систему уравнений поправок вида (7.2.1) для всех общих пунктов сетей в виде

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{l} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{P}, \quad (7.2.2)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица с элементами вида

$$\begin{bmatrix} X_{li} & 0 & Z_{li} & -Y_{li} & 1 & 0 & 0 \\ Y_{li} & -Z_{li} & 0 & X_{li} & 0 & 1 & 0 \\ Z_{li} & Y_{li} & -X_{li} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x} = [m \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z \ \Delta X \ \Delta Y \ \Delta Z]^T$ ;  $\mathbf{l}$  – вектор свободных членов с элементами вида  $[X_2 - X_1 \ Y_2 - Y_1 \ Z_2 - Z_1]^T$  и найдем решение

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (7.2.3)$$

Весовая матрица в формуле (7.2.1)

$$\mathbf{P} = m^2 (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)^{-1}, \quad (7.2.4)$$

где  $\mu^2$  – априорная дисперсия единицы веса, подбираемая так, чтобы диагональные элементы матрицы  $\mathbf{P}$  были как можно ближе к единице;  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$  – ковариационные матрицы пунктов в первой и второй системах координат соответственно. Решение с весовой матрицей (7.2.4) будет таким же, как при совместном уравнивании двух сетей. Если одна из матриц отсутствует, то соответствующие координаты принимаются за исходные – безошибочные. Если отсутствуют обе матрицы, то координаты в обеих системах считаются одинаково исходными и весовая матрица должна быть приравнена к единичной.

Так как в уравнениях (7.2.2) нет поправок к координатам пунктов, то ни в одном из вариантов вычислений они поправок не получают. Поэтому после определения элементов трансформирования координаты пунктов из системы 1 необходимо перевычислить в систему 2, пользуясь полученными значениями элементов по исходной формуле (7.2.1). Так как формулы (7.2.1) получены в результате линеаризации исходных формул, то при больших  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  процедуру следует снова повторить для исключения влияния производных высших порядков до полной сходимости решения. После этого на общих пунктах останутся расхождения координат, равные остатку от вычитания из первоначальных

разностей координат влияния определенных элементов взаимного трансформирования, характеризующих суммарную точность взаимного положения пунктов в каждой сети. В принципе в уравнениях (7.2.1) могут использоваться не все разности координат, однако координаты в той системе, откуда переходят, должны быть известны все, так как они используются в качестве коэффициентов во всех уравнениях поправок. В этом случае обусловленность системы (7.2.2) может ухудшиться. Кроме того, из уравнений (7.2.1) могут определяться не все элементы трансформирования, тогда из уравнений поправок соответствующие элементы исключаются и считается, что эти параметры одинаковы в обеих сетях.

Необходимо иметь в виду, что определенные таким образом ЭВТ соответствуют только данной совокупности общих пунктов. Например, привязка к некоторым пунктам КГС России участка спутниковой сети не означает перехода к системе ПЗ-90, так как эта система была выведена для всех пунктов КГС, расположенных на территории бывшего СССР. Во всяком случае это будет сделано в пределах ошибок координат привлекаемых пунктов КГС и ошибок пунктов привязываемого участка сети.

Уравнения, аналогичные (7.2.1), можно написать для геодезических координат  $B, L, H$ . В этом случае элементы матрицы  $A$  берутся из формул (1.6.6)

$$A = \begin{bmatrix} Ne^2 \sin B \cos B / (M + H) & (H + a^2 / N) \sin L / (M + H) \\ 0 & (N + H - Ne^2) \operatorname{tg} B \cos L / (N + H) \\ a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} + H & Ne^2 \sin B \cos B \sin L \\ -(H + a^2 / N) \cos L / (M + H) \\ (N + H - Ne^2) \operatorname{tg} B \sin L / (N + H) \\ -Ne^2 \sin B \cos B \cos L \\ 0 & -\sin B \cos L / (M + H) & -\sin B \sin L / (M + H) & \cos B / (M + H) \\ 1 & -\sin L / (N + H) \cos B & \cos L / (N + H) \cos B & 0 \\ 0 & \cos B \cos L & \cos B \sin L & \sin B \end{bmatrix}.$$

Как можно заметить, в формулах (1.6.6) коэффициенты при  $m$  и  $da/a$  одинаковы, и в таком случае неизвестные не разделяются. Однако в нашей задаче поправки в большую полуось не определяются, так как эллипсоид один и тот же. Если же эта поправка определялась бы, то необходимо было бы искать суммарную поправку  $da/a - m$ , иначе такая система не имела бы решения.

В данной задаче, как и в предыдущем варианте, при привязке к пунктам ГГС возникают проблемы, связанные с неточностью получения геодезических высот пунктов, которые участвуют в трансформировании. В случае невозможности получить хорошие геодезические высоты, несмотря на ухудшение обусловленности системы (7.2.2), их все же целесообразнее исключить. Случай трансформирования геодезических координат можно свести к предыдущей задаче, пересчитав их в прямоугольную геоцентрическую систему координат (референционную или общеземную).

Наконец, рассмотрим вариант, когда трансформируются плоские прямоугольные координаты. Здесь высотную составляющую сразу отбрасываем. В полной аналогии с формулами (1.2.5) можем написать

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \quad (7.2.5)$$

где  $\theta$  – малый угол поворота трансформируемого участка сети вокруг начала координат системы 1. Этим уравнениям соответствуют уравнения поправок вида

$$\begin{bmatrix} x_1 & -y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ \theta \\ x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \quad (7.2.6)$$

или в матричном виде

$$Ax - I = v, \quad P,$$

решение этой системы находят в виде

$$x = (A^T P A)^{-1} A^T P I.$$

Здесь  $x_0, y_0$  — поправки к предварительным координатам начала трансформируемой системы. За начало вращения одной системы координат относительно другой можно принять любую точку участка сети, в том числе любой из пунктов, округленное значение координат или центр тяжести участка сети. Так как целью решения является вписывание участка сети в систему окружающих исходных пунктов, то целесообразно за центр вращения систем координат принять центр тяжести сети, т. е. средние координаты. В этом случае в коэффициентах уравнений поправок из координат следует вычесть координаты принятого начала. В свободных же членах добавление или вычитание постоянной части не оказывает никакого влияния. При вычислении преобразованных координат сдвиг начала должен учитываться.

Если общих пунктов только два, то избыточных измерений нет, задача уравнивания отпадает, и решение единственное. Уравнения (7.2.6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_1 m - y_1 \theta + x_0 &= \Delta x_1; & x_2 m - y_2 \theta + x_0 &= \Delta x_2; \\ y_1 m + x_1 \theta + y_0 &= \Delta y_1; & y_2 m + x_2 \theta + y_0 &= \Delta y_2, \end{aligned}$$

где  $\Delta x_i = x_i - x'_i$ ;  $\Delta y_i = y_i - y'_i$  — разности одноименных координат общих пунктов.

Из последних уравнений следует

$$\begin{aligned} \Delta x m - \Delta y \theta &= \delta x; & \delta x &= \Delta x_2 - \Delta x_1; \\ \Delta y m + \Delta x \theta &= \delta y; & \delta y &= \Delta y_2 - \Delta y_1 \end{aligned}$$

и далее

$$m = \frac{\Delta x \delta x}{\Delta x^2 + \Delta y^2}; \quad \theta = \frac{\Delta x \delta y - \Delta y \delta x}{\Delta x^2 + \Delta y^2};$$

$$x_0 = [(y_1 + y_2) \theta - (x_1 + x_2) m + (\Delta x_1 + \Delta x_2)]/2;$$

$$y_0 = [(\Delta y_1 + \Delta y_2) - (x_1 + x_2) \theta - (y_1 + y_2) m]/2.$$

В пространственной системе координат для трансформирования сети необходимо не менее трех общих пунктов.

Задача трансформирования плоских координат имеет несколько важных и интересных приложений, которые будут рассмотрены в следующей главе.

---

### 7.3. Алгоритм решения системы нормальных уравнений по схеме Гаусса

---

При решении любой задачи по методу наименьших квадратов необходимо иметь удобную программу решения системы линейных уравнений вида  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  с плотными матрицами  $\mathbf{A}$  коэффициентов при неизвестном векторе  $\mathbf{x}$  и вектором свободных членов  $\mathbf{b}$ . До сих пор не найдено алгоритмов решения таких систем, для которых доказано, что они лучше по времени или по точности, чем методы последовательного исключения Гаусса [58]. Однако часто ограничиваются нахождением решения указанной системы, не вычисляя обратной матрицы, необходимой для оценки результатов, или используя для этого устаревшие алгоритмы обращения матрицы с привлечением начальных единичных матриц, как, например, в способе Ганзена. В вышеуказанной работе отмечается, что существуют компактные способы вычисления обратных матриц в схеме Гаусса без хранения исходной единичной матрицы в памяти компьютера, однако эти способы не приводятся из-за трудности их понимания. Здесь приводится полный алгоритм решения системы нормальных уравнений с одновременным получением обратной матрицы в методе исключения Гаусса.

Пусть система уравнений поправок имеет вид

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{l} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{P}, \quad (7.3.1)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица размером  $n \times k$  коэффициентов уравнений поправок;  $n$  – число измерений;  $k$  – число неизвестных;  $\mathbf{l}$ ,

$\mathbf{v}$  – векторы свободных членов и поправок к измерениям размером  $n$ ;  $\mathbf{P}$  – весовая матрица измерений размерностью  $n \times n$ , необязательно диагональная.

Система нормальных уравнений, соответствующая уравнению (7.3.1), будет иметь вид

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \mathbf{0}, \quad (7.3.2)$$

где  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$  – симметричная матрица  $k \times k$  коэффициентов нормальных уравнений;  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$  – вектор свободных членов размера  $k$ .

Кроме того, из уравнения (7.3.1) следует

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{l}^T \mathbf{P} \mathbf{l} - \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (7.3.3)$$

Так как матрица  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$  симметричная, то в памяти компьютера можно хранить лишь верхний треугольник матрицы в виде вектора

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 7 \dots \\ & 3 & 5 & 8 \dots \\ & & 6 & 9 \dots \\ & & & 10 \dots \end{array}$$

где цифры обозначают номер элемента матрицы, хранящейся в векторе. Элементы матрицы, которые находятся перед диагональными элементами, берутся в столбце выше диагонального элемента. Размер такой матрицы  $k(k+1)/2$ . Если вместо  $k$  подставить номер неизвестного в векторе  $\mathbf{x}$ , получим номер диагонального элемента соответствующей строки, например, диагональный элемент третьего неизвестного равен 6. Если строки обрабатываются подряд, как в прямом ходе алгоритма Гаусса, то номер диагонального элемента может быть подсчитан как сумма номеров строк, например, для третьего неизвестного  $1 + 2 + 3 = 6$ . Остальные необходимые для вычислений элементы легко находятся вверх по столбцу или справа от диагонального элемента. Если среди неизвестных есть исключаемый элемент, например, поправка в ориентирующий угол при уравнивании направлений в наземных сетях, то в матрицу нормальных уравнений добавляется лишний столбец, кото-

рый исключается сразу после составления нормальных уравнений для направлений с данного пункта.

Нормальные уравнения составляются поочередно для каждого измерения, для чего используются файлы измерений с их ковариационными матрицами или средними квадратическими ошибками и предварительных координат пунктов. Вызвав очередное измерение по номерам пунктов, между которыми оно выполнено, вызываются их предварительные координаты, вычисляются коэффициенты и свободные члены уравнений поправок, которые умножаются на корень из веса, и составляются нормальные уравнения для данного измерения. Затем эти частные нормальные уравнения для него суммируются в общую систему уравнений в соответствии с их порядковыми номерами. Эти порядковые номера задаются порядком расположения пунктов в массиве предварительных координат пунктов, хотя их номера могут не совпадать с соответствующим порядковым номером. Например, третьим по порядку в этом массиве может быть расположен пункт, имеющий номер 10.

В векторе свободных членов нормальных уравнений целесообразно иметь дополнительный элемент для вычисления дисперсии единицы веса по формуле (5.3.3), в которой при составлении нормальных уравнений накапливаются суммы взвешенных квадратов свободных членов уравнений поправок  $[p/\sigma^2]$ . Поэтому этот вектор будет иметь размерность  $k + 1$ .

В алгоритме Гаусса вначале выполняется так называемая “прямая горка” – приведение нормальных уравнений к треугольному виду при поочередном исключении неизвестных. Надо помнить, что запись исходных нормальных уравнений в треугольном виде еще не означает их разложения на две треугольные матрицы – это только прием для экономии памяти компьютера. Целью “прямой горки” является получение верхней треугольной матрицы при умножении которой на нижнюю треугольную матрицу с единичными диагональными элементами будет получена исходная система нормальных уравнений. Пусть исходные



ослабления накопления ошибок вычислений. Как правило, вычисления выполняют с повышенной точностью. В случае плохой обусловленности системы нормальных уравнений переставляют строки и столбцы для поиска главного элемента строки, на который делится эта строка, а также осуществляют другие меры подобного рода. Новая система очень удобна для решения, так как теперь последнее уравнение содержит только одно неизвестное, предпоследнее — два и т. д. При последовательной подстановке легко найти все неизвестные, что и является содержанием “обратной горки”. Кроме того, величина, обратная коэффициенту последнего нормального уравнения, является последним элементом обратной матрицы. Именно это обстоятельство можно использовать для последовательного вычисления элементов обратной матрицы в “обратной горке”.

Итак, “обратная горка” начинается со следующих операций:

1) определяется величина, обратная коэффициенту  $m^{k-1}_{kk}$  при неизвестном  $x_k$  и записывается в матрицу вместо этого коэффициента;

2) вычисляется значение последнего неизвестного  $x_k = l^{k-1}_k / m^{k-1}_{kk}$  и записывается вместо последнего свободного члена.

При переходе ко второй с конца строке из свободного члена этого уравнения вычитается значение последнего неизвестного, умноженное на коэффициент при нем  $l^{k-2}_{k-1k-1} = l^{k-2}_{k-1k-1} - m^{k-2}_{k-1k-1}x_k$ . Затем вычисляется значение второго с конца неизвестного. Для определения элементов обратной матрицы на всех последующих шагах используем формулу Фробениуса для обращения блочных матриц

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C} - \mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C} - \mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \\ -(\mathbf{C} - \mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1} & (\mathbf{C} - \mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \end{bmatrix} \quad (7.3.6)$$

После выполнения “прямой горки” каждая последующая строка нормального уравнения является преобразованной за исключение всех предыдущих неизвестных. Поэтому при вычислениях с использованием формулы (7.3.6) достаточно иметь дело с уже обращенной частью матрицы нормальных уравнений и строкой, для которой вычисляются элементы обратной матрицы.

На втором шаге вычисления элементов обратной матрицы мы имеем дело только с последним элементом обратной матрицы  $q_{kk}$  и с предпоследней строкой преобразованных нормальных уравнений, для которых формула Фробениуса принимает вид

$$\begin{bmatrix} m_{k-1k-1} & m_{k-1k} \\ & m_{kk} \end{bmatrix}^{-1} = \\ = \begin{bmatrix} 1/m_{k-1k-1} - m_{k-1k}^2/q_{kk} / m_{k-1k-1}^2 & -m_{k-1k}q_{kk} \\ & q_{kk} \end{bmatrix},$$

элемент  $q_{kk}$  был получен на первом шаге “обратной горки”, а верхние индексы номера преобразования для удобства опущены.

На последующих шагах матрица  $\mathbf{A}$  из формулы (7.3.6) будет равна квадратичному элементу вычисляемой строки, матрица  $\mathbf{B}$  станет вектором, состоящим из остальных элементов данной строки, а элемент  $q_{kk}$  превратится в ту часть обратной матрицы, которая уже найдена на предыдущих шагах вычислений  $\mathbf{Q} = (\mathbf{C} - \mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}$ . Эта матрица имеет ту же размерность, что и вектор  $\mathbf{B}$ . Кроме указанных величин, целесообразно ввести вспомогательный вектор  $\mathbf{E}$  размерности  $k-1$ , в котором размещаются отрицательные

элементы вектора **B**, поделенные на квадратичный элемент данной строки. Тогда вычисления на любом шаге выполняются в следующей последовательности:

- вычисляется величина, обратная квадратичному элементу очередной строки, и записывается на место этого элемента;

- вычисляются элементы вектора **E**;

- из свободного члена данной строки вычитаются все ранее найденные неизвестные, умноженные на соответствующие коэффициенты вектора **B**;

- вычисляется значение неизвестного в данной строке при делении исправленного свободного члена на квадратичный элемент;

- определяются элементы обратной матрицы, соответствующие вектору **B**, как произведение вектора **E** на матрицу **Q**;

- вычисляется скалярное произведение найденного в предыдущем пункте вектора на вектор **E** и вычитается из диагонального элемента.

Переходим на следующую строку и повторяем вычисления до тех пор, пока не будут вычислены все неизвестные и вся обратная матрица. Результаты вычислений можно проверить умножением обратной матрицы на прямую.

“Прямую горку” Гаусса можно прекратить на любом шаге, задав номер завершающего шага или последнего исключаемого неизвестного. Это позволяет реализовать многогрупповой метод Пранис-Праневича решения больших систем нормальных уравнений. Для этого в конец преобразуемой системы уравнений помещаются неизвестные из суммарной системы. Частично преобразованные системы нормальных уравнений складываются и решаются тем же методом, а обратный ход в частных системах продолжается с использованием результатов из суммарного решения. Кроме того, этот алгоритм легко может быть дополнен подпрограммой перестановки строк и столбцов системы уравнений для поиска на каждом шаге главного (наибольшего) элемента строки. В этом случае для восстановления исходного порядка элементов при составлении нормаль-

ных уравнений вводится вектор порядковых номеров строк в котором элементы в ходе решения переставляются одновременно с перестановкой самих строк, как и в векторе свободных членов. Для восстановления первоначального порядка расположения строк после решения системы достаточно переставить строки в порядке возрастания номеров в этом векторе.

При решении очень больших систем нормальных уравнений, например в АГС, иногда применяют групповой метод исключения неизвестных, который в литературе называют методом Гаусса-Вольфа. В этом случае систему нормальных уравнений разбивают на блоки равного размера ("ящики") и преобразования ведут поблочно. Пусть, например, такая система имеет вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{M}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{M}_{13}\mathbf{x}_3 + \dots + \mathbf{M}_{1k}\mathbf{x}_k &= \mathbf{L}_1; \\
 \mathbf{M}_{12}\mathbf{x}_1 + \mathbf{M}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{M}_{23}\mathbf{x}_3 + \dots + \mathbf{M}_{2k}\mathbf{x}_k &= \mathbf{L}_2; \\
 \mathbf{M}_{13}\mathbf{x}_1 + \mathbf{M}_{23}\mathbf{x}_2 + \mathbf{M}_{33}\mathbf{x}_3 + \dots + \mathbf{M}_{3k}\mathbf{x}_k &= \mathbf{L}_3; \\
 \dots &\dots; \\
 \mathbf{M}_{1k}\mathbf{x}_1 + \mathbf{M}_{2k}\mathbf{x}_2 + \mathbf{M}_{3k}\mathbf{x}_3 + \dots + \mathbf{M}_{kk}\mathbf{x}_k &= \mathbf{L}_k; \\
 \mathbf{x}_1^T\mathbf{L}_1 + \mathbf{x}_2^T\mathbf{L}_2 + \mathbf{x}_3^T\mathbf{L}_3 + \dots + \mathbf{x}_k^T\mathbf{L}_k &= \mathbf{I}^T\mathbf{P}.
 \end{aligned}
 \tag{7.3.7}$$

Тогда преобразования ведутся в соответствии с формулой

$$\mathbf{M}_{ij}^r = \mathbf{M}_{ij}^{r-1} - \mathbf{M}_{ik}^{r-1}\mathbf{M}_{kk}^{-1}\mathbf{M}_{kj}^{r-1},
 \tag{7.3.8}$$

где индексы имеют те же значения, что и выше.

Таким образом, алгоритм фактически не изменяется, но позволяет проводить решение при ограниченной оперативной памяти компьютера.

Подсчитаем, сколько памяти требуется для решения системы нормальных уравнений. Матрица системы нормальных уравнений занимает  $n(n + 1)/2$  ячеек памяти, вектор свободных членов  $n + 1$ , вспомогательный вектор  $\mathbf{E}$   $n - 1$  — итого  $[n(n + 1) + 5n]/2$ , где  $n$  — порядок решаемой системы. Как известно, память компьютера разбита на сегменты по 64 кбайта. Если каждое число имеет

двойную точность, т. е. 8 байт, то количество чисел в сегменте будет 8000. Определим максимальный порядок системы нормальных уравнений, которая может быть решена в одном сегменте. Это число может быть найдено из решения квадратного уравнения

$$n^2 + 5n - 8000 = 0,$$

откуда  $n \approx 90$ , что соответствует трехмерной геодезической сети из 30 пунктов. Современные языки программирования позволяют использовать больше, чем один сегмент. Например, многие языки (Ассемблер, Паскаль, некоторые версии Бейсика) дают возможность использовать прямую адресацию, задавая адрес сегмента и смещения данных относительно начала сегмента. Другие языки делают то же самое с помощью встроенных расширителей памяти (ФОРТРАН 5.0) или специальных параметров массивов данных типа HUGE (куча) (Паскаль, ФОРТРАН 4.0). Если программы снабжаются электронным ключом, то оверлейные программы с расширителями памяти требуют использования специальных программ кодировки. Во всяком случае при решении систем нормальных уравнений необходим наибольший объем памяти в любой программе обработки данных. Если другие алгоритмы, благодаря последовательной обработке данных или считыванию и записи промежуточных результатов в файлы на диске, позволяют освободить некоторую часть памяти, то данная задача занимает необходимую память от начала составления нормальных уравнений и до конца их решения с выдачей результатов, так как происходит непрерывное обращение ко всем частям данных.

---

#### **7.4. Комплекс программ уравнивания разностей координат в прямоугольной геоцентрической системе координат**

---

Комплекс программ уравнивания разностей прямоугольных геоцентрических координат имеет следующую структуру.

1. Вначале запускаются программы считывания исходной измерительной информации и формирования рабочих файлов измерений *izm*, предварительных координат *koog* и названий пунктов *nazv*. Эти программы ориентированы на определенный тип выходных текстовых файлов после первичной обработки измеренных псевдодальностей до спутников навигационной системы фирменными пакетами производителя приемной аппаратуры, такими, как PRIZM (Ashtech), SKI (Leica) и т. п.

Так как каждый потребитель имеет свой тип аппаратуры, то он должен выбрать программу, соответствующую данному типу приемника. Хотя эту программу можно было бы использовать в качестве подпрограммы, запускаемой из других программ, рассматриваемых ниже, это нецелесообразно, так как рабочие файлы формируются только раз для данного состава измерений. Уравнивание может выполняться в разных вариантах с разным составом исходных пунктов, поэтому при подключении этой программы в качестве подпрограммы к другим программам пришлось бы каждый раз повторять процесс формирования рабочих файлов.

Программы составления рабочих файлов для разных типов аппаратуры можно было бы объединить в единый пакет считывания исходной информации со своим меню типов аппаратуры и постоянно пополнять его, но большинство программ этого пакета будет у данного потребителя бездействовать, и бесполезно будет занимать оперативную память компьютера. Однако для центра обработки спутниковых измерений крупного ведомства или территориального управления, куда приходят материалы наблюдений различными типами аппаратуры, такой пакет будет весьма полезен.

Основное назначение таких программ – найти во входном текстовом файле необходимые данные, считать их и на основе этих данных сформировать вышеуказанные стандартные рабочие файлы, необходимые для дальнейшей обработки. Поиск данных осуществляется по ключевому

слову, расположенному в начале строки, с которой начинается блок необходимых данных в считываемом файле. Считывание самих данных происходит по позициям их расположения в тексте, поэтому входной файл должен быть строго стандартным – нельзя пытаться его редактировать.

Так как координаты пунктов и их названия могут повторяться в разных файлах, то в качестве предварительных берутся значения координат, найденные в первый раз при считывании. Оpozнaвание пунктов происходит по их названиям, содержащимся во входном файле, и им присваиваются порядковые номера в очередности их считывания, которые затем используются для обозначения пунктов наблюдений в файле *izm*. Недопустимо при полевых наблюдениях присваивать одним и тем пунктам разные названия, отличающиеся хотя бы на один символ (цифру или букву), так как они будут восприниматься как разные пункты. Необходимо учитывать при этом, что в аппаратуре фирмы *Ashtech* пунктам присваиваются четырехсимвольные названия, из которых только последние три символа входят в название файла стороны после обработки пакетом *PRIZM*. Однако это не означает, что первый символ может быть произвольным, как это иногда встречается на практике, так как в программе формирования рабочих файлов из соответствующего файла считываются все четыре символа. В то же время нельзя разным пунктам давать одинаковые названия, так как в этом случае один из них выпадет из рабочего файла.

2. Далее используется управляющая программа для запуска программ пересчета координат и вычисления ключей местной системы координат. Эта программа обращается сначала к программе пересчета предварительных общеземных координат в геодезические на референц-эллипсоиде Красовского и в плоские прямоугольные координаты в системе 1942 года. После этого, используя координаты исходных пунктов в местной системе координат, их геодезические и плоские предварительные

координаты в системе 1942 года, полученные в предыдущей операции, вычисляются ключи местной системы координат по методикам, изложенным в главе 4. При этом происходит обращение к программе вычисления действительных плоских координат пунктов по геодезическим.

После вычисления ключей координаты исходных пунктов в массиве координат заменяются на их исходные значения и выполняется обращение к программе перевычисления в общеземную систему координат, в которой и выполняется уравнивание геодезической сети. Первая запускаемая программа содержит следующие подпрограммы перевычисления:

- общеземных прямоугольных координат к центру референц-эллипсоида Красовского;
- полученных координат в геодезические;
- геодезических координат в плоские прямоугольные в системе 1942 года (необходимые для этой операции коэффициенты для референц-эллипсоида Красовского заранее вычислены и “загружаются” в массив коэффициентов).

Вторая программа аналогична последней подпрограмме первой программы с ординатой начала координат  $y_0 = 0$  км. Третья программа содержит следующие подпрограммы перевычисления:

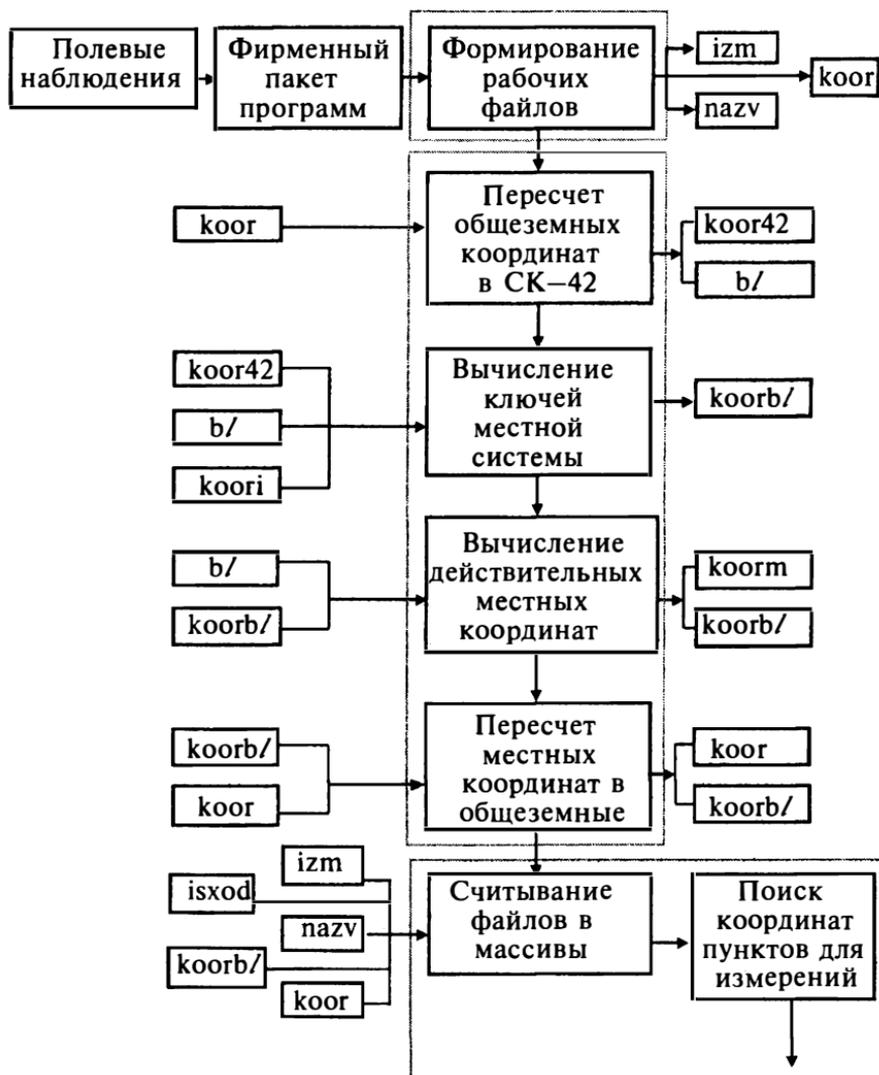
- плоских прямоугольных координат в геодезические с использованием вычисленных ключей местной системы координат, готовые коэффициенты просто “загружаются” в массив;
- геодезических координат в прямоугольные пространственные с началом в центре референц-эллипсоида Красовского;
- полученных координат к центру общеземного эллипсоида.

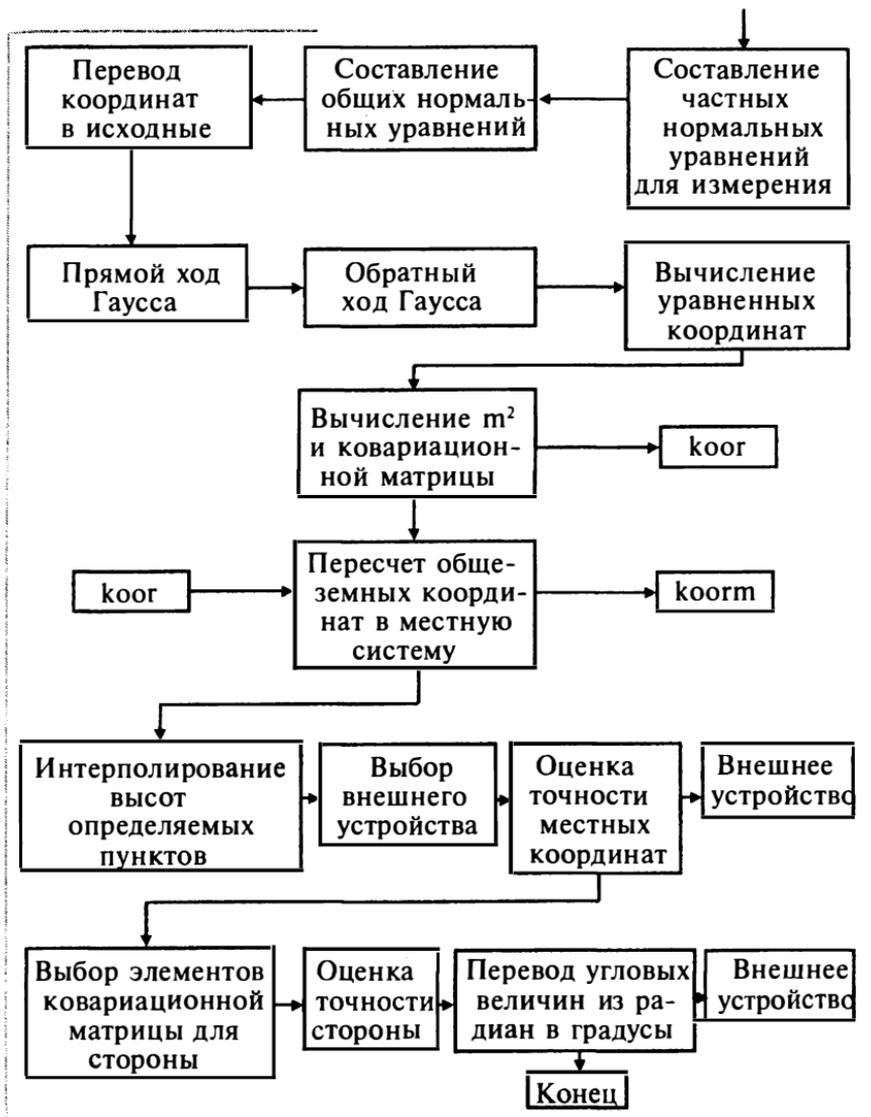
3. Наконец, управляющей программой запускается программа составления уравнений поправок, нормальных уравнений и их решения, а также пересчета уравненных геоцентрических координат в местную систему, оценки

точности результатов и выдачи их на внешний носитель (экран, бумага, файл). Здесь снова используется программа пересчета геоцентрических прямоугольных координат в местную систему. Состав и назначение используемых в третьей программе подпрограмм показаны на общей блок-схеме комплекса (рис. 7.3).

Входные данные

Выходные данные





**Рис. 7.3. Блок-схема комплекса программ уравнивания геодезических сетей, созданных относительным методом**

На рис. 7.3 в качестве входных и выходных данных показаны имена файлов, с помощью которых происходит обмен информацией между программами и/или подпрограммами. Кроме упоминавшихся, содержание файлов следующее:

– koog42, koogm, koogb/ – координаты в системе 1942 года, в местной системе и координаты исходных пунктов соответственно, а также другие данные;

– b/ – геодезические координаты;

– koogi – координаты исходных пунктов из каталогов;

– ishod – вспомогательные данные и высоты исходных пунктов.

В конце работы программы все файлы могут быть уничтожены, здесь они приводятся лишь для наглядности и определения, на каком шаге произошел сбой компьютера. Блок “Перевод координат в исходные” выполняет обнуление столбцов и строк для координат исходных пунктов и проставление на соответствующих диагоналях единицы.

Хотя, судя по блок-схеме, комплекс программ получился довольно сложным, работа с ним достаточно проста. Оператору необходимо лишь указать источник первичных разностей координат (название файла или идентификатор объекта), сформировать в любом текстовом редакторе файл координат исходных пунктов и указать внешнее устройство, на которое выводятся результаты уравнивания. Это может быть только экран, принтер, файл или одновременно все устройства. При выводе на принтер и файл одновременно результаты выводятся на экран для контроля процесса вывода и управления им. Например, при выводе на принтер запрашивается готовность устройства для вывода следующей страницы, что позволяет начать вывод с нового листа, если они оказались нестандартными, или прекратить вывод после любой страницы.

---

### **7.5. О возможности уравнивания разностей координат в геодезической и плоской прямоугольной системах координат**

---

В предыдущем разделе был рассмотрен комплекс программ уравнивания разностей координат в прямоуголь-

ной геоцентрической системе координат, т. е. в той системе, где выполнялись измерения. Такое уравнивание позволяет ограничиться перевычислением координат исходных пунктов в геоцентрическую систему координат, а затем обратным пересчетом уравненных координат пунктов в нужную плоскую систему координат. В принципе, уравнивание разностей координат может выполняться в любой системе координат при соблюдении определенных правил преобразования измерительной информации, направленных на исключение потери информации, содержащейся в измерениях.

Наиболее вероятной альтернативной системой координат, в которой могут быть уравнены разности координат, полученные относительным методом, является геодезическая. Астрономо-геодезическая сеть России уравнивалась именно в этой системе, поэтому, если спутниковая технология будет внедрена при геодезических работах по развитию АГС, то совместное уравнивание наземных и спутниковых данных наиболее целесообразно выполнить в геодезической системе координат. Для такого уравнивания необходимо будет измеренные разности геоцентрических координат перевычислить в геодезическую систему на референц-эллипсоиде Красовского. Возможно также перевычисление разностей геодезических координат, которые получают большинством пакетов фирменных программ, с общеземного эллипсоида на референц-эллипсоид Красовского.

Итак, для перевычисления спутниковых данных в геодезическую систему координат на референц-эллипсоиде Красовского воспользуемся формулой (1.2.5) пересчета геоцентрических прямоугольных координат на центр референц-эллипсоида Красовского

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_{\text{рсф}} = \frac{1}{1+m} \begin{bmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i - \delta X \\ Y_i - \delta Y \\ Z_i - \delta Z \end{bmatrix}_{\text{ОЗЭ}},$$

где  $m$ ,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ ,  $\delta X$ ,  $\delta Y$ ,  $\delta Z$  – параметры трансформирования референчных координат в общеземные.

В свою очередь эти координаты связаны с геодезическими координатами на референц-эллипсоиде Красовского формулой (1.6.2)

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_{\text{рс}\phi} = \begin{bmatrix} (N_i + H_i) \cos B_i \cos L_i \\ (N_i + H_i) \cos B_i \sin L_i \\ (N_i + H_i - N_i e^2) \sin B_i \end{bmatrix}.$$

Приравняв правые части этих уравнений и взяв затем их разность для пунктов 1 и 2, получим

$$\begin{bmatrix} (N_2 + H_2) \cos B_2 \cos L_2 - (N_1 + H_1) \cos B_1 \cos L_1 \\ (N_2 + H_2) \cos B_2 \sin L_2 - (N_1 + H_1) \cos B_1 \sin L_1 \\ (N_2 + H_2 - N_2 e^2) \sin B_2 - (N_1 + H_1 - N_1 e^2) \sin B_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1 + m} \begin{bmatrix} 1 & \omega_Z & -\omega_Y \\ -\omega_Z & 1 & \omega_X \\ \omega_Y & -\omega_X & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}, \quad (7.5.1)$$

где  $\Delta X = X_2 - X_1$ ;  $\Delta Y = Y_2 - Y_1$ ;  $\Delta Z = Z_2 - Z_1$ .

Учитывая, что  $B_2 = B_1 + \Delta B$ ,  $L_2 = L_1 + \Delta L$ ,  $H_2 = H_1 + \Delta H$ , продифференцировав последнюю формулу по разностям геодезических и прямоугольных координат, находим формулу связи дифференциалов соответствующих разностей координат

$$\begin{bmatrix} -(M_2 + H_2) \sin B_2 \cos L_2 & -(N_2 + H_2) \cos B_2 \sin L_2 \\ -(M_2 + H_2) \sin B_2 \sin L_2 & (N_2 + H_2) \cos B_2 \cos L_2 \\ (M_2 + H_2) \cos B_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \cos B_2 \cos L_2 \\ \cos B_2 \sin L_2 \\ \sin B_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} d\Delta B \\ d\Delta L \\ d\Delta H \end{bmatrix} = \frac{1}{1+m} \begin{bmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Delta X \\ d\Delta Y \\ d\Delta Z \end{bmatrix}, \quad (7.5.2)$$

где матрица в левой части является произведением диагональной матрицы на ортогональную

$$\begin{bmatrix} M_2 + H_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 + H_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\sin B_2 \cos L_2 & -\cos B_2 \sin L_2 & \cos B_2 \cos L_2 \\ -\sin B_2 \sin L_2 & \cos B_2 \cos L_2 & \cos B_2 \sin L_2 \\ \cos B_2 & 0 & \sin B_2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда, учитывая, что при обращении диагональной матрицы берутся обратные величины к диагональным элементам, а обратной к ортогональной матрице является транспонированная, легко находим

$$\begin{bmatrix} d\Delta B \\ d\Delta L \\ d\Delta H \end{bmatrix} = \frac{\partial \Delta \mathbf{B}}{\partial \Delta \mathbf{X}} \begin{bmatrix} d\Delta X \\ d\Delta Y \\ d\Delta Z \end{bmatrix}, \quad (7.5.3)$$

где

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{B}}{\partial \Delta \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{-\sin B_2 \cos L_2}{M_2 + H_2} & \frac{-\sin B_2 \sin L_2}{M_2 + H_2} & \frac{\cos B_2}{M_2 + H_2} \\ \frac{-\sin L_2}{(N_2 + H_2) \cos B_2} & \frac{\cos L_2}{(N_2 + H_2) \cos B_2} & 0 \\ \frac{\cos B_2 \cos L_2}{\cos B_2 \cos L_2} & \frac{\cos B_2 \sin L_2}{\cos B_2 \sin L_2} & \sin B_2 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислив математическое ожидание векторного произведения,

$$\begin{bmatrix} d\Delta B \\ d\Delta L \\ d\Delta H \end{bmatrix} \times [d\Delta B \quad d\Delta L \quad d\Delta H]$$

найдем ковариационную матрицу вычисленных разностей геодезических координат

$$\mathbf{K}_{\Delta B \Delta L \Delta H} = \frac{\partial \Delta \mathbf{B}}{\partial \Delta \mathbf{X}} \mathbf{K}_{\Delta X \Delta Y \Delta Z} \left( \frac{\partial \Delta \mathbf{B}}{\partial \Delta \mathbf{X}} \right)^T, \quad (7.5.4)$$

где  $\mathbf{K}_{\Delta X \Delta Y \Delta Z}$  — ковариационная матрица разностей геоцентрических координат.

Если обозначить

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{B}}{\partial \Delta \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

то

$$\mathbf{K}_{\Delta B \Delta L \Delta H} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}, \quad (7.5.5)$$

где  $b_{11} = a_{11}^2 K_{\Delta X \Delta X} + 2a_{11}a_{12}K_{\Delta X \Delta Y} + 2a_{11}a_{13}K_{\Delta X \Delta Z} + a_{12}^2 K_{\Delta Y \Delta Y} + 2a_{12}a_{13}K_{\Delta Y \Delta Z} + a_{13}^2 K_{\Delta Z \Delta Z}$ ;

$$b_{12} = a_{11}a_{21}K_{\Delta X\Delta X} + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})K_{\Delta X\Delta Y} + (a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21})K_{\Delta X\Delta Z} + \\ + a_{12}a_{22}K_{\Delta Y\Delta Y} + (a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22})K_{\Delta Y\Delta Z} + a_{13}a_{23}K_{\Delta Z\Delta Z};$$

$$b_{13} = a_{11}a_{31}K_{\Delta X\Delta X} + (a_{12}a_{31} + a_{11}a_{32})K_{\Delta X\Delta Y} + (a_{13}a_{31} + a_{11}a_{33})K_{\Delta X\Delta Z} + \\ + a_{12}a_{32}K_{\Delta Y\Delta Y} + (a_{13}a_{32} + a_{12}a_{33})K_{\Delta Y\Delta Z} + a_{13}a_{33}K_{\Delta Z\Delta Z};$$

$$b_{22} = a_{21}^2K_{\Delta X\Delta X} + 2a_{21}a_{22}K_{\Delta X\Delta Y} + 2a_{21}a_{23}K_{\Delta X\Delta Z} + a_{22}^2K_{\Delta Y\Delta Y} + \\ + 2a_{22}a_{23}K_{\Delta Y\Delta Z} + a_{23}^2K_{\Delta Z\Delta Z};$$

$$b_{23} = a_{21}a_{31}K_{\Delta X\Delta X} + (a_{22}a_{31} + a_{21}a_{32})K_{\Delta X\Delta Y} + (a_{23}a_{31} + a_{21}a_{33})K_{\Delta X\Delta Z} + \\ + a_{22}a_{32}K_{\Delta Y\Delta Y} + (a_{23}a_{32} + a_{22}a_{33})K_{\Delta Y\Delta Z} + a_{23}a_{33}K_{\Delta Z\Delta Z};$$

$$b_{33} = a_{31}^2K_{\Delta X\Delta X} + 2a_{32}a_{31}K_{\Delta X\Delta Y} + 2a_{33}a_{31}K_{\Delta X\Delta Z} + a_{32}^2K_{\Delta Y\Delta Y} + \\ + 2a_{32}a_{33}K_{\Delta Y\Delta Z} + a_{33}^2K_{\Delta Z\Delta Z}.$$

Вычисление самих разностей геодезических координат удобнее выполнять не по формулам (7.5.3), а в следующем порядке. Один из пунктов геодезической сети принимается в качестве базового. Для ослабления накопления ошибок вычислений и измеренных разностей координат желательно выбирать базовый пункт ближе к центру тяжести геодезической сети. Если есть его каталожные координаты и высота квазигеоида, то они перевычисляются в геоцентрическую прямоугольную систему. Если высота квазигеоида неизвестна, то ее можно принять равной нулю. Геоцентрические координаты базового пункта можно взять непосредственно из спутниковых определений, так как возможные общие смещения координат будут устранены при уравнивании.

По сторонам, наблюдавшимся с базового пункта, при добавлении измеренных разностей координат получают координаты пунктов на других концах линий. Если наблюдения были сделаны на базовый пункт (ведомый), то разности координат из координат базового пункта вычитаются. Теперь координаты каждой пары пунктов на концах линий перевычисляются в геодезическую систему на рефе-

ренц-эллипсоиде Красовского и определяются разности соответствующих координат. Одновременно формируется файл предварительных геодезических координат пунктов.

Приняв каждый вновь полученный пункт поочередно, например, в порядке возрастания их номеров, в качестве базового, повторяем те же действия для других сторон, проходя по ходовым линиям все пункты геодезической сети. Таким образом формируются файлы измерений и предварительных координат в геодезической системе. Структура их такая же, как и в прямоугольной геоцентрической системе координат. Однако здесь приходится перевычислять в другую систему не только координаты, но и измерения. Уравнения поправок как для разностей координат, так и для наземных измерений в геодезической системе можно найти в работе [13].

Аналогичное преобразование данных может быть выполнено и для плоской прямоугольной системы координат. Однако при уравнивании на плоскости высотная составляющая отбрасывается, так как для получения превышений из разностей геодезических высот необходимо привлекать высоты квазигеоида и при этом, естественно, точность спутниковых данных значительно снижается. Таким образом, при уравнивании на плоскости информация о третьей координате теряется или значительно понижается ее точность. Еще большая потеря измерительной информации происходит при уравнивании на плоскости дальностей, вычисленных по разностям координат и отредуцированных на плоскость. Фактически при этом спутниковая аппаратура используется лишь как дальномер, что недопустимо с экономической точки зрения. При таком уравнивании, кроме расстояний должны привлекаться дирекционные углы с совместной ковариационной матрицей дальностей и дирекционных углов. Необходимые для этого формулы могут быть взяты из раздела 5.4.

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА РЕЗАВИ В ПЛОСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Значение использования метода Резави в плоской системе координат особенно возрастает в современной ситуации. Он применим как один из методов уравнивания локальных геодезических сетей повышенной точности и может оказаться особенно полезным для сохранения неизменности местных систем координат при введении новой государственной системы. Рассмотрению этого круга задач посвящена данная глава.

---

### **8.1. Анализ результатов уравнивания 1995 года астрономо-геодезической сети России**

---

К 1995 году закончено совместное уравнивание геодезических сетей 1 и 2 классов с исходным пунктом Пулково, КГС, доплеровской геодезической сети и гравиметрических данных в виде радиусов-векторов части пунктов. Так как предыдущее уравнивание АГС, результатом которого явилось введение Системы координат 1942 года, было выполнено по некоторым причинам с рядом методических и технических нестрогостей, то координаты 1942 года при новом уравнивании получили поправки от 0 до 30 м, возрастающие к краям сети. Фактически создана новая система координат 1995 года (СК–95) с взаимным положением пунктов 3–5 см. В результате изменения координат местности в СК–95 часть карт масштабов 1 : 10 000 – 1 : 50 000, составленных в Системе координат 1942 года, потребуются пересоставить.

Так как поправки к координатам  $x$  и  $y$  в системе 1942 года возрастают в целом с запада на восток, то восточный край уравниваемого АГС загнулся на север в среднем на  $0,5''$ , а масштаб возрос на  $1 : 300\,000$ , что сравнимо с точностью самой сети. Эти величины являются средними ( $\sim 2,5$  м на  $1000$  км по каждой координате), поэтому на некоторых участках сети эти искажения могут оказаться как меньше, так и больше указанных величин. Поэтому первая из задач, которая может быть решена методом Резави, – это уточнение ключей местных систем координат так, чтобы местные координаты изменились как можно меньше.

Переуравнивание сетей более низких классов с новыми координатами исходных пунктов вряд ли возможно в современных условиях как из-за утери части материалов наблюдений на пунктах 3–4 и более низких классов (разрядных, специальных и съёмочных), так и по соображениям финансирования. Поэтому использование для трансформирования координат пунктов низших классов из системы 1942 года в новую систему СК–95 является второй важной задачей, которую позволит решить метод Резави.

---

## **8.2. Методика уточнения ключей местных систем координат**

---

Существующие ключи местных систем координат связывают местные координаты с координатами тех же пунктов в системе 1942 года. Новые ключи должны связать те же местные координаты с их значениями в СК–95. Следовательно, отличие старых и новых ключей будет обусловлено отличием координат одних и тех же пунктов в системах координат 1942 года и 1995 года, т. е. поправками к координатам 1942 года, которые они получили при новом уравнивании. Таким образом, поправки к старым ключам можно найти в виде элементов трансформирования

координат пунктов из системы 1942 года в систему 1995 года, а это уже задача, подвластная методу Резави.

Преобразование плоских координат за поворот осей координат и перенос начала осуществляется по формулам (рис. 8.1)

$$x_A = x_0 + x'_A \cos\theta - y'_A \sin\theta; \quad (8.2.1)$$

$$y_A = y_0 + x'_A \sin\theta + y'_A \cos\theta,$$

где  $x_0, y_0$  – координаты начала системы  $x', y'$  относительно системы  $x, y$ ;  $\theta$  – угол поворота системы  $x', y'$  вокруг ее начала против хода часовой стрелки до положения параллельности осей системы  $x, y$ . Учитывая малость угла  $\theta$  и возможное отличие масштабов по осям  $x$  и  $y$ , можем написать

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_A (1 + m_x) \\ y'_A (1 + m_y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \quad (8.2.2)$$

где угол  $\theta$  выражен в радианах;  $m_x$  и  $m_y$  – поправки в масштабы по осям  $x'$  и  $y'$  соответственно.

Уравнению связи (8.2.2) соответствуют уравнения поправок вида

$$\begin{aligned} x'_i m_x - y'_i \theta + x_0 - (x_i - x'_i) &= v_x; \\ y'_i m_y + x'_i \theta + y_0 - (y_i - y'_i) &= v_y. \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

Система нормальных уравнений будет иметь вид, показанный в формуле (8.2.4), где квадратные скобки обозначают гауссовское суммирование,  $n$  – число всех трансформируемых пунктов. Из решения системы (8.2.4) получаются параметры трансформирования  $m_x, m_y, \theta, x_0, y_0$ . Если величины  $m_x, m_y$  или  $\theta$  настолько малы, что на границе территории ( $x', y'$  максимальны) их влияние не превышает ошибки накалывания точки на наиболее крупномасштабный план, то они принимаются нулевыми и выполняется переопределение параметров трансформирования без них. В предельном случае, если  $x_0$  и  $y_0$  также пренебрежимо малы, то ключи остаются неизменными.

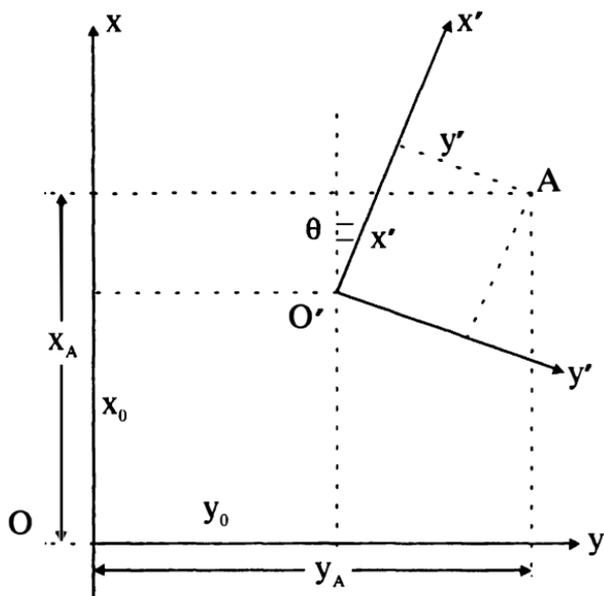


Рис. 8.1. Параметры преобразования плоских систем координат

$$\begin{bmatrix}
 [x_i'^2] & 0 & -[x_i'y_i'] & [x_i'] & 0 \\
 0 & [y_i'^2] & [x_i'y_i'] & 0 & [y_i'] \\
 -[x_i'y_i'] & [x_i'y_i'] & [x_i'^2 + y_i'^2] & -[y_i'] & [x_i'] \\
 [x_i'] & 0 & -[y_i'] & n & 0 \\
 0 & [y_i'] & [x_i'] & 0 & n
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 m_x \\
 m_y \\
 \theta \\
 x_0 \\
 y_0
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 [x_i'(x_i - x_i')] \\
 [y_i'(y_i - y_i')] \\
 [x_i'(y_i - y_i') - y_i'(x_i - x_i')] \\
 [x_i - x_i'] \\
 [y_i - y_i']
 \end{bmatrix}
 \quad (8.2.4)$$

В общем случае преобразование координат из местной системы в СК–95 осуществляется в два этапа. Сначала со старыми ключами координаты преобразовываются в систему 1942 года, затем с помощью найденных параметров осуществляется переход в СК–95. Обратное преобразование выполняется в обратном порядке. Чтобы не усложнять вычислений, найденные параметры могут быть “защиты” в программы пересчета координат для данного субъекта РФ, так как старые ключи все равно остаются секретными.

Такая методика определения параметров трансформирования поправок к координатам 1942 года (свободные члены уравнений (8.2.3)) пригодна для городских систем координат или когда субъект Федерации помещается в одной координатной зоне. Если субъект РФ расположен в нескольких координатных зонах, то необходимо выбрать центр трансформирования и от него отсчитывать координаты  $x'$  и  $y'$ . В качестве такого центра можно выбрать точку с координатами

$$B_n = [B'_i]/n, \quad L_n = [L'_i]/n, \quad (8.2.5)$$

которые перевычисляются в плоские прямоугольные  $x_n$ ,  $y_n$  с осевым меридианом  $L_n$ . Тогда  $x'_i$ ,  $y'_i$  будут равняться разности координат соответствующих пунктов, вычисленных в широкой зоне, охватывающей всю территорию субъекта РФ, и координат центра трансформирования. Хотя такая мера позволит определить параметры трансформирования, но пользоваться ими будет не очень удобно, так как для каждого пункта при преобразованиях координат с помощью ключей придется сначала вычислить его координаты в широкой зоне. Для этого от плоских прямоугольных координат (в местной или СК–95 в зависимости от направления преобразования) следует перейти в геодезическую систему координат, и по ним вычислить плоские прямоугольные координаты в широкой зоне.

Вычисление плоских координат в широкой зоне целесообразно также “защитить” в программы преобразования координат каждого субъекта РФ. В этом случае пользова-

тели даже не почувствуют разницы между пересчетом от местной системы координат к системе 1942 года или к системе 1995 года и обратно, так как в обоих случаях будут пользоваться только старыми ключами.

---

### **8.3. Алгоритм определения новых ключей местных систем координат**

---

Новые ключи местных систем координат определяются в следующей последовательности.

**1. Выбор пунктов, участвующих в вычислении новых ключей.** Так как на территории субъекта РФ могут оказаться тысячи и даже десятки тысяч пунктов (в экономически освоенных регионах), то необходимо выбрать равномерно распределенное на этой территории ограниченное число пунктов для вычисления ключей. Иначе на уточнение ключей может оказать влияние скученность пунктов на небольшой части территории.

Для этого по карте масштаба 1 : 1 000 000 определяем размер субъекта РФ по широте и по долготе с учетом необходимой зоны перекрытия с соседними субъектами. Затем разбиваем образовавшуюся трапецию на десять равных полос и десять равных столбцов (шаг сетки может подбираться в зависимости от размера территории субъекта РФ). В узлах этой сетки находим ближайшие пункты 1 и 2 классов (100 пунктов), с которыми и имеем дело в дальнейшем.

**2. Вычисление координат начала трансформирования.** Координаты выбранных пунктов 1 и 2 классов в СК-42 перевычисляются в геодезические и из них берутся средние значения

$$B_n = [B_i]/n, \quad L_n = [L_i]/n.$$

Теперь координаты  $B_n$ ,  $L_n$  и  $B_i$ ,  $L_i$  перевычисляются в

плоские прямоугольные  $x'$ ,  $y'$  в широкой зоне с осевым меридианом  $L_n$  и началом  $x_0 = x_n$ ,  $y_0 = 0$  м.

**3. Составление уравнений поправок** выполняется по формулам (8.2.3), однако в свободных членах  $x'_i$ ,  $y'_i$  означает координаты не в широкой зоне, а в системе 1942 года, в отличие от координат  $x_i$ ,  $y_i$  в СК–95. Следовательно, свободные члены равны поправкам к координатам 1942 года, полученным из уравнивания 1995 года.

Если их нет, то свободные члены вычисляются как разности координат в СК–95 и СК–42. Для получения поправок в единицах шестого знака и в секундах дуги коэффициенты при масштабах умножаются на  $10^{-6}$ , а при угле разворота делятся на  $\rho''$ . Если поправки к координатам 1942 года имеются, то необходимо проконтролировать, как вычислялись свободные члены при уравнивании 1995 года. Дело в том, что в некоторых организациях уравнения поправок записывают в виде  $Ax - l = v$ , где  $l =$  измерение – вычисленное значение, а в других – в виде  $Ax + l = v$ , где  $l =$  вычисленное значение – измерение. Во втором случае поправки  $x$  приходится вычитать из предварительных значений неизвестных, следовательно,  $x$  – не поправки, а ошибки, что вносит терминологическую путаницу. Правильнее первый вариант, который и принят в данной работе. Поэтому, если при уравнивании 1995 года “поправки” вычитались из предварительных координат 1942 года, то свободные члены в формуле (8.2.3) берутся с обратным знаком, а если прибавлялись, – то со своим знаком.

**4. Составление и решение нормальных уравнений.** Нормальные уравнения соответствуют формуле (8.2.4). Из их решения получаются все пять неизвестных. Если какие-либо неизвестные будет решено исключить после анализа их влияния, то соответствующие строки и столбцы матрицы нормальных уравнений и их свободные члены обнуляются, а вместо квадратичных коэффициентов нормальных уравнений записываются единицы, чтобы матрица могла быть обращена.

Анализ влияния неизвестных оценивается по величи-

нам  $(x, y)_m$  и  $(x, y)_\theta$ , где  $x, y$  – координаты угловых точек сетки на широкой полосе. Так как нормальные уравнения не меняются, то их можно сохранить для организации итеративного процесса уточнения определяемых параметров.

---

#### 8.4. Алгоритм пересчета координат пунктов из местных систем в СК–95 и обратно

---

##### **Пересчет координат пунктов из местных систем в СК–95**

Исходные данные:  $x_m, y_m$  – координаты пункта в местной системе;  $x_c, y_c, L_c$  – старые ключи местной системы координат – координаты условного начала и долгота осевого меридиана первой зоны;  $x_n, y_n, L_n$  – координаты начала и осевой меридиан центра трансформирования поправок координат 1942 года ( $y_n = 0$  м);  $m_x, m_y, \theta, x_0, y_0$  – параметры трансформирования. Необходимо получить  $x, y$  в СК–95.

1. С использованием старых ключей перевычисляем  $x_m, y_m$  в геодезические координаты  $B, L$  и в СК–42  $x_{42}, y_{42}$ .

2. Перевычисляем  $B, L$  в широкую зону с осевым меридианом  $L_n$  и условным началом  $x_n, y_n$  и получаем координаты  $x', y'$ .

3. Вычисляем координаты пункта в СК–95 по формулам

$$\begin{aligned}x_{95} &= x_{42} + x_0 + x' m_x - y' \theta; \\y_{95} &= y_{42} + y_0 + y' m_y + x' \theta,\end{aligned}\tag{8.4.1}$$

где угол  $\theta$  берется в радианах, если координаты – в метрах.

##### **Пересчет координат из СК–95 в местную систему координат**

Исходные данные:  $x, y$  – координаты пункта в СК–95;  $x_c, y_c, L_c, x_n, y_n, L_n$  – старые ключи и параметры центра трансформирования поправок координат;  $m_x, m_y, \theta, x_0, y_0$  – параметры трансформирования. Необходимо получить координаты пункта в местной системе.

1. По координатам в СК–95 вычисляем геодезические координаты пункта В, L.

2. Перевычисляем В, L в широкую зону от осевого меридиана  $L_n$  с условным началом  $x_n, y_n$  и получаем координаты  $x', y'$ .

3. Вычисляем координаты пункта в СК–42 по формулам

$$\begin{aligned}x_{42} &= x - x_0 - x' m_x + y' \theta; \\y_{42} &= y - y_0 - y' m_y - x' \theta.\end{aligned}\tag{8.4.2}$$

4. Со старыми ключами перевычисляем координаты из СК–42 в местную систему координат.

Здесь мы пренебрегли различием долгот пунктов, получаемых по координатам в СК–42 и в СК–95, равным средней поправке в ординату  $y_0$ . Эта величина, входящая затем в координаты в широкой зоне, умножается на малые величины  $m_x, m_y$  и  $\theta$ , и поэтому ее можно не учитывать. Для более строгого учета этой величины при обратном пересчете следует вычислять геодезические координаты по разностям  $x - x_0, y - y_0$ .

---

### **8.5. Методика преобразования координат пунктов низших классов в СК–95**

---

Для сохранения координат пунктов в местных системах необходимо уточнить их ключи для каждого субъекта Российской Федерации под условием минимума суммы квадратов остаточных расхождений координат в двух системах, как это описано выше.

Однако эта мера не устраняет индивидуальные смещения отдельных пунктов в результате уточнения их взаимного положения в ходе последнего уравнивания АГС. После подбора дополнительных ключей между СК–42 и СК–95, устраняющих региональные искажения геодезической сети на территории каждого субъекта РФ, координаты пунктов

АГС из уравнивания необходимо пересчитать с новыми ключами в местные системы координат. Таким образом будут устранены ошибки взаимного положения пунктов АГС на территории субъектов РФ.

Так как уравнивания сетей сгущения 3 и 4 классов в ближайшие годы не предвидится, возникает задача приведения координат пунктов этих классов в соответствие с результатами уравненных координат АГС. После выполнения этой задачи потребуется такое же преобразование координат пунктов более низких классов – разрядных, специальных и съемочных сетей.

Остаточные искажения в сетях низших классов могут исключаться некоторыми аппроксимирующими функциями или полиномами. Однако, так как остаточные отклонения на уровне сантиметров носят случайный характер, то никакая аналитическая функция не сможет понизить их до приемлемого уровня. И чем больше параметров аппроксимации будет определяться, чем на более обширной территории это будет выполняться, тем больше будут остаточные отклонения в координатах. Следовательно, площадь трансформируемой территории должна быть как можно меньше, а на этой минимальной площади должно определяться по возможности наибольшее число параметров, чтобы выйти за пределы случайных величин и преобразование координат происходило однозначно.

Такому требованию удовлетворяет каждый треугольник сети АГС. Тогда преобразование треугольника из СК–42 в СК–95 будет аналогично решению задачи Резави для вписания свободно уравненной сети (в СК–42) в систему исходных пунктов (в СК–95) по методу наименьших квадратов. Для этого метода связь координат общих пунктов выражается формулой

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\text{СК-95}} = (1 + m) \begin{bmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\text{СК-42}} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \quad (8.5.1)$$

где  $m$  – масштабная поправка;  $\theta$  – угол разворота координатных сеток в двух системах относительно друг друга;

$x_0, y_0$  – смещение сеток относительно друг друга. Именно эти параметры определялись в исследованиях ЦНИИГАиК.

Однако мы будем использовать более расширенную форму зависимости (8.5.1) в виде

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\text{СК-95}} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 + m_x)x \\ (1 + m_y)y \end{bmatrix}_{\text{СК-42}} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \quad (8.5.2)$$

для которой можем написать уравнения поправок вида

$$x m_x - y \theta + x_0 - (x_{\text{СК-95}} - x_{\text{СК-42}}) = v_x; \quad (8.5.3)$$

$$y m_y + x \theta + y_0 - (y_{\text{СК-95}} - y_{\text{СК-42}}) = v_y,$$

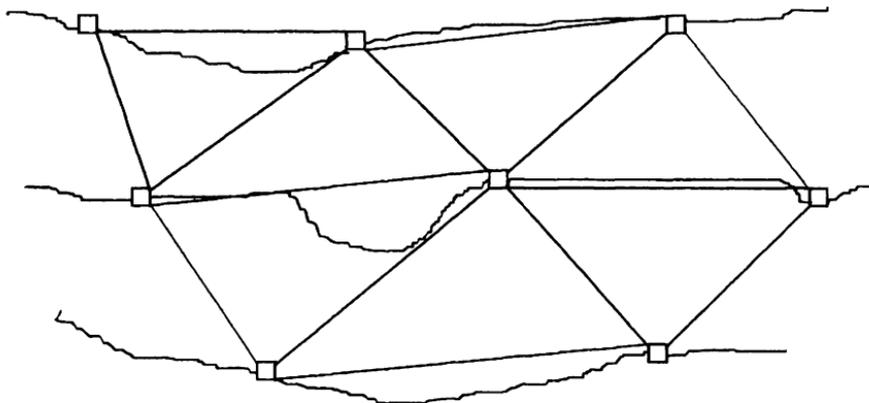
где  $m_x, m_y$  – масштабные поправки по соответствующим осям.

Координаты  $x, y$ , служащие в уравнениях (8.5.3) в качестве коэффициентов, отсчитываются от центра тяжести трансформируемого треугольника, которым в общем случае является точка пересечения медиан. Для этого вначале вычисляются координаты начала трансформирования как средние из координат пунктов в СК–42 на вершинах треугольника, затем эти значения вычитаются из всех координат.

Таким образом, для трех пунктов треугольника можем написать три пары уравнений (8.5.3) – всего шесть, а определяемых параметров пять, т. е. фактически преобразование треугольника в треугольник будет происходить однозначно при одном контрольном избыточном измерении. Теперь с полученными параметрами пункты 3 и 4 классов, попадающие внутрь данного треугольника, пересчитываются в СК–95. При этом неважно, какие наблюдения выполнялись между исходными и определяемыми пунктами, – предполагается, что искажения внутри треугольника оказывают одинаковое влияние на всей его площади.

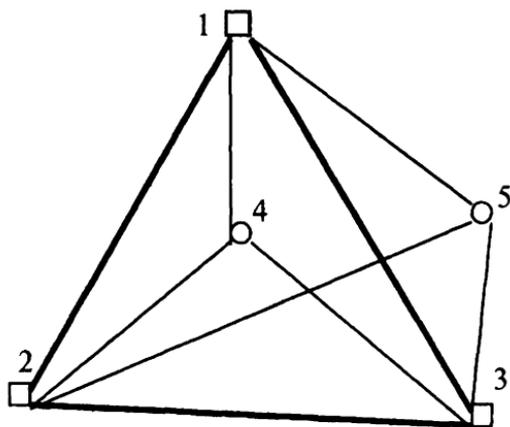
Если геодезические сети 1 и 2 классов создавались системой полигонометрических ходов, то треугольники выбираются из числа смежных параллельных ходов (рис. 8.2). На краю АГС могут оказаться пункты 3 и 4 классов, не

входящие в треугольники 1 и 2 классов. В этом случае они включаются в систему ближайшего треугольника.



**Рис. 8.2. Выбор треугольников между полигометрическими ходами**

При составлении программы преобразования координат пунктов 3 и 4 классов в СК-95 критерием попадания данного пункта внутрь исходного треугольника может служить сумма площадей треугольников. Например, на рис.



**Рис. 8.3. Положение пунктов относительно треугольника**

8.3 пункт 4 находится внутри треугольника 123, и для него

$$S_{123} = S_{124} + S_{134} + S_{234},$$

пункт 5 находится вне него, и для этого пункта

$$S_{123} < S_{125} + S_{135} + S_{235}.$$

Следовательно, для пунктов внутри треугольника соблюдается условие

$$S_{ijk} = S_{ijl} + S_{ikl} + S_{jkl},$$

$$(8.5.4)$$

где  $i, j, k$  – номера

исходных пунктов; / – номер пункта 3 или 4 класса.

Площади треугольников вычисляются по формуле

$$S = 0,5 [ x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) ], \quad (8.5.5)$$

где  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$  – координаты вершин треугольника.

Для того, чтобы не иметь дела с большими числами, все координаты могут быть поделены, например на  $10^3$ . Так как знак величины  $S$  зависит от порядка обхода вершин треугольника, то при вычислениях лучше использовать ее абсолютное значение.

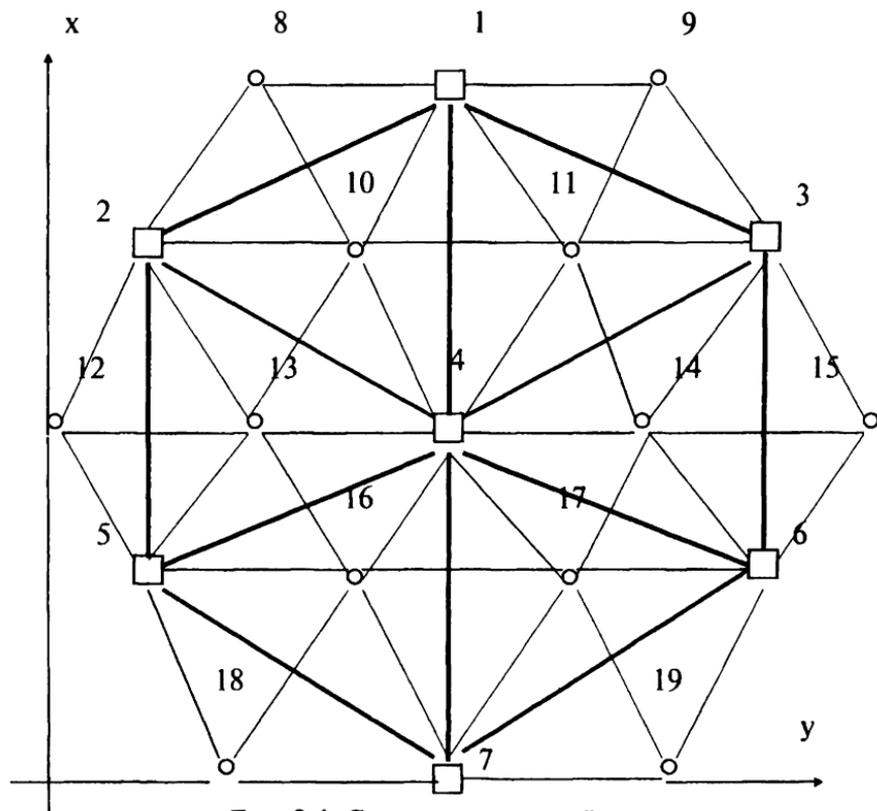
Необходимо иметь в виду, что координаты пунктов АГС не должны переводиться из СК–42 в СК–95 до тех пор, пока не будут трансформированы все пункты 3 и 4 классов во всех треугольниках, связанных с данным исходным пунктом, иначе результаты преобразования будут искажены. При этом определяемые параметры преобразования для окружающих пунктов будут утеряны, поэтому после трансформирования координат окружающих пунктов 3 и 4 классов координаты исходных пунктов в СК–42 лишь заменяются координатами в СК–95. В правомерности такой замены координат пунктов АГС можно убедиться при пересчете координат АГС из СК–42 в СК–95 с помощью найденных элементов трансформирования – остаточные ошибки округления не превышают 1 мм.

Преобразование координат пунктов 3 и 4 классов удобнее всего выполнять из СК–42 в СК–95, так как будут существовать параллельные каталоги в обеих системах. Координаты пунктов более низких классов могут преобразовываться непосредственно в местной системе координат после получения в ней координат ГГС 1 – 4 классов, особенно, если их списки имеются только в отдельных ведомствах и территориальных организациях Роскартографии. Во всяком случае координаты всех пунктов, имеющих в каталогах координат в СК–42, могут быть преобразованы в новую систему и пересчитаны в требуемую местную систему. Последовательность преобразования координат пунктов 3 и 4 классов не имеет значения. Коор-

динаты пунктов более низкого класса должны преобразовываться по треугольникам пунктов 1 – 4 классов, так как они являются для них исходными.

**Пример 8.1.**

Выполним преобразование координат пунктов 3 и 4 классов, приведенных на схеме геодезической сети (рис. 8.4).



**Рис. 8.4. Схема геодезической сети**

Условные обозначения:

□ — Пункты АГС  
 — — — Сторона АГС

○ — Пункты ГГС 3 и 4 классов  
 — — — Сторона ГГС 3 и 4 классов

В каждый треугольник исходных пунктов попадает один пункт 3, 4 класса, и к нему относится еще один наружный пункт. Предполагается, что на всех пунктах выполнены угловые наблюдения — их значения легко определить, так как все треугольники равносторонние. Вначале эта сеть была уравнена без внесения каких-либо ошибок в координаты или измерения. Полученные значения координат соответствуют уравниванию 1995 года.

Затем координаты исходных пунктов были изменены на следующие величины (табл. 8.1).

Т а б л и ц а 8.1

**Ошибки координат исходных пунктов в СК–42**

Ошибка, см	Номер пункта						
	1	2	3	4	5	6	7
$\delta x$	15	12	10	11	5	10	10
$\delta y$	10	7	13	11	5	9	10

Здесь предусмотрены и общие смещения, и разброс по  $x$  на 10 см, по  $y$  на 8 см. После этого сеть была переуравнена с теми же измерениями, что и в предыдущем случае, а полученные координаты приняты соответствующими каталогу СК–42.

В табл. 8.2 приведены результаты преобразования пунктов 3 и 4 классов по треугольнику 1–2–4, а в табл. 8.3 — сводка преобразованных координат и СКО преобразования координат пунктов 3 и 4 классов, вычисленных по истинным ошибкам, т. е. по разностям уравненных и преобразованных с помощью параметров координат. В табл. 8.2 и 8.5 угол разворота осей дан в угловых секундах, остальные величины в таблицах данного раздела — в метрах. В данном типичном случае регулярных поправок к координатам СК–42 из уравнивания АГС СКО получились на уровне нескольких миллиметров.

Параметры преобразования координат в треугольнике 1–2–4 приведены ниже.

Масштабная поправка к  $x$ , м . . .  $-2,66666007414709 \cdot 10^{-06}$

Масштабная поправка к  $y$ , м . . .  $-2,69429452711542 \cdot 10^{-06}$

Угол разворота осей . . . . .  $0,148145502751489''$

Сдвиг начала координат по  $x$ , м . . .  $-0,126666666667006$

Сдвиг начала координат по  $y$ , м .  $-9,33333333317326 \cdot 10^{-02}$

Т а б л и ц а 8.2

**Преобразованные координаты**

Номер	$x$	$y$	$H$
1	30 000,000	17 320,508	0,000
2	22 500,000	4330,127	0,000
0	0,000	0,000	0,000
4	15 000,000	17 320,508	0,000
0	0,000	0,000	0,000
0	0,000	0,000	0,000
0	0,000	0,000	0,000
8	30 000,003	8660,260	0,000
0	0,000	0,000	0,000
10	22 499,999	12 990,380	0,000
0	0,000	0,000	0,000

Т а б л и ц а 8.3

**Преобразованные координаты и их оценка точности**

Номер	$x$	$y$	$H$
1	2	3	4
1	30 000,000	17 320,508	0,000
2	22 500,000	4330,127	0,000
3	22 500,000	30 310,889	0,000
4	15 000,000	17 320,508	0,000
5	7500,000	4330,127	0,000
6	7500,000	30 310,889	0,000

1	2	3	4
7	0,000	17 320,508	0,000
8	30 000,003	8660,260	0,000
9	30 000,002	25 980,765	0,000
10	22 499,999	12 990,380	0,000
11	22 499,997	21 650,634	0,000
12	14 999,996	-0,008	0,000
13	15 000,006	8660,253	0,000
14	15 000,000	25 980,761	0,000
15	15 000,005	34 641,014	0,000
16	7499,996	12 990,385	0,000
17	7499,998	21 650,637	0,000
18	-0,009	8660,255	0,000
19	0,015	25 980,766	0,000
СКО	$5,9858 \cdot 10^{-03}$	$3,6223 \cdot 10^{-03}$	

**Примечание.** СКО вычислялись по истинным ошибкам только для определяемых пунктов 8–19.

Для исследования влияния более неблагоприятного распределения ошибок в координатах СК–42 в координаты исходных пунктов были введены ошибки, приведенные в табл. 8.4.

Т а б л и ц а 8.4

#### Неблагоприятное распределение ошибок исходных пунктов

Ошибка, см	Номер пункта						
	1	2	3	4	5	6	7
$\delta x$	10	10	0	10	0	10	-10
$\delta y$	10	10	0	10	10	-10	10

Здесь разброс по каждой координате составляет до 20 см. Кроме того, ошибки были введены таким образом, чтобы в каждом треугольнике проявлялось влияние определенных параметров преобразования координат.

Например, в треугольнике 1–2–4 действует влияние только смещений центра трансформирования координат, влиянием других параметров можно пренебречь. В треугольнике 1–3–4 сказывается в основном влияние параметра  $m_x$ , в треугольнике 3–4–6 – угла разворота и т. д.

Снова пункты 3 и 4 классов были переуровнены по тем же измерениям. Результаты трансформирования треугольника представлены в табл. 8.5, итоговые результаты – в табл. 8.6. Из табл. 8.6 видно, что СКО преобразования координат не превышает 3 – 4 см.

Таким образом, предлагаемая методика преобразования координат в новую систему может быть принята в основу программно-математического обеспечения такой работы. Проблемы, описанные в данной главе, возникают также при модернизации участков геодезической сети относительным методом космической геодезии, так как сети низших классов, как правило, не участвуют по тем или иным причинам (не сохранились материалы наблюдений и т. п.) в совместном уравнивании наземных и спутниковых данных.

Параметры преобразования координат в треугольнике 1–2–4 приведены ниже.

Масштабная поправка к  $x$ , м . . . . .  $1,21265867646278 \cdot 10^{-16}$   
 Масштабная поправка к  $y$ , м . . . . .  $7,00126506205553 \cdot 10^{-17}$   
 Угол разворота осей . . . . .  $7,22057079331674 \cdot 10^{-12}''$   
 Сдвиг начала координат по  $x$ , м  $-9,99999999991511 \cdot 10^{-02}$   
 Сдвиг начала координат по  $y$ , м . . . . .  $-0,099999999998848$

Т а б л и ц а 8.5

**Преобразованные координаты**

Номер	$x$	$y$	$H$
1	2	3	4
1	30 000,000	17 320,508	0,000
2	22 500,000	4330,127	0,000

1	2	3	4
0	0,000	0,000	0,000
4	15 000,000	17 320,508	0,000
0	0,000	0,000	0,000
0	0,000	0,000	0,000
0	0,000	0,000	0,000
8	30 000,013	8660,262	0,000
0	0,000	0,000	0,000
10	22 499,993	12 990,383	0,000
0	0,000	0,000	0,000
0	0,000	0,000	0,000
0	0,000	0,000	0,000
0	0,000	0,000	0,000
0	0,000	0,000	0,000
0	0,000	0,000	0,000
0	0,000	0,000	0,000
0	0,000	0,000	0,000
0	0,000	0,000	0,000
0	0,000	0,000	0,000

Т а б л и ц а 8.6

**Преобразованные координаты и оценка их точности**

Номер	x	y	H
1	2	3	4
1	30 000,000	17 320,508	0,000
2	22 500,000	4330,27	0,000
3	22 500,000	30 310,889	0,000
4	15 000,000	17 320,508	0,000
5	7500,000	4330,127	0,000
6	7500,000	30 310,889	0,000
7	0,000	17 320,508	0,000
8	30 000,013	8660,262	0,000
9	29 999,982	25 980,774	0,000
10	22 499,993	12 990,383	0,000
11	22 499,990	21 650,633	0,000

1	2	3	4
12	15 000,015	-0,030	0,000
13	15 000,002	8660,249	0,000
14	14 999,993	25 980,765	0,000
15	15 000,030	34 641,015	0,000
16	7500,007	12 990,362	0,000
17	7500,011	21 650,664	0,000
18	0,029	8660,235	0,000
19	0,098	25 980,795	0,000
СКО	$3,2287 \cdot 10^{-02}$	$1,7881 \cdot 10^{-02}$	

**Примечание.** СКО вычислены по истинным ошибкам только для определяемых пунктов 8–19.

---

### **8.6. Вычисление геодезического азимута, дирекционного угла и расстояния по разностям пространственных прямоугольных координат**

---

В разделе 5.5 говорилось о возможности уравнивания разностей координат в геодезической и плоской прямоугольной системах координат. Для этого разности пространственных прямоугольных координат необходимо перевычислить в разности геодезических или плоских прямоугольных координат или в длину линий и азимуты в соответствующих системах координат. В геодезической системе, кроме того, должны использоваться и разности геодезических высот, чтобы не происходило потери информации при ее преобразовании. В данном разделе рассматриваются некоторые вопросы преобразования разностей пространственных прямоугольных координат в длины линий и азимуты (дирекционные углы).

Все фирменные пакеты программ позволяют получать пространственные прямоугольные координаты X, Y, Z

концов базиса и вычислять их разность в общеземной системе координат. При этом координаты одного из пунктов (опорного) считаются известными, а координаты другого пункта определяются относительно опорного (отсюда название метода – относительный). Поэтому перед обработкой наблюдений координаты опорного пункта необходимо перевычислить в общеземную систему координат с помощью заранее известных параметров трансформирования координат из местной системы в общеземную.

Итак, если пространственные прямоугольные координаты концов базиса определены, то они могут быть перевычислены в геодезические на требуемом эллипсоиде и плоские прямоугольные в заданной проекции по схеме

$$X, Y, Z_{\text{ОЗЭ}} \rightarrow X, Y, Z_p \rightarrow B, L, H_p \rightarrow x, y, \quad (8.6.1)$$

где индекс  $p$  означает референцную систему координат.

Далее из решения обратной геодезической задачи на референц-эллипсоиде по методу Бесселя могут быть найдены азимут и длина геодезической линии, а из решения обратной геодезической задачи на плоскости – дирекционный угол и расстояние в проекции Гаусса.

Здесь мы представим другой способ решения той же задачи более соответствующий уравниванию пространственных геодезических сетей. Из относительных наблюдений навигационных спутников с двух пунктов получают разности геоцентрических декартовых координат  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ . По ним непосредственно на физической поверхности Земли можно получить азимут между наблюдавшимися пунктами. Предполагается при этом, что разности координат  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  приведены к центрам пунктов.

Рассмотрим топоцентрическую систему координат с началом в центре пункта 1 (рис. 8.5) и осью  $n$ , совпадающей с направлением нормали к общему земному эллипсоиду (ОЗЭ). Центр ОЗЭ совмещен с началом декартовой системы координат, а главные оси совпадают с ее осями  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Оси  $s$  и  $v$  направлены в сторону возрастания широт и долгот, т. е. в точки севера и востока соответственно, и

система координат является горизонтальной (см. раздел 1.7). Направляющие косинусы направления между пунктами 1 и 2 равны

$$m = \left( \frac{\Delta X}{D} \quad \frac{\Delta Y}{D} \quad \frac{\Delta Z}{D} \right), \quad (8.6.2)$$

где  $D = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}$  — наклонное расстояние между пунктами.

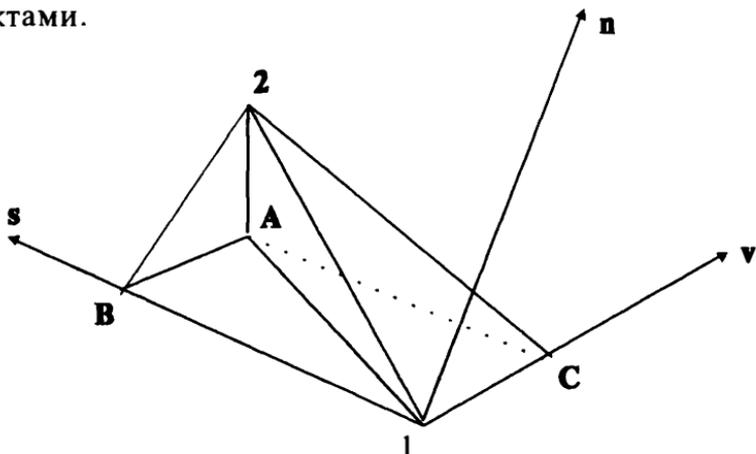


Рис. 8.5. Топоцентрическая горизонтальная система координат

Вычислим косинусы углов между вектором  $m$  и осями  $s$ ,  $v$ ,  $n$  как произведения соответствующих направляющих косинусов

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{-\Delta X \sin B \cos L - \Delta Y \sin B \sin L + \Delta Z \cos B}{D}; \\ \cos \beta &= \frac{-\Delta X \sin L + \Delta Y \cos L}{D}; \\ \cos z &= \frac{\Delta X \cos B \cos L + \Delta Y \cos B \sin L + \Delta Z \sin B}{D}. \end{aligned} \quad (8.6.3)$$

Теперь спроектируем наклонное расстояние  $D$  на оси  $s$  и  $v$   $1B = D \cos \alpha$ ;  $1C = D \cos \beta$ . Из рис. 8.5 легко заметить, что  $1B$  и  $1C$  являются также проекциями горизонтального

проложения  $1A$  расстояния  $D$  на те же оси, причем  $1B = 1A \cos A$ ;  $1C = 1A \sin A$ , где  $A$  – искомый азимут.

Следовательно,

$$\operatorname{tg} A = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{-\Delta X \sin L + \Delta Y \cos L}{-\Delta X \sin B \cos L - \Delta Y \sin B \sin L + \Delta Z \cos B}. \quad (8.6.4)$$

Формула (8.6.4) позволяет определить азимут по измененным относительным методом разностям пространственных декартовых координат и геодезическим координатам пункта  $1$ . Координаты  $X_1, Y_1, Z_1$  пункта  $1$  могут быть получены абсолютным навигационным методом при требуемой точности азимута  $1-2''$ , а затем пересчитаны в геодезическую систему. При более высокой требуемой точности азимута пункт  $1$  должен быть привязан к пунктам геодезической сети или его координаты должны быть определены из астрономических наблюдений, если недоступны точные эфемериды навигационных спутников. Для оценки точности азимута, вычисляемого по формуле (8.6.4), легко получить соответствующую формулу, продифференцировав ее по всем переменным  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, B, L$  и подставив производные в формулу Гаусса.

Так как при наблюдениях навигационных спутников направление отвеса не используется, а при вычислении азимута (8.6.4) используются геодезические координаты, то этот азимут является геодезическим. Для приведения этого азимута с поверхности Земли на эллипсоид необходимо ввести поправки за высоту наблюдаемого пункта

$$\delta a_n = 0,108'' \cos^2 B \sin 2A,$$

где  $H$  – высота пункта визирования в километрах;  $B$  – широта пункта наблюдения, и за переход от нормального сечения к геодезической линии

$$\delta a_n = -0,0000028'' s^2 \cos^2 B \sin 2A,$$

где  $s$  – расстояние между пунктами в километрах.

Аналогично можно вычислить азимут на любом эллипсоиде, если перевычислить координаты  $X_1, Y_1, Z_1$  в геодезические на соответствующем эллипсоиде. При переходе от полученного относительным методом азимута к астрономическому в азимут необходимо ввести поправку за уклонение отвесной линии

$$\delta a_v = (\xi \sin A - \eta \cos A) \operatorname{ctg} z,$$

где  $\xi, \eta$  – составляющие уклонения отвесной линии в пункте наблюдения.

Если составляющие уклонения отвесной линии даны на поверхности геоида или эллипсоида, то в составляющую в меридиане необходимо ввести поправку за приведение ее на поверхность Земли

$$\xi = \xi_c + 0,171'' H \sin 2B,$$

где  $B$  и  $H$  – широта и высота пункта наблюдения в километрах соответственно.

При этом, конечно, значение азимута по сравнению с азимутом на ОЗЭ изменится.

Практический интерес представляют возможность пересчета азимута с ОЗЭ на другие эллипсоиды без повторения всей обработки первичных наблюдений, а также оценка величины расхождения азимутов на ОЗЭ и другом эллипсоиде. Если координаты  $B_0, L_0$  пункта 1 и азимут на ОЗЭ известны, то  $B_0, L_0$  необходимо пересчитать на соответствующий эллипсоид  $B_p, L_p$ , с использованием элементов трансформирования  $m, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ , где  $m$  – масштабная поправка;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – углы поворота вокруг соответствующих осей;  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  – линейные элементы смещения центра нового эллипсоида относительно начала декартовой системы координат. Тогда геодезический азимут на новом эллипсоиде будет равен в общем случае

$$A = a - (L_0 - L_p) \sin B_0 - (\omega_x \cos L_0 + \omega_y \sin L_0) \cos B_0 - \omega_z \sin B_0 \quad (8.6.5)$$

и

$$A = a - (L_0 - L_p) \sin B_0, \quad (8.6.6)$$

если  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ , т. е. малая ось нового эллипсоида и ось  $Z$ , а также плоскость начального меридиана и плоскость  $XOZ$  общеземной декартовой системы координат параллельны.

Здесь углы  $\omega_i$  считаются положительными против хода часовой стрелки при взгляде на начало координат с конца соответствующей оси. Т. е. при преобразовании координат из общеземной системы в референцную, например, в систему 1942 года элементы трансформирования ПЗ–90 будут иметь обратный знак, чем при преобразовании координат из референцной в общеземную систему. Для вывода формулы (8.6.5) использовался следующий метод.

---

### 8.7. Метод вращений на сфере

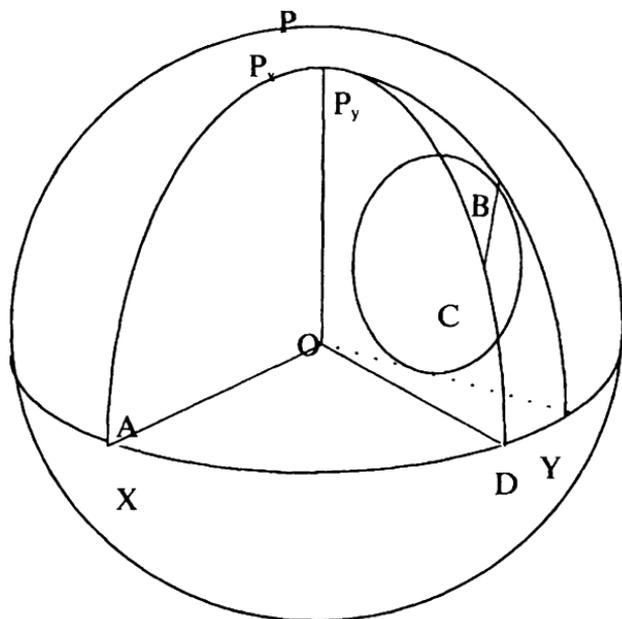
---

Во многих задачах сфероидической геодезии эллипсоид заменяется сферой, так как сжатие Земли настолько мало, что многие задачи можно решать на сфере, а затем при необходимости добавить небольшие поправки за эллиптичность. Предлагаемый метод состоит в вычислении координат точек окружностей, проведенных на поверхности сферы. Такой метод широко применяется не только в сфероидической геодезии, но и в астрономии, космической и наземной геодезии.

На рис. 8.6 на сфере проведена окружность с радиусом  $CB$  и центром в точке  $C$ , координаты которой  $B$ ,  $L$  отсчитываются от начального меридиана  $PX$  и плоскости экватора. Точка  $B$  на окружности задается азимутом  $PCB$ . При известных параметрах окружности и азимута точки  $B$  требуется найти ее координаты.

Из сферического треугольника  $PCB$  по теореме косинусов находим

$\cos(90^\circ - B_b) = \cos(90^\circ - B) \operatorname{cosp} + \sin(90^\circ - B) \operatorname{sinp} \cos A$ ,  
 где  $\rho = CB$  – радиус окружности;  $A$  – азимут точки  $B$ .



**Рис. 8.6. Окружность на сфере**

Из того же треугольника по теореме синусов находим

$$\sin(90^\circ - B_b) \sin(L_b - L) = \operatorname{sinp} \sin A,$$

а по формуле пяти элементов получаем

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - B_b) \cos(L_b - L) &= \operatorname{cosp} \sin(90^\circ - B) - \\ &- \operatorname{sinp} \cos(90^\circ - B) \cos A. \end{aligned}$$

После преобразований полученных формул имеем

$$\begin{aligned} \cos B_b \cos L_b \cos L + \cos B_b \sin L_b \sin L &= \operatorname{cosp} \cos B - \\ &- \operatorname{sinp} \sin B \cos A; \end{aligned}$$

$$\cos B_b \sin L_b \cos L - \cos B_b \cos L_b \sin L = \operatorname{sinp} \sin A;$$

$$\sin B_b = \sin B \cos \delta + \cos B \sin \rho \cos A. \quad (8.7.1)$$

Умножив первое из уравнений (8.7.1) на  $\cos L$ , второе на  $-\sin L$  и сложив их, найдем

$$\begin{aligned} \cos B_b \cos L_b &= (\cos \delta \cos B - \sin \rho \sin B \cos A) \cos L - \\ &- \sin \rho \sin L \sin A. \end{aligned}$$

Аналогично, умножив первое уравнение на  $\sin L$ , второе на  $\cos L$  и сложив их, получим

$$\begin{aligned} \cos B_b \sin L_b &= (\cos \rho \cos B - \sin \rho \sin B \cos A) \sin L + \\ &+ \sin \rho \cos L \sin A. \end{aligned}$$

Окончательно для вычисления координат точки В получаем формулы

$$\begin{aligned} \cos B_b \cos L_b &= (\cos \rho \cos B - \sin \rho \sin B \cos A) \cos L - \\ &- \sin \rho \sin L \sin A; \\ \cos B_b \sin L_b &= (\cos \rho \cos B - \sin \rho \sin B \cos A) \sin L + \\ &+ \sin \rho \cos L \sin A; \end{aligned} \quad (8.7.2)$$

$$\sin B_b = \sin B \cos \rho + \cos B \sin \rho \cos A.$$

Если повернуть точку В по окружности в сторону возрастания азимута, то в правой части уравнений (8.7.2) изменятся только функции азимута  $A + \sigma$ . При необходимости поворота точки В против хода часовой стрелки приращению азимута  $\sigma$  придается обратный знак, т. е.  $A - \sigma$ . Раскрыв в формулах (8.7.2) функции азимута, для новой точки D найдем

$$\begin{aligned} \cos B_d \cos L_d &= [\cos \rho \cos B - \sin \rho \sin B (\cos A \cos \sigma - \\ &- \sin A \sin \sigma)] \cos L - \sin \rho \sin L (\sin A \cos \sigma + \cos A \sin \sigma); \\ \cos B_d \sin L_d &= [\cos \rho \cos B - \sin \rho \sin B (\cos A \cos \sigma - \\ &- \sin A \sin \sigma)] \sin L + \sin \rho \cos L (\sin A \cos \sigma + \cos A \sin \sigma); \\ \sin B_d &= \sin B \cos \rho + \cos B \sin \rho (\cos A \cos \sigma - \sin A \sin \sigma). \end{aligned} \quad (8.7.3)$$

При малом угле поворота  $\sigma$  можно применять приближенные формулы

$$\begin{aligned} \cos B_d \cos L_d &= \cos B_b \cos L_b + \sigma \sin p (\sin B \cos L \sin A - \\ &- \sin L \cos A); \\ \cos B_d \sin L_d &= \cos B_b \sin L_b + \sigma \sin p (\sin B \sin L \sin A + \\ &+ \cos L \cos A); \\ \sin B_d &= \sin B_b - \sigma \sin p \cos B \sin A. \end{aligned} \tag{8.7.4}$$

При малых углах поворота формулы (8.7.4) позволяют вычислить координаты новой точки добавлением малых приращений к координатам предыдущей точки, что находит применение во многих задачах геодезии.

Полученные формулы можно использовать для исследования изменений координат точки на поверхности Земли под влиянием малых углов поворота  $\omega$  при преобразовании координат с помощью семи элементов из референцной в общеземную систему координат и обратно. Указанные углы считаются положительными в направлении против хода часовой стрелки при взгляде с конца соответствующей оси декартовой системы на начало координат. Пусть точка  $C$  — исследуемая точка, ось  $X$  направлена в точку  $A$ , ось  $Z$  в точку  $P$ , ось  $Y$  вправо под прямым углом к плоскости  $XOZ$ . В таком случае угол  $\omega_x$  — это поворот точки  $P$  вокруг оси  $OX$  влево, угол  $\omega_y$  — поворот той же точки вокруг оси  $OY$  в плоскости начального меридиана в сторону точки  $A$ . Угол  $\omega_z$  — это поворот точки  $A$  вокруг полюса  $P$  в сторону возрастания долгот, т. е. все повороты осуществляются по большому кругу. Рассмотрим, как изменяются координаты точки  $C$  при осуществлении поворотов на указанные малые углы.

**Вращение на угол  $\omega_x$ .** Координаты полюса вращения  $B = L = 0^\circ$ ; радиус вращения  $AC$ ; азимут  $A = PAC$ . Вычислим значения радиуса вращения и начального азимута точки  $C$ . Из треугольника  $APC$  по теореме косинусов находим

$$\cos \rho = \cos 90^\circ \cos(90^\circ - B_C) + \sin 90^\circ \sin(90^\circ - B_C) \cos L_C = \cos B_C \cos L_C$$

по теореме синусов

$$\sin \rho \sin A = \sin L_C \sin(90^\circ - B_C) = \cos B_C \sin L_C.$$

Из треугольника ACD по теореме синусов определяем

$$\sin \rho \sin(90^\circ - A) = \sin B_C \sin 90^\circ \text{ или } \sin \rho \cos A = \sin B_C.$$

Теперь, используя формулы (8.7.4), находим

$$\cos B_o \cos L_R = \cos B_C \cos L_C;$$

$$\cos B_o \sin L_R = \cos B_C \sin L_C - \omega_x \sin B_C; \quad (8.7.5)$$

$$\sin B_o = \sin B_C + \omega_x \cos B_C \sin L_C.$$

Умножив первое из уравнений (8.7.5) на  $\cos L_C$ , второе на  $\sin L_C$  и сложив их, находим  $\cos B_R = \cos B_C - \omega_x \sin B_C \sin L_C$ . С учетом третьего уравнения получаем

$$\operatorname{tg} B_o = \frac{\sin B_C + \omega_x \cos B_C \sin L_C}{\cos B_C - \omega_x \sin B_C \sin L_C} = \operatorname{tg} B_C [1 + \omega_x \sin L_C (\operatorname{ctg} B_C + \operatorname{tg} B_C)]. \quad (8.7.6)$$

Учитывая, что  $\operatorname{tg} B_o - \operatorname{tg} B_C = \frac{\sin(B_o - B_C)}{\cos B_o \cos B_C}$  и  $\cos B_o \approx \cos B_C$ ,

из (8.7.6) получаем

$$\frac{\sin(B_o - B_C)}{\cos B_o \cos B_C} = \omega_x \sin L_C \frac{\operatorname{tg} B_C}{\sin B_C \cos B_C} = \omega_x \frac{\sin L_C}{\cos^2 B_C},$$

откуда

$$B_o = B_C + \omega_x \sin L_C. \quad (8.7.7)$$

Разделив второе из уравнений (8.7.5) на первое, аналогично получаем

$$\operatorname{tg} L_o = \frac{\cos B_C \sin L_C - \omega_x \sin B_C}{\cos B_C \cos L_C} = \operatorname{tg} L_C \left( 1 - \omega_x \frac{\operatorname{tg} B_C}{\sin L_C} \right),$$

откуда

$$\frac{\sin(L_0 - L_C)}{\cos L_0 \cos L_C} = -\omega_x \frac{\operatorname{tg} B_C}{\cos L_C}$$

или 
$$L_0 = L_C - \omega_x \operatorname{tg} B_C \cos L_C. \quad (8.7.8)$$

**Вращение на угол  $\omega_y$ .** Координаты полюса вращения  $B = 0^\circ$ ;  $L = 90^\circ$ ; радиус  $\delta = CY$ ; азимут  $A = 360^\circ - PYC$ . Из треугольника  $PYC$  по теореме косинусов находим

$$\cos(90^\circ - B_C) = \cos 90^\circ \cos \rho + \sin 90^\circ \sin \rho \cos(360^\circ - A)$$

или

$$\sin \rho \cos A = \sin B_C,$$

по теореме синусов

$$\sin \rho \sin(360^\circ - A) = \sin(90^\circ - B_C) \sin(90^\circ - L_C)$$

или

$$\sin \rho \sin A = -\cos B_C \cos L_C.$$

Из формул (8.7.4) определяем

$$\cos B_0 \cos L_0 = \cos B_C \cos L_C + \omega_y \sin B_C;$$

$$\cos B_0 \sin L_0 = \cos B_C \sin L_C; \quad (8.7.9)$$

$$\sin B_0 = \sin B_C - \omega_y \cos B_C \cos L_C.$$

Умножив первое из уравнений (8.7.9) на  $\cos L_0$ , второе на  $\sin L_0$  и сложив их, находим

$$\cos B_0 = \cos B_C + \omega_y \sin B_C \cos L_C,$$

а с учетом третьего уравнения

$$\operatorname{tg} B_0 = \frac{\sin B_C (1 - \omega_y \operatorname{tg} B_C \cos L_C)}{\cos B_C (1 + \omega_y \operatorname{tg} B_C \cos L_C)} = \operatorname{tg} B_C \left( 1 - \frac{\omega_y \cos L_C}{\sin B_C \cos B_C} \right).$$

Отсюда

$$\frac{\sin(B_0 - B_C)}{\cos B_0 \cos B_C} = -\frac{\omega_y \cos L_C}{\cos^2 B_C}$$

или

$$B_0 = B_C - \omega_Y \cos L_C. \quad (8.7.10)$$

Поделив второе из уравнений (8.7.9) на первое, находим

$$\operatorname{tg} L_0 = \frac{\cos B_C \sin L_C}{\cos B_C \cos L_C \left(1 + \omega_Y \frac{\operatorname{tg} B_C}{\cos L_C}\right)} = \operatorname{tg} L_C \left(1 - \omega_Y \frac{\operatorname{tg} B_C}{\cos L_C}\right)$$

или 
$$\frac{\sin(L_0 - L_C)}{\cos L_0 \cos L_C} = -\omega_Y \operatorname{tg} B_C \frac{\sin L_C}{\cos^2 L_C},$$

откуда 
$$L_0 = L_C - \omega_Y \operatorname{tg} B_C \sin L_C. \quad (8.7.11)$$

**Вращение на угол  $\omega_z$ .** Координаты полюса вращения  $B = 90^\circ$ ;  $L = 180^\circ$ ;  $\rho = 90^\circ - B_C$ ;  $A = 360^\circ - L_C$ . Из формул (8.7.4) получаем

$$\begin{aligned} \cos B_0 \cos L_0 &= \cos B_C \cos L_C - \omega_z \sin(90^\circ - B_C) \sin L_C = \\ &= \cos B_C \cos L_C - \omega_z \cos B_C \sin L_C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos B_0 \sin L_0 &= \cos B_C \sin L_C + \omega_z \sin(90^\circ - B_C) \cos L_C = \\ &= \cos B_C \sin L_C + \omega_z \cos B_C \cos L_C; \end{aligned}$$

$$\sin B_0 = \sin B_C. \quad (8.7.12)$$

Аналогично предыдущим случаям находим

$$\cos B_0 = \cos B_C; \quad \operatorname{tg} B_0 = \operatorname{tg} B_C,$$

откуда

$$B_0 = B_C. \quad (8.7.13)$$

Поделив второе уравнение на первое, находим

$$\operatorname{tg} L_0 = \frac{\cos B_C \sin L_C (1 + \omega_z \operatorname{ctg} L_C)}{\cos B_C \cos L_C (1 - \omega_z \operatorname{tg} L_C)} = \operatorname{tg} L_C \left(1 + \frac{\omega_z}{\sin L_C \cos L_C}\right)$$

или

$$\frac{\sin(L_o - L_C)}{\cos L_o \cos L_C} = \frac{\omega_z}{\cos^2 L_C},$$

откуда

$$L_o = L_C + \omega_z. \quad (8.7.14)$$

Суммарное влияние всех углов поворота на геодезические координаты можно найти, сложив малые члены в формулах (8.7.7), (8.7.10), (8.7.13) и (8.7.8), (8.7.11), (8.7.14)

$$\begin{aligned} B_o &= B_C + \omega_x \sin L_C - \omega_y \cos L_C; \\ L_o &= L_C - (\omega_x \cos L_C + \omega_y \sin L_C) \operatorname{tg} B_C + \omega_z. \end{aligned} \quad (8.7.15)$$

Формулы (8.7.15) приводят референчные координаты  $B_C$ ,  $L_C$  в общеземную систему, так как вращения на углы  $\omega$  выполнялись вокруг осей референчной системы. При обратном пересчете вращения будут выполняться вокруг осей общеземной системы на углы  $-\omega$ . Влияние углов  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  аналогично влиянию координат полюса  $y$ ,  $x$  с переменной направления осей, поэтому они, кроме геодезических координат, оказывают влияние на геодезические азимуты.

На рис. 8.6 положения полюса после поворотов на углы  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  обозначены  $P_x$  и  $P_y$  соответственно. В треугольнике  $PP_xC$  угол  $P_xCP$  равен разности азимутов при старом полюсе  $P$  и новом полюсе  $P_x$ , поэтому по теореме синусов можем написать

$$\sin(\alpha_o - \alpha) \sin(90^\circ - B_C) = \sin \omega_x \sin(90^\circ - L_C),$$

откуда

$$\alpha_o = \alpha + \omega_x \frac{\cos L_C}{\cos B_C}. \quad (8.7.16)$$

Аналогично для угла  $\omega_y$  по теореме синусов находим

$$\sin(\alpha_o - \alpha) \sin(90^\circ - B_C) = \sin \omega_y \sin L_C,$$

откуда

$$\alpha_o = \alpha + \omega_Y \frac{\sin L_C}{\cos B_C} \quad (8.7.17)$$

или суммарно

$$\alpha_o = \alpha + (\omega_X \cos L_C + \omega_Y \sin L_C) \sec B_C. \quad (8.7.18)$$

При переходе от астрономического азимута к геодезическому оба фактора (изменение координат полюса и долготы точки наблюдения) воздействуют одновременно, поэтому

$$\begin{aligned} A_o &= A - [(\omega_X \cos L_C + \omega_Y \sin L_C) \operatorname{tg} B_C - \omega_Z] \sin B_C + \\ &+ (\omega_X \cos L_C + \omega_Y \sin L_C) \sec B_C = A + (\omega_X \cos L_C + \omega_Y \sin L_C) \times \\ &\times \cos B_C + \omega_Z \sin B_C, \end{aligned} \quad (8.7.19)$$

где  $A$  — геодезический азимут на референц-эллипсоиде, вычисленный по формуле Лапласа.

#### Пример 8.7.1.

Как известно, элементами трансформирования координат из СК–42 в общеземную систему в соответствии с параметрами ПЗ–90 являются масштабная поправка  $m = 0$ , углы поворота вокруг соответствующих осей декартовой общеземной системы координат  $\omega_X = 0''$ ,  $\omega_Y = 0,35''$ ,  $\omega_Z = 0,66''$  и линейные элементы  $\Delta X = 25$  м,  $\Delta Y = -141$  м,  $\Delta Z = 80$  м.

Так как координаты пунктов КГС при выводе системы СК–95 остались неизменными, а оси вращения Земли и референц-эллипсоида Красовского были приведены в параллельное положение, линейные элементы СК–95 относительно ПЗ–90 стали равны  $\Delta X = 25,9$  м,  $\Delta Y = -130,94$  м,  $\Delta Z = -81,76$  м. Следовательно, референц-эллипсоид Красовского был развернут на величины углов  $\omega_Y = 0,35''$ ,  $\omega_Z = 0,66''$ .

Для подтверждения вышеприведенных формул рассмотрим численный пример вычисления азимутов на различных эллипсоидах относимости. Из решения обратной геодезической задачи на ОЗЭ между точками 1 и 2 координатами  $B_1 = 50^\circ$ ,  $L_1 = 50^\circ$ ,  $B_2 = 50^\circ 10'$ ,  $L_2 = 50^\circ 15'$  находим азимут  $a = 43^\circ 53' 20,7478''$ , который принимаем за астрономический. Уклонение отвесной линии считаем в этой точке равным нулю, кроме того, геодезическую высоту второй точки берем равной 52,0121 м, что соответствует зенитному расстоянию  $z = 90^\circ$ . Пересчитаем координаты этих точек в системы СК–42 и СК–95 и по полученным координатам снова решим обратные задачи.

В результате получаем на ОЗЭ

$$B_1 = 50^\circ, L_1 = 50^\circ, H_1 = 0 \text{ м}, a = 43^\circ 53' 20,7478'', \\ s = 25\,764,888 \text{ м};$$

в СК–42

$$B_1 = 49^\circ 59' 59,5228'', L_1 = 50^\circ 00' 05,1698'', H_1 = 9,8149 \text{ м}, \\ A = 43^\circ 53' 25,3864'', s = 25\,764,8472 \text{ м}, \xi' = 0,4772'', \\ \eta' = -3,3231''; a' = 43^\circ 53' 21,4261'';$$

в СК–95

$$B_1 = 49^\circ 59' 59,5401'', L_1 = 50^\circ 00' 05,2223'', H_1 = 5,8146 \text{ м}, \\ A = 43^\circ 53' 24,7485'', s = 25\,764,8634 \text{ м}, \xi' = 0,4599'', \\ \eta = -3,3568''; a' = a = 43^\circ 53' 20,748''.$$

После учета непараллельности осей вращения и плоскостей начальных меридианов по формуле (8.7.19) в СК–42 получаем  $\xi = 0,7022''$ ;  $\eta = -3,5419''$ ;  $a = 43^\circ 53' 20,7482''$ . Как видим, переход к астрономическому азимуту осуществляется с высокой точностью, но составляющие уклонения отвесной линии и в СК–95, и в СК–42 остаются относительными. Для пересчета уклонений отвесных линий с эллипсоида на эллипсоид необходимо использовать формулы (1.6.5) для перевычисления координат и

применять полученные координаты для вычисления уклонов отвесных линий на соответствующем эллипсоиде.

При уравнивании геодезических сетей на плоскости для оценки точности азимута и расстояния, полученных относительным методом, продифференцируем формулу (8.6.4) по  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ ,  $B$  и  $L$ . Для удобства запишем эту формулу в виде

$$\operatorname{tg} A = \alpha / \beta,$$

где  $\alpha = -\Delta X \sin L + \Delta Y \cos L$ ,  $\beta = -\Delta X \sin B \cos L - \Delta Y \sin B \sin L + \Delta Z \cos B$ .

Тогда

$$\frac{dA}{\cos^2 A} = \frac{\operatorname{tg} A}{\alpha} (d\alpha - d\beta); \quad d\alpha = -\sin L d\Delta X + \cos L d\Delta Y -$$

$$-(\Delta X \cos L + \Delta Y \sin L) dL;$$

$$d\beta = -\sin B \cos L d\Delta X - \sin B \sin L d\Delta Y + \cos B d\Delta Z -$$

$$-(\Delta X \cos B \cos L + \Delta Y \cos B \sin L + \Delta Z \sin B) dB +$$

$$+(\Delta X \sin B \sin L - \Delta Y \sin B \cos L) dL.$$

Дифференциал азимута равен

$$dA = \frac{\sin A}{-\Delta X \sin L + \Delta Y \cos L} \left\{ -(\cos A \sin L - \sin A \sin B \cos L) d\Delta X + \right. \\ \left. + (\cos A \cos L + \sin A \sin B \sin L) d\Delta Y - \sin A \cos B d\Delta Z + \right. \\ \left. + (\Delta X \cos B \cos L + \Delta Y \cos B \sin L + \Delta Z \sin B) \sin A dB - \right. \\ \left. - [(\cos A \cos L + \sin A \sin B \sin L) \Delta X + (\cos A \sin L - \right. \\ \left. - \sin A \sin B \cos L) \Delta Y] dL \right\} \quad (8.7.20)$$

Дифференциал расстояния  $D = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}$  будет равен

$$\frac{\Delta X}{D} d\Delta X + \frac{\Delta Y}{D} d\Delta Y + \frac{\Delta Z}{D} d\Delta Z. \quad (8.7.21)$$

Обозначим коэффициенты при независимых аргументах в выражении (8.7.20)  $a_i$ ,  $i = \Delta X, \Delta Y, \Delta Z, B, L$ , в выражении (8.7.21)  $b_i$ . Тогда можно написать

$$\begin{bmatrix} dD \\ dA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & 0 & 0 \\ b_x & b_y & b_z & b_B & b_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Delta X \\ d\Delta Y \\ d\Delta Z \\ dB \\ dL \end{bmatrix}. \quad (8.7.22)$$

Математическим ожиданием вектора (8.7.22) является ковариационная матрица

$$\mathbf{K}_{DA} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & 0 & 0 \\ b_x & b_y & b_z & b_B & b_L \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} K_{\Delta X \Delta X} & K_{\Delta X \Delta Y} & K_{\Delta X \Delta Z} & 0 & 0 \\ K_{\Delta X \Delta Y} & K_{\Delta Y \Delta Y} & K_{\Delta Y \Delta Z} & 0 & 0 \\ K_{\Delta X \Delta Z} & K_{\Delta Y \Delta Z} & K_{\Delta Z \Delta Z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \\ 0 & b_B \\ 0 & b_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{DD} & c_{DA} \\ c_{DA} & c_{AA} \end{bmatrix}, \quad (8.7.23)$$

где  $c_{DD} = a_x^2 K_{\Delta X \Delta X} + 2a_x a_y K_{\Delta X \Delta Y} + 2a_x a_z K_{\Delta X \Delta Z} + a_y^2 K_{\Delta Y \Delta Y} + 2a_y a_z K_{\Delta Y \Delta Z} + a_z^2 K_{\Delta Z \Delta Z}$  ;

$c_{DA} = a_x b_x K_{\Delta X \Delta X} + (a_x b_y + a_y b_x) K_{\Delta X \Delta Y} + (a_x b_z + a_z b_x) K_{\Delta X \Delta Z} + a_y b_y K_{\Delta Y \Delta Y} + (a_y b_z + a_z b_y) K_{\Delta Y \Delta Z} + a_z b_z K_{\Delta Z \Delta Z}$  ;

$c_{AA} = b_x^2 K_{\Delta X \Delta X} + 2b_x b_y K_{\Delta X \Delta Y} + 2b_x b_z K_{\Delta X \Delta Z} + b_y^2 K_{\Delta Y \Delta Y} + 2b_y b_z K_{\Delta Y \Delta Z} + b_z^2 K_{\Delta Z \Delta Z} + b_B^2 K_B + b_L^2 K_L$  ;

$K_{\Delta U \Delta V}$  – элементы ковариационной матрицы разностей

координат, выбираемые из протокола первичной обработки наблюдений;  $K_B$ ,  $K_L$  — дисперсии геодезических координат пункта наблюдений, которые считаются некоррелированными. Если для  $B$ ,  $L$  известна ковариационная матрица, то она берется в полном виде.

В уравнивание на плоскости расстояние и азимут должны включаться с полученной ковариационной матрицей.

### Пример 8.7.2.

По изложенному алгоритму была составлена программа, которая позволяет считывать измерительную информацию из  $I$ -файла (аппаратура фирмы Ashtech, см. рис. 4.3 и 4.4) и вычислять азимут, дирекционный угол и расстояние на плоскости (табл. 8.7).

Т а б л и ц а 8.7

#### Список ориентирных направлений

Направление с пункта на пункт	Азимут $a/m_a$	Дирекционный угол $\alpha/k_{aD}$	Расстояние $D/m_D$
1200—2200	2 715 440,94 $\pm 3,67$	2 725 918,98 0,22	51,429 $\pm 0,001$
1200—2290	2 715 511,33 $\pm 7,35$	2 725 949,36 0,19	51,421 $\pm 0,001$
1200—2218	2 715 449,86 $\pm 8,36$	2 725 927,89 -0,08	51,429 $\pm 0,001$
1200—2227	2 715 524,16 $\pm 5,47$	2 730002,19 -0,50	51,428 $\pm 0,001$
1200—2300	2 715 539,48 $\pm 19,76$	2 730017,51 -0,92	51,436 $\pm 0,004$

В строке ниже азимутов и расстояний даются их СКО (считается, что ошибка хорды равна ошибке расстояния на плоскости), а между ними (под дирекционными углами) — коэффициент их корреляции. В последней строке видно, что при  $k_{aD}$  большем 0,9 СКО азимута резко увеличивается,

хотя измерения выполнены на одном и том же базисе. Видимо, здесь сказывается ухудшение геометрического фактора вследствие неоптимального расположения базиса и спутников.

Данная программа позволяет исследовать эксцентриситет фазового центра антенны, если между сеансами наблюдений поворачивать его на определенный угол  $\phi$  (например, на  $60^\circ$  или  $90^\circ$ ). В табл. 8.7 приведен пример обработки таких наблюдений с поворотом диска антенны на  $90^\circ$  по ходу часовой стрелки между сеансами.

Так как последний часовой сеанс наблюдений был выполнен при начальном положении антенны с замыканием круга, то образовавшуюся невязку можно считать следствием постепенного ухудшения геометрии расположения базиса и созвездия спутников и ее надо разбросать между сеансами пропорционально длительности сеансов. Так как все сеансы были приблизительно равны 1 ч, то невязки полученных в табл. 8.7 величин можно разбросать пропорционально номерам сеансов по формулам

$$\alpha_i = \alpha_1 + \Delta\alpha (n - i); \quad D_i = D_1 + \Delta D (n - i), \quad (8.7.24)$$

где  $\Delta\alpha = \alpha_n - \alpha_1$ ;  $\Delta D = D_n - D_1$ ;  $n = 5$  при повороте антенны на  $90^\circ$ ,  $n = 7$  при повороте антенны на  $60^\circ$ .

Координаты положения фазового центра исследуемой (ведомой) антенны относительно первой станции на каждом сеансе наблюдений могут быть вычислены в проекции Гаусса по формулам

$$x_i = D_i \cos \alpha_i; \quad y_i = D_i \sin \alpha_i. \quad (8.7.25)$$

Так как фазовый центр вращается от сеанса к сеансу вокруг геометрического центра, его координаты равны среднему из значений фазового центра без последнего сеанса

$$x_r = \sum x_i / (n - 1); \quad y_r = \sum y_i / (n - 1). \quad (8.7.26)$$

Теперь можем вычислить линейный и угловой элементы эксцентриситета в начальном положении антенны по

формулам

$$c = \sum c_i / (n - 1); \quad \beta = \sum \beta_i / (n - 1), \quad (8.7.27)$$

где  $c_i = \sqrt{(x_i - x_r)^2 + (y_i - y_r)^2}$ ;  $\beta_i = \arctg(y_i - y_r) / (x_i - x_r) - \phi (i - 1)$ ; координаты фазового центра антенны относительно геометрического центра равны

$$x_\phi = c \cos b; \quad y_\phi = c \sin b. \quad (8.7.28)$$

Для оценки точности получения координат фазового центра вычислим сначала их теоретические значения в каждом сеансе, кроме последнего, которое уже использовано для исключения ошибки замыкания, по формулам

$$\begin{aligned} u_i &= x_r + c \cos[\beta + \phi (i - 1)]; \\ v_i &= y_r + c \sin[\beta + \phi (i - 1)], \end{aligned} \quad (8.7.29)$$

а затем СКО фазового центра по формулам

$$\begin{aligned} m_x &= \sqrt{(x_i - u_i)^2 / (n - 1)}; \\ m_y &= \sqrt{(y_i - v_i)^2 / (n - 1)}. \end{aligned} \quad (8.7.30)$$

Результаты, полученные по данным табл. 8.7, следующие: координаты фазового центра равны:  $x_\phi = 0,0006$  м;

$y_\phi = -0,0049$  м; СКО  $m_x = 0,006$  м;  $m_y = 0,005$  м.

Как видим, в данном случае координаты фазового центра совпадают с геометрическим центром в пределах СКО определения.

### **УРАВНИВАНИЕ РАЗНОРОДНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ НЕИЗВЕСТНОМ СООТНОШЕНИИ ИХ ВЕСОВ**

Если при развитии геодезической сети относительным методом использовалась аппаратура разного класса точности (одно- и двухчастотные приемники) или наряду со спутниковыми измерениями привлекались и наземные измерения, то качество полученных из уравнивания результатов во многом будет зависеть от правильности установления соотношения весов различных видов измерений. Очевидно, что веса разностей координат, полученных с помощью спутниковой аппаратуры, будут значительно больше весов наземных измерений. Но насколько? Насколько будут различаться веса разностей координат, полученных одночастотной и двухчастотной аппаратурой? С другой стороны современные электронные дальнометры (например типа Геодиметр) позволяют измерять длины линий в наземных геодезических сетях с точностью, сравнимой с точностью относительных измерений спутниковой аппаратурой.

Если уравнивается один вид измерений, то безразлично, какой вес им будет назначен — результат будет один и тот же, лишь бы не было потери значности при вычислительных операциях. При уравнивании разнородных измерений, как правило, веса устанавливают по априорным данным:

- паспортным данным приборов;
- результатам предварительной обработки измерений (уравнивание направлений на станции, по невязкам фигур, аппроксимации спутниковых данных полиномами и т. п.);
- результатам предыдущих уравниваний геодезических сетей и т. д.

Однако все эти способы обладают присущими им недостатками.

Например, паспортные данные устанавливаются, как правило, на испытательских заводских стендах и не учитывают влияния реальных внешних условий наблюдений. Результаты предварительной обработки не учитывают влияния источников ошибок, действующих на совокупности пунктов (фазность визирных целей, региональные поля рефракции и т. п.) и орбит спутников. Например, в триангуляции известен “парадокс отдельного треугольника”, состоящий в том, что реальная невязка треугольника всегда оказывается больше той, которая подсчитана теоретически по результатам обработки угловых наблюдений на станции.

Последний способ является более надежным из перечисленных, но и он не учитывает возможное различие состава измерений, влияния ошибок исходных данных. К тому же предыдущих уравниваний просто может не быть, как это имеет место сейчас при работе с геодезическими сетями, созданными относительным методом космической геодезии. Некоторое представление о соотношении весов разнородных измерений может дать ее предварительное пробное уравнивание. Но на его результаты большое влияние оказывают те априорные веса, которые при этом были назначены.

Поэтому наиболее надежным способом установления соотношения весов различных видов измерений было бы их вычисление в ходе самого уравнивания. Такая идея выдвигалась еще Ф.Р. Гельмертом [75]. В последнее время разработаны подобные способы [5, 44, 74, 76], основанные на применении метода максимального правдоподобия (ММП) Фишера для получения так называемых достаточных статистик для выборок с известными законами распределения вероятностей. ММП включает в себя метод наименьших квадратов, как частный случай, и позволяет, наряду с неизвестными параметрами, определять ковариационные матрицы измерений. При использовании ММП для определения ковариационных матриц и неизвестных параметров необходимо продифференцировать функции по матрицам и векторам (см. приложение 2).

---

## 9.1. Сущность метода максимального правдоподобия и достаточные статистики

---

Метод максимального правдоподобия был предложен Р.А. Фишером в работе [73] и служит для проверки статистических гипотез и доверительного интервального оценивания в больших выборках. Если известна плотность совместного распределения выборочных значений случайных величин  $x_i$  и параметров  $\theta$   $f(x_1, \dots, x_n; \theta)$ , то оценки максимального правдоподобия находятся из условия  $\lambda(\theta; X) = \sup \lambda(\theta; X)$ , где  $\theta$  – вектор  $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ , функция правдоподобия  $\lambda(\theta; X)$  пропорциональна функции плотности вероятности, т. е.  $\lambda(\theta; X) = k(\mathbf{x}) f(x_1, \dots, x_n; \theta)$ . Здесь выборочные значения  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  являются реализацией случайных величин  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ . Условие нахождения верхней грани функции правдоподобия означает нахождение ее максимума.

Оценки метода максимального правдоподобия обладают следующими свойствами [25]. Если рассматриваемое семейство распределений удовлетворяет определенным условиям регулярности, то оценки максимального правдоподобия являются наилучшими асимптотически нормальными оценками. Кроме того, вследствие свойства инвариантности, если  $\hat{\theta}$  – оценка максимального правдоподобия параметра  $\theta$ , то  $g(\hat{\theta})$  – оценка максимального правдоподобия для любой функции  $g(\theta)$  параметра  $\theta$ . Этим свойством инвариантности не обладают другие оценки.

При определенных условиях регулярности оценки максимального правдоподобия являются строго состоятельными, а при условиях регулярности и состоятельности ее асимптотически эффективная дисперсия совпадает с нижней границей Крамера-Рао. И, наконец, если семейство  $\mathcal{P}$  вероятностных мер принадлежит  $k$ -параметрическому экспоненциальному типу, к которому относится и нормальное распределение, то оценка максимального правдоподобия всегда будет минимальной достаточной статистикой.

Понятие достаточных статистик было введено в работе [72] Р.А. Фишером, который указал, что статистика достаточна для целей статистических выводов, если она содержит в некотором смысле всю “информацию” о функции распределения, в соответствии с которой порождены выборочные значения. Если  $T(\mathbf{X})$  — достаточная статистика (функция наблюдаемых случайных величин  $\mathbf{X}$ ), то условное ожидание любой другой статистики  $Z(\mathbf{X})$  не зависит от  $\theta \in \mathcal{P}$  и она не добавляет ничего, относящегося к статистической информации о  $\mathcal{P}$ . Более того, знание выборочного значения достаточной статистики дает исследователю всю эмпирическую информацию, необходимую для моделирования эквивалентной выборки. Это может быть сделано, например, методами моделирования Монте-Карло.

Условия достаточности статистики даются С.Р. Рао [50] в трех эквивалентных формулировках:

а) функция распределения условной вероятности  $P(A/t)$  не зависит от  $\theta$  для любого  $A \in \mathcal{A}$ ,

в) математическое ожидание  $M(Y/t)$  не зависит от  $\theta$  для любой случайной величины  $Y$  такой, что  $M(Y) < \infty$ ;

с) условное распределение любой случайной величины  $Y$  при фиксированном  $T = t$ , которая всегда существует, не зависит от  $\theta$ . Следовательно, один из методов проверки, является ли  $T(\mathbf{X})$  достаточной статистикой, состоит в нахождении условного распределения случайных величин  $X_1, \dots, X_n$  при заданном  $T(\mathbf{X})$ . Однако в общем случае этот метод труден для применения на практике.

Достаточно простой критерий определения существования для семейства  $\mathcal{P}$  функций распределения достаточной статистики и ее вида дает факторизационная теорема Неймана-Фишера, строгое доказательство которой дано только в 1949 году Халмошем и Сэвиджем. Пусть случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  имеют нормальное распределение  $\mathcal{M}(\theta, 1)$ ,  $-\infty < \theta < \infty$ , т. е.

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n; \theta) &= (2\pi)^{-n/2} \exp\{-1/2 \sum (x_i - \theta)^2\} = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \exp\{-1/2 \sum (x_i - X_n)^2\} \exp\{-n/2(X_n - \theta)^2\}, \quad (9.1.1) \end{aligned}$$

где  $\theta$  — истинное значение неизвестного параметра, оценкой которого является выборочное среднее  $X_n$ .

В данном случае совместная плотность распределения факторизуется в произведение двух неотрицательных функций, первая из которых не зависит от параметра  $\theta$ , а вторая зависит от выборки  $x_1, \dots, x_n$  только через достаточную статистику  $X_n$ . Здесь не приводятся теорема факторизации и ее доказательство (см. работу [25]).

Отметим лишь, что минимальные достаточные статистики тесно связаны с экспоненциальным семейством функций распределений, что вытекает из работы [23], в которой важную роль играет логарифм функции правдоподобия. В этом случае для существования достаточной статистики необходимо, чтобы функция распределения принадлежала к — параметрическому типу Купмена-Дармуа и объем выборки  $n$  был больше  $k$ .

Таким образом, обработка измерений по ММП дает достаточные статистики (значения неизвестных и их ковариационные матрицы), которые содержат всю статистическую информацию о первичных измерениях в сжатом без потерь виде. Если полученные результаты будут подвергаться дальнейшей обработке, то достаточные статистики обеспечивают идентичность результатов двухэтапной обработки с результатами непосредственной одноэтапной обработки.

---

## 9.2. Уравнивание разнородных измерений с неизвестными весами методом максимального правдоподобия

---

Плотность совместного распределения  $n$  измерений для нормального распределения равна

$$f(l; x) = (2\pi)^{-n/2} \sigma_0^{-n} |P|^{1/2} \exp\{-1/2\sigma_0 (Ax - l)^T P (Ax - l)\}, \quad (9.2.1)$$

где  $\sigma_0^2$  — дисперсия единицы веса;  $P = \sigma_0^2 K^{-1}$  — весовая

матрица измерений;  $|P|$  – определитель весовой матрицы;  $K$  – ковариационная матрица ошибок измерений;

$$Ax - l = v \quad (9.2.2)$$

– система уравнений поправок с матрицей  $A$ , вектором уточняемых параметров  $x$ , векторами свободных членов  $l$  и поправок к измерениям  $v$ .

Если есть сомнения в типе распределения, то выполняется проверка нормальности распределения методами, изложенными в работе [33].

Натуральный логарифм функции правдоподобия равен

$$\ln L = -n/2 \ln 2\pi - n \ln \sigma_0 + 1/2 \ln |P| - 1/2 \sigma_0^2 (Ax - l)^T P (Ax - l). \quad (9.2.3)$$

Для нахождения достаточных статистик вычислим производные от этой функции по неизвестным  $x$ ,  $\sigma_0$ ,  $P$  и приравняем их к нулю

$$\frac{\partial \ln L}{\partial x} = -\frac{2}{2\sigma_0^2} (A^T P A x - A^T P l) = 0;$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_0} = -\frac{n}{\sigma_0} + \frac{2}{2\sigma_0^3} v^T P v = 0; \quad (9.2.4)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial P} = \frac{1}{2} P^{-1} - \frac{1}{2\sigma_0^2} v v^T = 0.$$

Из первого уравнения выражений (9.2.4) находим систему нормальных уравнений

$$A^T P A x - A^T P l = 0, \quad (9.2.5)$$

откуда, учитывая уравнение (9.2.2), находим  $A^T P v = 0$ , а также

$$x = (A^T P A)^{-1} A^T P l. \quad (9.2.6)$$

Из второго уравнения следует

$$\sigma_0^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} / n. \quad (9.2.7)$$

Несмещенная оценка дисперсии единицы веса может быть найдена по формуле

$$\sigma_0^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} / (n - k), \quad (9.2.8)$$

но для вычисления достаточных статистик не рекомендуется убирать смещение и формула (9.2.8) должна использоваться лишь после окончания уравнивания.

Из третьего уравнения получаем

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}^T}{\sigma_0^2} \quad \text{или} \quad \mathbf{P} = \sigma_0^2 (\mathbf{v} \mathbf{v}^T)^{-1}, \quad (9.2.9)$$

Так как матрица  $\mathbf{v} \mathbf{v}^T$  является особенной и не подлежит обращению, то в работе [5] для вычисления математического ожидания указанного векторного произведения  $M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)$  рекомендуется использовать многократные выборки вектора  $\mathbf{v}$ . Однако на практике это трудно реализуемо, а, кроме того, до уравнивания вектора  $\mathbf{v}$  вообще не существует. Поэтому для получения вектора  $\mathbf{v}$  вначале используют априорно назначенные веса, но в этом случае вектор  $\mathbf{v}$  получается в соответствии с назначенными весами. Если уточнение весов выполнять методом итераций, то результат будет зависеть от выбранного метода приближений.

Для преодоления всех этих трудностей в работе [44] было предложено принять некоторые априорные ограничения. Во-первых, предполагается, что в уравнивании участвуют независимые группы равноточных измерений. В геодезической практике обычно так и принимается. Например, угловые измерения, выполненные с помощью приборов одного типа по единой программе, считаются равноточными. Внутри групп измерения могут иметь корреляционные связи, но между группами измерений таких связей быть не должно.

Во-вторых, сформулируем понятия модели уравниваемого объекта и оценки его состояния. Совокупность координат исходных пунктов и предварительных координат

определяемых пунктов образует математическую модель геодезической сети. Качество математической модели оценивается степенью ее приближения к измерительным данным.

Отклонение измеренной величины от вычисленной по модельным данным характеризуется свободным членом соответствующего уравнения поправок или невязками условных уравнений соответствующих фигур. В целом качество модели характеризуется ковариационной матрицей параметров модели, т. е. координат пунктов и других величин, включенных в модель. Степень приближения модели к совокупности измерений характеризуется дисперсией единицы веса, зависимость между элементами модели – корреляционной матрицей.

Из анализа вида уравнений поправок (9.2.2) видно, что если процесс уравнивания повторять методом приближений, то вектор поправок к параметрам модели  $\mathbf{x}$  будет стремиться к нулю по мере приближения уточняемой модели к состоянию оптимального соответствия совокупности измерений. В этом случае  $\mathbf{v} = -\mathbf{l}$ , т. е. текущее состояние модели должно оцениваться величинами  $-\mathbf{l}$ , а конечное  $\mathbf{v} = -\mathbf{l}$ . Следовательно, в ходе приближений поправки, вычисленные из предыдущей итерации, служат отрицательными свободными членами уравнений поправок для следующего приближения.

С учетом указанных двух предположений теперь можем вычислить ковариационную матрицу измерений в виде

$$\mathbf{K} = \mathbf{M}(\mathbf{w}\mathbf{w}^T) = \{\sigma_i^2 \mathbf{E}_i\}, \quad (9.2.10)$$

где  $\sigma_i^2 = l/l_i / n_i$  для  $i$ -го вида измерений;  $\mathbf{E}_i$  – единичная матрица размером  $n_i \times n_i$  ( $n_i$  – число измерений  $i$ -го вида).

Ковариационная матрица  $\mathbf{K}$  является квазидиагональной, содержащей блоки вида  $\sigma_i^2 \mathbf{E}_i$ . Теперь весовая матрица может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{P} = \left\{ \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} n_i}{l^T \mathbf{P} l n} \mathbf{E}_i \right\}, \quad (9.2.11)$$

однако в первом приближении вектор  $\mathbf{v}$  еще неизвестен и, кроме того, определяемая матрица  $\mathbf{P}$  входит в обе части уравнения. Поэтому вектор  $\mathbf{v}$  здесь также заменяется вектором  $-\mathbf{l}$  по вышеприведенным соображениям. Кроме того, известно [26], что  $\sigma_0^2 = \sigma_i^2 p_i$ . В этом легко убедиться, вычислив квадратичную форму

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{v}_i &= (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T - \mathbf{l}_i^T) \mathbf{P}_i (\mathbf{A}_i \mathbf{x} - \mathbf{l}_i) = \mathbf{l}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{l}_i - \mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{l}_i = \\ &= \text{Tr}(\mathbf{l}_i^T \mathbf{l}_i \mathbf{P}_i) - \text{Tr}[\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{l}_i \mathbf{l}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_i \mathbf{A})^{-1}] = \\ &= \text{Tr}(\mathbf{K}_i \mathbf{P}_i) - \text{Tr}[\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{K}_i \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_i \mathbf{A})^{-1}] = \\ &= \sigma_0^2 \{n_i - \text{Tr}[\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_i \mathbf{A})^{-1}]\}. \end{aligned}$$

Откуда

$$\sigma_0^2 = \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{v}_i}{n_i - \text{Tr}[\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_i \mathbf{A})^{-1}]} = \sigma_i^2 p_i. \quad (9.2.12)$$

При выполнении вычислений имелось в виду, что блоки матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{K}$ , и вектора  $\mathbf{l}$ , не относящиеся к  $i$ -й группе измерений равны нулю, а измерения в группе равноточны.

Теперь вводим третье ограничение на измерения [44]. Устанавливаем, что весовая матрица одной из групп измерений, например первой, равна  $\mathbf{E}_1$  и не меняется в ходе уточнения соотношения весов. Следовательно, дисперсия единицы веса  $\sigma_0^2 = \sigma_1^2$ . С учетом третьего условия весовая матрица измерений перед уравниванием вычисляется по формуле

$$\mathbf{P} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{l}_i^T \mathbf{l}_i n_i \\ \mathbf{l}_i^T \mathbf{l}_i n_i \end{array} \mathbf{E}_i \right\}. \quad (9.2.13)$$

Практическая реализация процесса уточнения соотношения весов осуществляется по следующему алгоритму.

1. Для каждой группы измерений составляются уравнения поправок и отдельные системы нормальных уравнений с весом измерений 1. Одновременно при составлении уравнений поправок для каждой группы измерений подсчитываются суммы квадратов свободных членов  $\sum \mathbf{l}_i^2$ .

2. По формулам  $p_i = n_i \sum_1^{n_1} l_j^2 / n_1 \sum_1^{n_i} l_j^2$  вычисляются веса

каждой группы измерений и соответствующая система нормальных уравнений умножается на свой вес.

3. Приведенные к единому масштабу весов системы нормальных уравнений складываются и решаются совместно.

4. Используя уточненные значения искомым неизвестных из последнего решения повторяют пункты 1 – 3 алгоритма. Приближения заканчиваются при выполнении условия  $x_i < \epsilon$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $\epsilon$  – установленная точность вычисления неизвестных. Например, при уравнивании геодезических сетей можно принять  $\epsilon = 1$  мм.

Как видим, отличие уравнивания ММП от обычного метода наименьших квадратов заключается в предварительном вычислении весов измерений и раздельном составлении нормальных уравнений каждой равноточной группы измерений. Дальнейшее рассмотрение свойств такого уравнивания выполнено ниже на примере линейно-угловой плановой геодезической сети.

---

### **9.3. Сравнение способов определения весов измерений из уравнивания**

---

В работах [44, 74, 76] приводится один и тот же пример уравнивания линейно-угловой сети (рис. 9.1), что позволяет сравнить эффективность предлагаемых в этих работах способов уточнения весов измеренных величин. На рис. 9.1 а – исходная сторона между исходными пунктами, б – стороны с измеренными направлениями и длинами линий, с – стороны с измеренными направлениями. Значения измеренных величин приведены в табл. 9.1.

Здесь не рассматривается способ вычисления ковариационной матрицы из многократной реализации вектора измерений [5], так как он почти не реализуем на практике.



В работах [74, 76] предпринимается попытка реализовать способ 2 при вычислении вектора поправок к измерениям по формуле

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} - \mathbf{l}, \quad (9.3.1)$$

которая получается после подстановки значения  $\mathbf{x}$  из (9.2.6) в выражение (9.2.5). Однако этот вектор относится к урвненным измерениям и является зависимым с ковариационной матрицей

$$\mathbf{K}_v = \mathbf{K} - \mu^2 \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T, \quad (9.3.2)$$

где  $\mu^2$  – апостериорная дисперсия единицы веса, в то время как сами измерения в [76] предполагаются независимыми.

Таким образом, ковариационная, а значит и весовая матрица, полученная с помощью вектора (9.3.1), не имеет отношения к весам измерений и однозначно задается априорными значениями весов, что признается в работе [74]. Попытка применить такой способ к определению весов отдельных измерений, а также их ковариаций окончательно запутывает алгоритм и приводит к появлению отрицательных дисперсий, усложняет вычисления и затрудняет отбраковку некачественных измерений. Для направления алгоритма в разумное русло в работе [76] предлагается ввести в решение дополнительные неравенства вида  $\sigma_i^2 > 0$ , где  $\sigma_i^2$  – дисперсия  $i$ -го вида измерений. В табл. 9.2 приведены результаты, полученные разными авторами.

В варианте способа [44] было принято  $\epsilon = 0,001''^2$ . Для координат в табл. 9.2 приведены только доли метра, так как метры во всех вариантах совпадают. Величины  $\sigma^2$  вычислялись по формуле (9.2.7),  $m$  – их несмещенные оценки, – по формуле (9.2.8).

Как видно из сравнения средних квадратических ошибок направлений  $m_n$  в вариантах уравнивания только углов и способа [44], в полевом варианте она несколько увеличилась из-за естественного несогласия угловых и линейных измерений. В первом варианте это несогласие отразилось в СКО линейных измерений  $m_s = 3,01$  см, хотя элементы ковариационной матрицы координат определяемых пунктов уменьшились (табл. 9.3, 9.4) вследствие добавления линейных измерений.

## Результаты уравнивания различными способами

Обозначение	Способ уравнивания		
	[76]	Только углы	[44]
$\mathbf{v}_H^T \mathbf{v}_H$	17,51*	12,70	13,03
$\mathbf{v}_S^T \mathbf{v}_S$	17,29*	34,67*	29,40
$\sigma_0^2 = \sigma_H^2$	1,00	0,53	0,54
$\sigma_S^2$	2,56	4,95*	4,20
$\rho_S$	0,39	0,11*	0,13
$x_2, \text{ м}$	,335	,330	,331
$y_2$	,408	,411	,410
$x_3$	,163	,163	,163
$y_3$	,778	,788	,785
$x_5$	,130	,131	,131
$y_5$	,400	,407	,405
$x_6$	,841	,846	,845
$y_6$	,983	,992	,989
$m_H''$	1,15*	0,98	0,995
$m_S, \text{ см}$	2,14*	3,01*	2,77

**Примечание.** \* Величины, вычисленные по измеренным величинам и уравненным в данном варианте координатам.

## Ковариационная матрица координат (способ [44])

	$x_2$	$y_2$	$x_3$	$y_3$	$x_5$	$y_5$	$x_6$	$y_6$
$x_2$	0,09	-0,04	0,04	-0,06	0,01	-0,01	0,00	-0,03
$y_2$		0,12	-0,02	0,06	0,01	-0,01	0,02	0,01
$x_3$			0,05	0,01	0,01	0,00	0,02	0,01
$y_3$				0,13	0,01	0,03	0,05	0,08
$x_5$					0,08	0,00	0,04	-0,02
$y_5$						0,15	0,00	0,07
$x_6$							0,09	0,06
$y_6$								0,16

**Ковариационная матрица координат (способ [76])**

	$x_2$	$y_2$	$x_3$	$y_3$	$x_5$	$y_5$	$x_6$	$y_6$
$x_2$	0,22	0,07	0,05	0,00	0,00	0,05	0,01	0,03
$y_2$		0,34	0,09	0,19	0,00	0,00	0,04	0,01
$x_3$			0,25	0,06	0,08	0,00	0,18	0,00
$y_3$				0,18	0,03	0,03	0,07	0,03
$x_5$					0,34	0,08	0,14	0,01
$y_5$						0,27	0,06	0,16
$x_6$							0,42	0,02
$y_6$								0,15

Как было установлено экспериментально [44] при совместном уравнивании двух видов измерений (угловых и линейных), их СКО увеличиваются пропорционально СКО, полученным при раздельном уравнивании, что отмечено и в работе [52]. Этот факт позволяет вычислить СКО линейных измерений при их раздельном уравнивании, если бы это было возможно (в данном случае для этого мало линейных измерений), по формуле

$$m_{s1} = m_{s2} \frac{m_{n1}}{m_{n2}} = 2,77 \frac{0,98}{0,995} \text{ см} = 2,73 \text{ см.} \quad (9.3.3)$$

В способе [76] приведены следующие значения величин  $v_n^T v_n = 7,05$ ,  $v_s^T v_s = 4,30$ , а ковариационная матрица определяемых пунктов оказалась в 2 – 3 раза хуже, чем в способе [44] (см. табл. 9.4). Следует отметить, что эффективность линейных измерений такой точности в данной сети оказалась весьма незначительной, так как ковариационная матрица комбинированного решения по сравнению с уравниванием только угловых измерений улучшилась лишь примерно на 3%.

Уравнивание по способу [44] выполнялось при различных предварительных значениях координат пунктов и весов измерений, но каждый раз получался один и тот же результат. Поэтому выводы, сделанные в работе [76], не

подтвердились, и в этой теории имеются существенные недостатки, отмеченные выше.

Для исследования влияния производных высших порядков в уравнениях поправок линейно-угловой сети дополнительно было выполнено уравнивание итеративным методом с заданными весами (без их уточнения). При этом была выявлена такая особенность: число приближений при одних и тех же значениях предварительных координат является наименьшим в случае, когда веса измерений соответствуют значениям, полученным в результате их уточнения, причем число приближений одинаково как при уточнении, так и при задании правильных весов. Это свидетельствует о том, что способ уравнивания, приведенный в работе [44], наиболее отвечает существу метода наименьших квадратов.

Определим, с какой точностью получаются веса изложенным в работе [44] способом. Продифференцируем выражение (9.2.12) по  $\sigma_i$  и с учетом того, что

$$m_{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{2n}, \quad (9.3.4)$$

по формуле Гаусса получим среднюю квадратическую ошибку веса  $i$ -го вида измерений

$$m_{p_i} = \sqrt{\left(-\frac{2\sigma_0^2}{\sigma_i^3}\right)^2 \frac{\sigma_i^2}{2n_i}} = p_i \sqrt{\frac{2}{n_i}}, \quad (9.3.5)$$

что совпадает с выводами работы [45].

Для рассмотренного примера  $m_{p_n} = 0,29$ ;  $m_{p_s} = 0,07$  или  $p_n = 1 \pm 0,29$ ;  $p_s = 0,13 \pm 0,07$ . Как видно из этого примера, при небольшом числе однородных измерений оценка их весов получается недостаточно уверенно, однако сами результаты уравнивания оказываются наиболее соответствующими данной совокупности измерений.

---

#### **9.4. Иерархическое уравнивание разнородных измерений**

---

Большинство геодезических задач на практике решается в результате многоэтапного уравнивания: предварительного уравнивания непосредственных измерений для получения некоторых осредненных величин и затем уравнивания их для получения искомых неизвестных. Например, в наземной геодезии каждую величину измеряют несколькими приемами для контроля качества измерений и ослабления влияния их случайных ошибок. Предварительное уравнивание этих измерений заключается в их простом осреднении или, например, в уравнивании на станции угловых величин. Далее эти средние величины включаются в уравнивание геодезической сети для получения координат определяемых пунктов.

В космической геодезии измерения, как правило, однократные, но они выполняются с такой частотой на трассе спутника, что их приходится разреживать, получая более редкие “нормальные места” с помощью сглаживания некоторыми полиномами. В дальнейшем уравнивание космической геодезической сети для получения координат пунктов включаются полученные сглаженные значения измеренных величин. В относительном методе космической геодезии вначале получают уравненные значения разностей координат между парами пунктов, которые подлежат дальнейшему уравниванию при высокоточных геодезических работах. Получаемые вместе с разностями координаты пунктов могут при этом приниматься лишь как предварительные.

Теория многоэтапного уравнивания рассматривалась многими авторами, например [53], и только для случая, когда веса измерений принимались априорно известными. Рассмотрим эту задачу в случае, когда веса измерений определяются в ходе самого уравнивания, как изложено в предыдущих разделах. При этом в качестве аксиом принимаются следующие предположения, вытекающие из геодезической практики.

1. На каждом этапе уравнивания используются различные математические модели, в которых проявляется действие разных источников ошибок. Ошибки, проявляющиеся на каждом этапе, являются случайными и независимыми, хотя ошибки из последующего этапа являются систематическими для предыдущего этапа.

2. Результаты непосредственного (одноэтапного) и многоэтапного уравниваний должны совпадать.

Пусть система уравнений поправок первого этапа имеет вид

$$\mathbf{Ax} - l = \mathbf{v}, \mathbf{P}_1, \quad (9.4.1)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица  $n \times k$  коэффициентов уравнений поправок;  $n$  – число измерений;  $k$  – число неизвестных;  $\mathbf{x}$  – вектор поправок к предварительным значениям неизвестных параметров;  $l$  и  $\mathbf{v}$  – векторы свободных членов и поправок измерений;  $\mathbf{P}$  – весовая матрица измерений.

Уравнения поправок для второго этапа запишем в виде

$$\mathbf{By} - \mathbf{x} = \mathbf{v}_x, \mathbf{P}_x, \quad (9.4.2)$$

где  $\mathbf{B}$  – матрица  $k \times g$  коэффициентов;  $g$  – размерность вектора неизвестных  $\mathbf{y}$ ;  $\mathbf{v}_x$  – вектор поправок к “измерениям”;  $\mathbf{P}_x$  – весовая матрица.

Если подставить значение вектора  $\mathbf{x}$  из (9.4.2) в (9.4.1), получим систему уравнений поправок для непосредственного уравнивания

$$\mathbf{ABy} - l = \mathbf{v} + \mathbf{Av}_x, \mathbf{P}. \quad (9.4.3)$$

Используя метод наименьших квадратов, решение системы (9.4.1) можно получить в виде

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 l \quad (9.4.4)$$

с ковариационной матрицей

$$\mathbf{K}_x = \sigma_1^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A})^{-1}, \quad (9.4.5)$$

где  $\sigma_1^2$  – апостериорная дисперсия единицы веса, полученная на первом этапе.

Если формально принять  $\mathbf{P}_x = \sigma_0^2 \mathbf{K}_x^{-1}$ , из решения

системы (9.4.2) можно получить вектор  $\mathbf{y}$  в виде

$$\mathbf{y} = (\mathbf{B}^T \mathbf{P}_x \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_x \mathbf{x} = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{I} \quad (9.4.6)$$

с ковариационной матрицей

$$\mathbf{K}_y = \sigma_x^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \mathbf{B})^{-1}, \quad (9.4.7)$$

где  $\sigma_x^2$  – апостериорная дисперсия единицы веса на втором этапе.

Если этот вектор получить из решения системы (9.4.3), то

$$\mathbf{y} = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{I} \quad (9.4.8)$$

с ковариационной матрицей

$$\mathbf{K}_y = \sigma_2^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{B})^{-1}. \quad (9.4.9)$$

Отсюда следует, что  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1$  и  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ .

Теперь применим к этой задаче метод максимального правдоподобия. Пусть функция плотности распределения вероятностей для выполненных наблюдений имеет вид

$$L = (2\pi)^{-n/2} |\mathbf{K}|^{-1/2} \exp\{-1/2 (\mathbf{w} - \mathbf{w}^*)^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{w} - \mathbf{w}^*)\}, \quad (9.4.10)$$

где  $n$  – размерность истинного  $\mathbf{w}$  и измеренного  $\mathbf{w}^*$  векторов;  $\mathbf{K} = M[(\mathbf{w} - \mathbf{w}^*)(\mathbf{w} - \mathbf{w}^*)^T]$  – неизвестная полная ковариационная матрица ошибок измерений;  $M$  – символ математического ожидания случайных величин. Предполагаем далее, что истинный вектор  $\mathbf{w}$  является линейной функцией  $\mathbf{A} \mathbf{B} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{w}_0$  истинного значения  $\boldsymbol{\theta}$  искомого вектора  $\mathbf{y}$  и предварительного вектора такого, что  $\mathbf{w}^* - \mathbf{w}_0 = \mathbf{I}$ .

Тогда функция (9.4.10) может быть записана в виде

$$L = (2\pi)^{-n/2} |\mathbf{K}|^{-1/2} \exp\{-1/2 (\mathbf{A} \mathbf{B} \boldsymbol{\theta} - \mathbf{I})^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{B} \boldsymbol{\theta} - \mathbf{I})\}. \quad (9.4.11)$$

В соответствии с теоремой факторизации эту функцию можно разложить на два сомножителя с учетом того, что  $\mathbf{I} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{v}$  и  $\mathbf{A}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{0}$

$$L = (2\pi)^{-n/2} |\mathbf{K}|^{-1/2} \exp\{-1/2 \mathbf{v}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{v}\} \exp\{-1/2 \mathbf{x}^T (\mathbf{B} \boldsymbol{\theta} - \mathbf{x})^T \mathbf{A}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{B} \boldsymbol{\theta} - \mathbf{x})\}, \quad (9.4.12)$$

где первый сомножитель не зависит от  $\boldsymbol{\theta}$ , а второй зависит только через достаточную статистику  $\mathbf{x}$ .

Повторная факторизация последнего сомножителя относительно вектора  $\mathbf{y}$  приводит к равенству

$$L = (2\pi)^{-n/2} |\mathbf{K}|^{-1/2} \exp\{-1/2\mathbf{v}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{v}\} \exp\{-1/2\mathbf{v}_x^T \mathbf{A}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{v}_x\} \times \\ \times \exp\{-1/2(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y})^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B} (\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y})\}. \quad (9.4.13)$$

Нетрудно видеть, что каждый раз последний сомножитель выражает функцию истинных ошибок оцениваемых параметров, которая остается неизвестной.

В соответствии с теорией, изложенной в разделе 9.2, найдем ковариационную матрицу первого этапа из дифференцирования натурального логарифма функции (9.4.12)

$$\partial \ln L / \partial \mathbf{K} = -1/2\mathbf{K} + 1/2\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} (\mathbf{w}^T) \mathbf{K}^{-1} + \\ + 1/2\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} [\mathbf{A} (\mathbf{B} \boldsymbol{\theta} - \mathbf{x})^T (\mathbf{B} \boldsymbol{\theta} - \mathbf{x})^T \mathbf{A}^T] \mathbf{K}^{-1} = 0,$$

откуда

$$\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_1 \mathbf{K}^{-1} + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{K}_\eta \mathbf{A}^T \mathbf{K}^{-1}. \quad (9.4.14)$$

Умножив выражение (9.4.14) справа и слева на симметричную матрицу  $\mathbf{K}$ , получаем

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{A} \mathbf{K}_\eta \mathbf{A}^T, \quad (9.4.15)$$

где  $\mathbf{K}_1$  — ковариационная матрица ошибок, действующих на первом этапе уравнивания;  $\mathbf{K}_\eta$  — неизвестная ковариационная матрица истинных ошибок полученного вектора  $\mathbf{x}$ .

Аналогично получим ковариационную матрицу измерений, дифференцируя функцию (9.4.13), выражающую модель непосредственного уравнивания,

$$\partial \ln L / \partial \mathbf{K} = -1/2\mathbf{K}^{-1} + 1/2\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_1 \mathbf{K}^{-1} + 1/2\mathbf{K}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{K}_\chi \mathbf{A}^T \mathbf{K}^{-1} + \\ + 1/2\mathbf{K}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{K}_0 \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{K}^{-1} = 0,$$

где  $\mathbf{K}_0$  — ковариационная матрица истинных ошибок вектора  $\mathbf{y}$ .

Отсюда

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{A} \mathbf{K}_\chi \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{K}_0 \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T. \quad (9.4.16)$$

Формула (9.4.16) определяет полную ковариационную матрицу измерений, однако последнее слагаемое, выражаю-

щее остаточные истинные ошибки вектора  $\mathbf{y}$ , остается неизвестным.

Рассмотрим теперь вопрос, каким образом полученные результаты отражаются на технике уточнения ковариационных матриц измерений при многоэтапном уравнивании. На первом этапе уравнивания минимизируется квадратичная форма

$$\mathbf{v}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T (\mathbf{K}_1 + \mathbf{A} \mathbf{K}_x \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{K}_0 \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{v} \quad (9.4.17)$$

с точностью до постоянного множителя  $\mu^2$  — дисперсии единицы веса.

Применим к ковариационной матрице формулу Фробениуса для обращения блочных матриц

$$(\mathbf{K}_1 + \mathbf{A} \mathbf{K}_x \mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{K}_1^{-1} - \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{K}_x^{-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1}, \quad (9.4.18)$$

тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{v} &= \mathbf{v}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A} [(\mathbf{K}_x + \mathbf{B} \mathbf{K}_0 \mathbf{B}^T) + \\ &+ \mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (9.4.19)$$

Но, как известно,  $\mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , поэтому

$$\mathbf{v}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{v}. \quad (9.4.20)$$

Отсюда следует важный вывод о том, что на первом этапе на результаты уравнивания оказывают влияние только те ошибки, которые действуют в модели (9.4.1), и при уточнении весов на первом этапе получается ковариационная матрица именно этих ошибок.

Аналогично в модели непосредственного уравнивания минимизируется квадратичная форма

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} + \mathbf{A} \mathbf{v}_x)^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{v} + \mathbf{A} \mathbf{v}_x) &= (\mathbf{v} + \mathbf{A} \mathbf{v}_x)^T (\mathbf{K}_1 + \mathbf{A} \mathbf{K}_x \mathbf{A}^T + \\ &+ \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{K}_0 \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{v} + \mathbf{A} \mathbf{v}_x). \end{aligned} \quad (9.4.21)$$

Применив к ковариационной матрице формулу Фробениуса, находим

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v}_x)^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v}_x) = (\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v}_x)^T (\mathbf{K}_1 + \mathbf{A}\mathbf{K}_x \mathbf{A}^T)^{-1} \times \\
& \times (\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v}_x) - (\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v}_x)^T (\mathbf{K}_1 + \mathbf{A}\mathbf{K}_x \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B} [\mathbf{K}_6^{-1} + \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \times \\
& \times (\mathbf{K}_1 + \mathbf{A}\mathbf{K}_x \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B}] \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{K}_1 + \mathbf{A}\mathbf{K}_x \mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v}_x). \quad (9.4.22)
\end{aligned}$$

С учетом того, что из модели (9.4.3) следует, что

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{K}_1 + \mathbf{A}\mathbf{K}_x \mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v}_x) = \mathbf{0},$$

окончательно получаем

$$(\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v}_x)^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v}_x) = (\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v}_x)^T (\mathbf{K}_1 + \mathbf{A}\mathbf{K}_x \mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v}_x). \quad (9.4.23)$$

Следовательно, на втором этапе уточняется ковариационная матрица  $\mathbf{K}_x$  и учитывается ковариационная матрица  $\mathbf{K}_1$ , полученная на первом этапе, т. е.  $\mathbf{P}_x = \mathbf{P}$ . Только в этом случае результаты непосредственного и многоэтапного уравниваний будут совпадать. Кстати, для вычисления весовой матрицы измерений на втором этапе удобнее использовать формулу, эквивалентную

$$\mathbf{P}_x = \mu^2 \mathbf{A}^T (\mathbf{K}_1 + \mathbf{A}\mathbf{K}_x \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}, \quad (9.4.24)$$

в которой на каждом шаге уточнения ковариационной матрицы  $\mathbf{K}_x$  ее приходится умножать многократно на матрицу  $\mathbf{A}$  и обращать суммарную матрицу  $\mathbf{K}_1 + \mathbf{A}\mathbf{K}_x \mathbf{A}^T$ .

Однако легко заметить, что модель (9.4.2) получается из модели (9.4.3) при умножении на матрицу  $(\mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1$ . Тогда весовая матрица измерений на втором этапе равна

$$\mathbf{P}_x = \mu^2 \mathbf{K}_2^{-1}, \quad (9.4.25)$$

где  $\mathbf{K}_2 = (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 (\mathbf{K}_1 + \mathbf{A}\mathbf{K}_x \mathbf{A}^T) \mathbf{P}_1 \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A})^{-1} =$   
 $= \mathbf{K}_x + \mu^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{K}_x + (\mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1}.$

Убедимся, что формулы (9.4.24) и (9.4.25) эквивалентны. Применив в выражении (9.4.24) к матрице  $(\mathbf{K}_1 + \mathbf{A}\mathbf{K}_x \mathbf{A}^T)^{-1}$  формулу Фробениуса, находим

$$\mathbf{P}_x = \mu^2 [\mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{K}_x^{-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A}]. \quad (9.4.26)$$

Повторно применив к матрице  $(\mathbf{K}_x^{-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1}$  ту же формулу и считая матрицу  $\mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A}$  одной матрицей, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x &= \mu^2 \mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A} - \mu^2 \mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A} \{ (\mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1} - (\mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1} [\mathbf{K}_x + \\ &+ (\mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1}]^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1} \} \mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A} = \mu^2 [\mathbf{K}_x + (\mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1}]^{-1}. \end{aligned} \quad (9.4.27)$$

В формуле (9.4.27) при уточнении ковариационной матрицы  $\mathbf{K}_2$  матрицу  $(\mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1}$  можно вычислить один раз и затем в приближениях только добавлять к ней уточняемую матрицу  $\mathbf{K}_x$ . Обращение матрицы остается, но размер ее уже не  $n \times n$ , как в формуле (9.4.24), а будет равен  $k \times k$ . Формула

$$[\mathbf{K}_x + (\mathbf{A}^T \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1}]^{-1} = \mathbf{A}^T (\mathbf{K}_1 + \mathbf{A} \mathbf{K}_x \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \quad (9.4.28)$$

впервые получена в работе [42].

Из сравнения весовых матриц (9.4.1) и (9.4.3) видно, что они отличаются, несмотря на то, что в них уравниваются одни и те же измерения, так как эти модели реагируют на различные источники ошибок и дают неодинаковые оценки ковариационных матриц измерений. При переходе от этапа к этапу ковариационная матрица измерений суммирует информацию предыдущих этапов, и, если соблюдаются принятые ранее предположения о виде ошибок, то к концу уравнивания они приобретают такой же вид, как при непосредственном уравнивании, что полностью согласуется с выводами работы [31].

Рассмотрим порядок действий при уточнении ковариационных матриц измерений из многоэтапного уравнивания.

1. Составляются уравнения поправок (9.4.1) для первого этапа, и по их свободным членам вычисляется ковариационная матрица измерений

$$\mathbf{K}_1 = M(\mathbf{v}\mathbf{v}^T) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 \mathbf{E}_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & \sigma_{ss}^2 \mathbf{E}_s \end{bmatrix}, \quad (9.4.29)$$

где  $\sigma_{ii}^2 = l_i^T l_i / n_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ ;  $\mathbf{E}_i$  — единичная матрица размерности  $n_i \times n_i$ . Затем, приняв априорную дисперсию единицы веса  $\sigma_0^2 = \sigma_{11}^2$ , вычисляются веса каждой группы измерений в первом приближении (первый индекс  $\sigma^2$ )

$$p_{ii} = \frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_{ii}^2} = \frac{l_i^T l_i n_i}{l_i^T l_i n_1}, \quad (9.4.30)$$

которые используют при составлении суммарной системы нормальных уравнений.

2. Из решения системы нормальных уравнений находят неизвестный вектор первой модели  $\mathbf{x}$  с его ковариационной матрицей  $\mathbf{K}_x = m^2(\mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A})^{-1}$ . Затем повторяют пункты 1 и 2 алгоритма до выполнения критерия  $x_j \leq \varepsilon_1$ , где  $\varepsilon_1$  — установленная точность вычисления компонентов вектора  $\mathbf{x}$ ;  $j$  — номер итерации.

3. Составляются уравнения поправок (9.4.2) второго этапа, и аналогично первому этапу вычисляются ковариационная матрица  $\mathbf{K}_2$  и весовая матрица  $\mathbf{P}_x = \mu^2(\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_x)^{-1}$ .

4. Составляются и решаются нормальные уравнения второго этапа с нахождением неизвестного вектора  $\mathbf{y}$  и его ковариационной матрицы  $\mathbf{K}_y = \mu^2(\mathbf{B}^T \mathbf{P}_x \mathbf{B})^{-1}$ . Пункты 3 и 4 алгоритма повторяют до выполнения критерия  $y_j \leq \varepsilon_2$ , причем одновременно с неизвестными уточняется матрица  $\mathbf{K}_2$ , а матрица  $\mathbf{K}_x$  остается неизменной так, как она получена из первого этапа.

Задача оптимизации многоуровневых моделей рассматривается теорией иерархических многоуровневых систем [38]. Сущность этого подхода состоит в аналитическом выражении глобальной целевой функции непосредственного уравнивания и в ее декомпозиции на целевые функции отдельных уровней (этапов) [62]. При этом важным моментом при составлении глобальной целевой функции является предположение о воздействии различных источников ошибок на каждом уровне иерархической модели. С учетом указанного условия вектор полных поправок измерений может быть представлен таким образом

$$\delta = \mathbf{f}_1\{\mathbf{f}_2[\mathbf{f}_3(\theta)]\} - \mathbf{w}^*, \quad (9.4.31)$$

а глобальная целевая функция записана в виде

$$\Phi = \delta^T \mathbf{M} (\delta \delta^T)^{-1} \delta = \min. \quad (9.4.32)$$

Из равенства (9.4.31) модель первого этапа (9.4.1) может быть получена дифференцированием по предварительному значению функции  $\mathbf{f}_2$ , а модель (9.4.3) – по функции  $\mathbf{f}_3$ . Вычислительная сторона решаемой задачи идентична методу максимального правдоподобия, а оптимизация независимых целевых функций каждого этапа приводит к оптимизации глобальной целевой функции.

Теория иерархических систем довольно точно отражает сущность выполняемой оптимизации, поэтому в отличие от многоэтапного уравнивания с фиксированными весами многоэтапное уравнивание с уточнением на каждом этапе ковариационных и весовых матриц измерений точнее будет называть иерархическим, а модели, используемые при этом, моделями иерархического уравнивания.

## **Часть III**

---

### **Перспективы развития космической геодезии**

#### **Глава 10**

---

### **ВОЗМОЖНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ УТОЧНЕНИЯ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ**

В предыдущих частях настоящей работы отражено, в основном, современное состояние космической геодезии. Дальнейшая разработка ее методов идет по следующим направлениям:

- усовершенствование геоцентрической системы координат в плане точного отнесения начала к ЦМЗ, уточнения положения пунктов КГС относительно ЦМЗ и связи референционных систем координат с общеземной;

- разработка средств и методов решения все более широкого круга практических задач геодезии с использованием спутниковых технологий;

- широкое международное сотрудничество в области космических геодезических программ в эпоху глобализации всех экономических, в том числе научных, процессов (например, авиакосмических сообщений и т. п.).

При рассмотрении указанных направлений развития космической геодезии используется обзор материалов, опубликованных в открытой печати, поэтому степень их обеспечения реальными инвестициями и сроки их внедрения остаются неопределенными. Самая серьезная проблема – создание космического геодезического комплекса нового поколения и на его основе – вывод системы геодезических параметров Земли, удовлетворяющей требованиям практики в 2005 – 2010 гг.



GPS) уравнение (10.1.1) будет иметь вид

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j^V - \mathbf{r}_{ij}^V, \quad (10.1.2)$$

где  $\mathbf{r}_j^V$  – геоцентрический радиус-вектор ВКА;  $\mathbf{r}_{ij}^V$  – топоцентрический вектор ВКА.

Вектор  $\mathbf{r}_{ij}^V$  можно представить в виде (см. рис. 10.1)

$$\mathbf{r}_{ij}^V = \mathbf{r}_{ij}^N - \mathbf{r}_{ij}, \quad (10.1.3)$$

где  $\mathbf{r}_{ij}$  – радиус-вектор СКА относительно ВКА.

Подставив правую часть уравнения (10.1.3) в (10.1.2), получим

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j^V - \mathbf{r}_{ij}^N + \mathbf{r}_{ij} \quad (10.1.4)$$

или после суммирования выражений (10.1.1) и (10.1.4)

$$\mathbf{r}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_j^N + \mathbf{r}_j^V - 2\mathbf{r}_{ij}^N + \mathbf{r}_{ij}). \quad (10.1.5)$$

Векторное уравнение (10.1.5) представляет собой уравнение орбитальных методов космической геодезии, где наряду с измерениями СКА с НП используются измерения между ВКА и СКА. При реализации его на практике появляется принципиальная возможность определения координат НП КГС, а также уточнения начальных условий (НУ) движения ВКА и СКА.

С учетом вышеизложенного и полагая, что

а)  $\mathbf{r}_j^V(\mathbf{r}_j^N)$  – геоцентрический радиус-вектор ВКА (СКА) в инерциальной (звездной) системе координат  $\mathbf{W}$  в некоторый момент времени  $t_j$ ;

б) из измерений с НП I для этого момента известны три компонента топоцентрического вектора ВКА (СКА)

$\mathbf{r}_j^V(\mathbf{r}_j^N)$ , напомним систему векторных уравнений, связы-

вающих перечисленные векторы и радиус-вектор  $\mathbf{r}_{ij}$  в момент  $t_j$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{ij}^N &= \mathbf{r}_j^N - \mathbf{r}_i; \\ \mathbf{r}_{ij}^V &= \mathbf{r}_j^V - \mathbf{r}_i; \\ \mathbf{r}_{ij} &= \mathbf{r}_j^N - \mathbf{r}_j^V.\end{aligned}\tag{10.1.6}$$

Проектируя векторы системы (10.1.6) на оси системы координат, можно получить их в координатной форме. Далее найдем уравнения поправок для измерений по линиям НП–СКА, НП–ВКА и ВКА–СКА. Поскольку в каждом из предлагаемых к рассмотрению случаев будет применен один подход, достаточно получить уравнения поправок, например, для измерений по линии НП–СКА.

Геоцентрические координаты и составляющие скорости СКА получаются на основе теории его движения, модель которой в указанной системе координат можно представить системой дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_j}{dt^2} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}_{j0}, \dot{\mathbf{r}}_{j0}, \mathbf{P}).\tag{10.1.7}$$

Интегрирование системы (10.1.7) позволяет выразить вектор  $\mathbf{r}_j$  в функции положения  $\mathbf{r}_{j0}$  и скорости  $\dot{\mathbf{r}}_{j0}$  СКА в некоторую эпоху  $t_0$ , а также в функции сил  $\mathbf{P}$ , действующих на него в полете (земного притяжения, сопротивления атмосферы, светового давления и др.), т. е.

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(t, \mathbf{r}_{j0}, \dot{\mathbf{r}}_{j0}, \mathbf{P}).$$

В качестве НУ движения СКА могут быть использованы кеплеровы элементы его орбиты или координаты и составляющие скорости в прямоугольной системе координат. В случае НУ, заданных в виде кеплеровых элементов, будем иметь

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ e_0 \\ i_0 \\ M_0 \\ \omega_0 \\ \Omega_0 \end{bmatrix}_{t=t_0}$$

где  $a_0$  – большая полуось;  $e_0$  и  $i_0$  – эксцентриситет и угол наклона орбиты СКА соответственно;  $M_0$  – средняя аномалия;  $\omega_0$  – аргумент перигея;  $\Omega_0$  – долгота восходящего узла в момент  $t_0$ .

Разложим уравнение вида  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$  в ряд и, ограничиваясь линейными членами, получим

$$\Delta \mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}_{ij}}{\partial \mathbf{r}_j} \Delta \mathbf{r}_j - \frac{\partial \mathbf{r}_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} \Delta \mathbf{r}_i. \quad (10.1.8)$$

Поскольку вектор  $\mathbf{r}_j$  – функция текущих элементов орбиты, уравнение (10.1.8) можно представить в виде

$$\Delta \mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}_{ij}}{\partial \mathbf{r}_j} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{K}_j} \Delta \mathbf{K}_j - \frac{\partial \mathbf{r}_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} \Delta \mathbf{r}_i. \quad (10.1.9)$$

Текущие элементы орбиты  $\mathbf{K}_j$  есть сложные функции НУ, параметров  $C_{nm}$  и  $S_{nm}$  модели ГПЗ,  $P$  моделей других возмущающих сил, а также времени, неявно входящего в уравнения движения СКА

$$\mathbf{K}_j = \mathbf{K}_j \left( \mathbf{K}_0, \sum_{n,m} (C_{nm}, S_{nm}), P / t \right). \quad (10.1.10)$$

Линеаризация уравнения (10.1.10) приводит к выражению

$$\Delta \mathbf{K}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{K}_0} \Delta \mathbf{K}_0 + \sum_{n,m} \frac{\partial \mathbf{K}_j}{\partial (C_{nm}, S_{nm})} \begin{pmatrix} \Delta C_{nm} \\ \Delta S_{nm} \end{pmatrix} + \frac{\partial \mathbf{K}_j}{\partial P} \Delta P.$$

Подставив значение  $\Delta \mathbf{K}_j$  в уравнение (10.1.9), получим

$$\Delta \mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}_{ij}}{\partial \mathbf{r}_j} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{K}_j} \left[ \frac{\partial \mathbf{K}_j}{\partial \mathbf{K}_0} \Delta \mathbf{K}_0 + \sum_{n,m} \frac{\partial \mathbf{K}_j}{\partial (C_{nm}, S_{nm})} \begin{pmatrix} \Delta C_{nm} \\ \Delta S_{nm} \end{pmatrix} + \frac{\partial \mathbf{K}_j}{\partial P} \Delta P \right] - \frac{\partial \mathbf{r}_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} \Delta \mathbf{r}_i.$$

Если на пункте I измеряются не только компоненты топоцентрического вектора положения СКА  $\mathbf{r}_{ij}$ , но и вектора  $\dot{\mathbf{r}}_j$ , его топоцентрической скорости, будем иметь

$$\Delta(\mathbf{r}_{ij}, \dot{\mathbf{r}}_{ij}) = \frac{\partial(\mathbf{r}_{ij}, \dot{\mathbf{r}}_{ij})}{\partial(\mathbf{W}, \dot{\mathbf{W}})} \frac{\partial(\mathbf{W}, \dot{\mathbf{W}})}{\partial \mathbf{K}_j} \left[ \frac{\partial \mathbf{K}_j}{\partial \mathbf{K}_0} \Delta \mathbf{K}_0 + \sum_{n,m} \frac{\partial \mathbf{K}_j}{\partial (C_{nm}, S_{nm})} \begin{pmatrix} \Delta C_{nm} \\ \Delta S_{nm} \end{pmatrix} + \frac{\partial \mathbf{K}_j}{\partial P} \Delta P \right] - \frac{\partial(\mathbf{r}_{ij}, \dot{\mathbf{r}}_{ij})}{\partial \mathbf{W}} \Delta \mathbf{W}.$$

Реально компонентами векторов  $\mathbf{r}_{ij}$  и  $\dot{\mathbf{r}}_j$  могут быть дальность  $\rho$  между НП и СКА, радиальная скорость  $\rho$  СКА относительно НП и т. д. Обозначим любое из перечисленных измерений символом  $\phi$  и, используя предварительные значения определяемых параметров, запишем уравнение поправок для измерений по линии НП—СКА в виде

$$\Delta \phi + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{K}_0} \Delta \mathbf{K}_0 + \frac{\partial \phi}{\partial (C, S)} \begin{pmatrix} \Delta C \\ \Delta S \end{pmatrix} + \frac{\partial \phi}{\partial P} \Delta P = l + v, \dots, p,$$

где  $\Delta \phi$  — аппаратная постоянная (подставка), которая характерна для измерительных средств, работающих в беззапросном режиме;  $l$  — свободный член;  $v$  — поправка к измеренным величинам;  $p$  — вес измерения.

Очевидно, что выражение (10.1.8) представляет собой уравнение поправок динамического метода космической геодезии, когда на основании измерений, выполненных на НП, определяются координаты последних, орбита СКА,

а также уточняются параметры моделей ГПЗ и других возмущающих сил.

Аналогично получим уравнения поправок для измерений по другим линиям. В результате окончательно будем иметь по линиям:

НП–СКА

$$\Delta\phi^N + \frac{\partial\phi^N}{\partial\mathbf{K}_0^N} \Delta\mathbf{K}_0^N + \frac{\partial\phi^N}{\partial(C,S)} \left( \frac{\Delta C}{\Delta S} \right) + \frac{\partial\phi^N}{\partial P} \Delta P = l + v, \dots, p^N; \quad (10.1.11)$$

НП–ВКА

$$\Delta\phi^{V_i} + \frac{\partial\phi^{V_i}}{\partial\mathbf{K}_0^{V_i}} \Delta\mathbf{K}_0^{V_i} + \frac{\partial\phi^{V_i}}{\partial(C,S)} \left( \frac{\Delta C}{\Delta S} \right) + \frac{\partial\phi^{V_i}}{\partial P} \Delta P = l^{V_i} + v, \dots, p^{V_i}; \quad (10.1.12)$$

ВКА–СКА

$$\Delta\phi^{V_i N} + \frac{\partial\phi^{V_i N}}{\partial\mathbf{K}_0^{V_i}} \Delta\mathbf{K}_0^{V_i} + \frac{\partial\phi^{V_i N}}{\partial\mathbf{K}_0^N} \Delta\mathbf{K}_0^N + \frac{\partial\phi^{V_i N}}{\partial(C,S)} \left( \frac{\Delta C}{\Delta S} \right) + \frac{\partial\phi^{V_i N}}{\partial P} \Delta P = l^{V_i N} + v, \dots, p^{V_i N}; \quad (10.1.13)$$

где  $i$  – число ВКА, по сигналам с которых измеряется положение СКА.

Составив по приведенным уравнениям поправок систему нормальных уравнений и решив ее с использованием метода наименьших квадратов, получим определяемые параметры: координаты НП КГС повышенной точности и улучшенную модель движения КА.

На основе вышеизложенного дадим определение новому способу построения КГС повышенной точности. Это способ, где используются дальномерные, доплеровские и фотографические измерения с пунктов КГС на геодезический СКА, которые затем совместно уравниваются динамическим методом космической геодезии с разбиением совокупности всех измерений на группы: 1) равномерно распределенных на длинных орбитальных дугах СКА для

отнесения начала координат КГС к центру масс Земли и 2) отнесенных на короткие орбитальные дуги СКА для уточнения взаимного положения пунктов КГС с включением в короткие дуги в качестве неизвестных элементов взаимного трансформирования решений по длинным и коротким дугам. Способ отличается от всех ранее известных в практике космической геодезии тем, что при его реализации проводятся дополнительные дальномерные измерения между геодезическим СКА и несколькими ВКА космической навигационной системы ГЛОНАСС с целью заполнения разрывов в совокупности измерений на длинных орбитальных дугах СКА, а также дальномерные измерения с части пунктов КГС до ВКА космической навигационной системы. Это определение нового способа построения КГС повышенной точности было положено в основу формулы изобретения, защищенного в 1998 году соответствующим патентом [18].

---

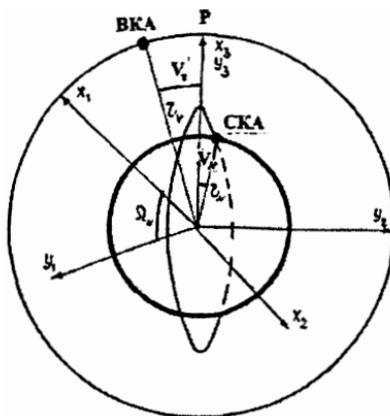
## **10.2. Обоснование структуры баллистического построения многоцелевой космической геодезической системы третьего поколения ГЕОИК-2**

---

Для решения задачи определения с требуемой точностью параметров ГПЗ и геоцентрических координат НП методами космической геодезии структура баллистического построения нового космического геодезического комплекса – с 1997 года многоцелевой космической геодезической системы (МГКС) ГЕОИК-2 должна быть выбрана такой, чтобы она позволяла максимально полно обеспечивать оптимальные условия высокоточного определения параметров орбиты СКА: достаточно равномерное и плотное распределение траекторных измерений в орбитальных дугах.

Применительно к МКГС ГЕОИК-2 указанное геометрическое расположение ВКА и СКА можно выбрать анали-

тическим методом при введении специальных систем координат  $X$  и  $Y$  (рис. 10.2). Оси  $X_3$  и  $Y_3$  этих систем направлены в перицентры орбит  $P$ , которые примем лежащими на одной прямой. Оси  $X_1$  и  $Y_1$  расположим в орбитальных плоскостях ВКА и СКА соответственно под углом между ними  $\Omega_N$ . Оси  $X_2$  и  $Y_2$  будут дополнять системы до правых.



**Рис. 10.2.** Связь систем координат  $X$  и  $Y$

Составляющие положения ВКА и СКА в соответствующих системах координат имеют вид

$$\begin{aligned} X_1 &= r_v \sin \nu_v; & Y_1 &= r_N \sin \nu_N; \\ X_2 &= 0; & Y_2 &= 0; \\ X_3 &= r_v \cos \nu_v; & Y_3 &= r_N \cos \nu_N, \end{aligned} \quad (10.2.1)$$

где  $r_v$ ,  $\nu_v$  и  $r_N$ ,  $\nu_N$  — радиус-вектор, истинная аномалия соответственно ВКА и СКА.

Связь систем координат  $X$  и  $Y$  осуществляется с помощью матрицы преобразования

$$A_\Omega = \begin{bmatrix} \cos \Omega_N & -\sin \Omega_N & 0 \\ \sin \Omega_N & \cos \Omega_N & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.2.2)$$

Положение СКА в системе  $X$  описывается выражением

$$X_N = A_\Omega Y = r_N \begin{bmatrix} \cos \Omega_N \sin \nu_N \\ \sin \Omega_N \sin \nu_N \\ \cos \nu_N \end{bmatrix}; \quad (10.2.3)$$

дальность между КА – выражением

$$\rho_{vN}^2 = (r_v - r_N)^2 + 2r_v r_N (1 - \cos \alpha), \quad (10.2.4)$$

где  $\cos \alpha = \cos \Omega_N \sin \nu_v \sin \nu_N + \cos \nu_v \cos \nu_N$ .

В качестве уточняемого примем вектор кеплеровых элементов орбиты СКА

$$K_{0N} = \begin{bmatrix} \Omega_{0N} \\ \nu_{0N} \\ e_{0N} \\ a_{0N} \end{bmatrix} \quad (10.2.5)$$

в начальный момент времени  $t_0$ .

Приняв в качестве неизвестных  $\Delta \Omega_{0N}$ ,  $\Delta \nu_{0N}$ ,  $\Delta e_{0N}$  и  $\Delta a_{0N}/a_N$ , получим уравнения поправок

$$b_\Omega \Delta \Omega_{0N} + b_\nu \Delta \nu_{0N} + b_e \Delta e_{0N} + b_a \frac{\Delta a_{0N}}{a_N} = /_\Delta \dots p, \quad (10.2.6)$$

где

$$b_\Omega = \frac{1}{\rho_{vN}} r_v r_N \sin \Omega_N \sin \nu_N \sin \nu_v; \quad b_\nu = -\frac{1}{\rho_{vN}} r_v r_N \cos \alpha';$$

$$b_e = -\frac{1}{\rho_{vN}} [2r_v r_N \cos \alpha' \sin \nu_N + a_N \cos E_N (r_N - r_v \cos \alpha)];$$

$$b_a = \frac{1}{\rho_{vN}} [(r_N - r_v \cos \alpha) a_N + \gamma_N r_v r_N \cos \alpha'];$$

$$\cos \alpha' = \cos \Omega_N \sin \nu_v \cos \nu_N - \cos \nu_v \sin \nu_N \dots$$

$E_N$  – эксцентрическая аномалия,  $\gamma_N = 1,5 \text{ п}'$ ;  $\text{п}'$  – среднее движение СКА.

В случае, когда СКА совершает один оборот вокруг Земли, а положение ВКА остается неизменным, орбита СКА является определяемой, орбита ВКА – исходной, матрица нормальных уравнений будет иметь вид

$$A(\Omega, \nu, e, a) = \{a_{ij}\}, \quad (10.2.7)$$

$$\text{где } a_{11} = 0,25RnK \sin^2 \Omega_N \sin^2 \nu_V;$$

$$a_{11} = 0,25RnK \sin^2 \Omega_N \sin^2 \nu_V;$$

$$a_{12} = a_{21} = 0;$$

$$a_{13} = a_{31} = -RnK^2 \sin 2\Omega_N \sin \nu_V \sin \nu_N;$$

$$a_{14} = a_{41} = -0,8RnK \sin \Omega_N \sin 2\nu_V;$$

$$a_{22} = 0,25RnK (\cos^2 \Omega_N \sin^2 \nu_V + \cos^2 \nu_V);$$

$$a_{23} = a_{32} = 0,4RnK^2 \cos \Omega_N \sin \nu_V \cos^2 \nu_V;$$

$$a_{24} = a_{42} = -1,2RnK (\cos^2 \nu_N \sin^2 \nu_V + \cos^2 \nu_V);$$

$$a_{33} = RnK (0,25 \cos^2 \Omega_N \sin^2 \nu_V + \cos^2 \nu_V);$$

$$a_{34} = a_{43} = RnK (0,5 \cos^2 \Omega_N \sin^2 \nu_V + \cos^2 \nu_V),$$

$$a_{44} = 22 RnK (\cos^2 \Omega_N \sin^2 \nu_V + \cos^2 \nu_V);$$

$$R = r_V r_n; \quad n - \text{число измерений}; \quad K = \frac{2q}{1+q^2}; \quad q = \frac{r_V}{r_N}.$$

Анализ полученных формул показывает, что угол  $\Omega_N$  не определяется, когда ВКА и СКА находятся в одной плоскости, и, напротив, определяется хорошо, когда плоскости орбит обоих КА перпендикулярны. Другие элементы орбиты определяются с высокой точностью при  $\Omega_N = 0, \pi$ . Дальнейшие исследования показали, что для высокоточного определения орбиты СКА оптимальной является конфигурация, состоящая из трех ВКА, разнесенных по углам  $\Omega_N$  и  $\nu_V$  на  $120^\circ$ .

Рассмотренный случай уточнения орбиты СКА на одновитковом мерном интервале имеет, однако, значительный недостаток: в реальных условиях ВКА не могут постоянно находиться в оптимальных точках, вследствие чего точность определения орбиты СКА будет резко уменьшаться. Более близким к действительности будет случай

определения орбиты СКА на нескольких его оборотах вокруг Земли при изменяющих свое положение ВКА. Для решения задачи в такой постановке зададим продолжительность мерного интервала  $m$  оборотов СКА или один оборот ВКА вокруг Земли [14]. Полученные результаты не изменили предыдущего вывода о том, что оптимальной является конфигурация с тремя ВКА, разнесенными по долготе восходящего узла и истинной аномалии на  $120^\circ$ .

---

### 10.3. Анализ точности определения положения СКА

---

Предварительно получим выражения, связывающие изменения составляющих положения СКА в орбитальной системе координат с изменением начальных условий его движения [16]. Изменение радиуса-вектора получим в результате дифференцирования известного соотношения

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (10.3.1)$$

Полагая, что для круговых орбит истинная и эксцентриситетная аномалии примерно равны и  $e \approx 0$ , получаем

$$\Delta r = \Delta a_0 - r \cos \nu \Delta e_0. \quad (10.3.2)$$

Изменение продольной составляющей вдоль орбиты СКА получим после дифференцирования соотношения для средней аномалии

$$M = M_0 + n'(t - t_0), \quad (10.3.3)$$

откуда

$$\Delta M = \Delta M_0 + \frac{\partial M}{\partial a_0} \Delta a_0. \quad (10.3.4)$$

Полагая  $M \approx \nu$ ,  $\frac{\partial M}{\partial a_0} = -\frac{3n'}{2a}t$  и переходя к линейной

размерности, можем записать

$$\Delta\theta = a\Delta v_0 - \gamma\Delta a_0. \quad (10.3.5)$$

Изменение поперечной составляющей положения СКА получим в виде

$$\Delta\varphi = \Delta Y_2 = r \sin \nu \Delta\Omega_0. \quad (10.3.6)$$

Переходя от приращений к средним квадратическим ошибкам (СКО) и учитывая определенные численным методом значения коэффициентов корреляции между элементами орбиты СКА, получаем

$$\begin{aligned} m_\theta^2 &= \gamma_N^2 t^2 m_{a0}^2 + r_N^2 m_{v0}^2 - 2\gamma_N \text{tr}_N m_{a0} m_{v0}; \\ m_\varphi^2 &= r_N^2 \sin^2 \nu_N m_{\Omega_0}^2; \\ m_r^2 &= m_{a0}^2 + r_N^2 \cos^2 \nu_N m_{e0}^2. \end{aligned} \quad (10.3.7)$$

Расчеты, выполненные для оптимальной конфигурации спутников, показывают, что минимальная ошибка получается в середине мерного интервала, а распределение полной ошибки положения СКА по составляющим имеет следующий вид: по продольной  $\sim 57\%$ , поперечной  $\sim 32\%$  и по радиусу-вектору  $\sim 11\%$ . Отсюда следует, что одним из замечательных свойств двухуровневой космической системы, состоящей из ВКА и СКА, является способность ее к высокоточному определению положения СКА по радиусу-вектору, что весьма важно при реализации метода спутниковой альтиметрии. Этот вывод хорошо согласуется с результатами исследований зарубежных ученых и может служить некоторым подтверждением корректности разработанной аналитической теории, позволяющей выбирать оптимальные условия определения элементов орбиты СКА по измерениям между ВКА и СКА.

Численное моделирование подтверждает вышеприведенные выводы, а также свидетельствует о том, что в целом измерения с трех ВКА покрывают  $\sim 90\%$  орбиты СКА с небольшими разрывами при длине сеансов наблюдений

40–50 мин. Для достижения такого покрытия орбиты СКА наблюдениями с наземных НП необходимо равномерное расположение по поверхности Земли 70–80 пунктов, что невозможно как по физико-географическим, так и по геополитическим причинам.

---

#### **10.4. Оценка точности построения космической геодезической сети с использованием космической геодезической системы ГЕОИК-2**

---

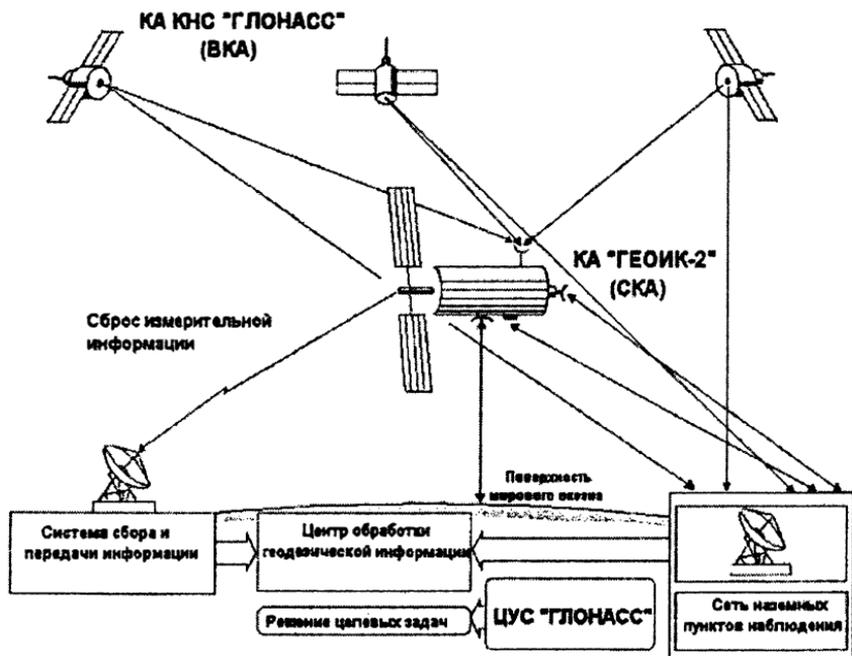
Технический облик разрабатываемой МКГС ГЕОИК-2 приведен на рис. 10.3 [59]. Можно выделить три уровня, которые составляют систему ГЕОИК-2:

1) сеть наземных пунктов наблюдения (КГС), наземные пункты приема с борта СКА измерительной информации, центр обработки геодезической информации (ЦОГИ), центры управления системами (ЦУС) ГЛОНАСС и ГЕОИК-2;

2) геодезический СКА ГЕОИК-2, оборудованный соответствующей бортовой аппаратурой, в том числе высокоточными альтиметром и аппаратурой спутниковой навигации, предназначенной для измерений по линии ВКА–СКА;

3) орбитальная группировка ВКА космической навигационной системы ГЛОНАСС.

При исследовании орбитального метода космической геодезии модель КГС включала четыре определяемых НП [17]. Два из них (№ 1, 2) были размещены в северных широтах земного шара, два (№ 3, 4) – в южных. Предполагалось, что на каждом НП была установлена фотографическая, доплеровская и дальномерная аппаратура, точность измерений которой характеризовалась средними квадратическими ошибками  $m_r = 1,5''$ ,  $m_p = 2,0$  см/с и  $m_b = 1,0$  м соответственно. Между ВКА и СКА моделировались измерения дальности с  $m_p = 0,3$  м.



**Рис. 10.3. Технический облик МКГС ГЕОИК-2**

Модель созвездия КА включала один СКА и три ВКА оптимальной конфигурации. НУ движения ВКА полностью соответствовали НУ движения КА действующей КНС ГЛОНАСС, СКА – разрабатываемого КА МКГС ГЕОИК-2. Предварительные значения НУ и координат НП считались безошибочными (“истинными”), длины орбитальных дуг КА принимались равными одним суткам, дискретность измерений составляла одно измерение в минуту. Кроме вышеуказанных случайных ошибок измерений, в решение было введено возмущение, обусловленное влиянием остаточных ошибок модели геопотенциала ПЗ–90. Однако веса измерений, как и прежде, назначались обратно пропорциональными дисперсиям измерений ( $m_i^2$ ). Анализу подвергались два варианта определения координат НП и положений КА на орбитах:

1) где с НП выполнялись фотографические и доплеровские наблюдения СКА;

2) где с НП, наряду с измерениями варианта 1, выполнялись дальномерные измерения до ВКА–1, 2, 3 и между СКА, ВКА–1, 2, 3.

Качество решений в каждом варианте оценивалось по соотношению между СКО единицы веса, принятыми до ( $\mu_{\text{априор}}$ ) и полученными после ( $\mu_{\text{апост}}$ ) уравнивания. Полагалось, что задача поставлена и решена корректно, если  $\mu_{\text{априор}} \approx \mu_{\text{апост}}$ . Между собой варианты сравнивались по значениям истинных и СКО определения геоцентрических координат НП и значениям истинных и среднеинтегральных ошибок положений СКА по составляющим ( $\gamma$  – радиальной,  $\theta$  – продольной,  $\varphi$  – поперечной) в орбитальной системе координат на интервале уточнения.

Численный эксперимент проводился в следующем порядке:

- интегрировались уравнения движения СКА и трех ВКА с истинной и варьированной орбитами. Степень разложения геопотенциала при этом была принята равной  $n = 16$  (для СКА) и  $n = 8$  (для ВКА). Варьирование осуществлялось с помощью датчика случайных чисел;

- уточнялись НУ движения КА и координаты НП;

- по НУ движения КА вычислялись с заданной дискретностью положения КА в орбитальной системе координат;

- вычислялись разности (истинные ошибки) между истинными и уточненными координатами НП, положениями КА по составляющим ( $\Delta\gamma$ ,  $\Delta\theta$ ,  $\Delta\varphi$ ) в текущий момент времени и соответствующие значения средних квадратических и среднеинтегральных ошибок. Результаты эксперимента по определению положения СКА на орбите представлены в табл. 10.1, координат НП – в табл. 10.2. Истинные ошибки положения СКА, полученные по результатам измерений (варианты 1 и 2), показаны на рис. 10.4,а и 10.5,б.

## Среднеинтегральные значения СКО положения СКА, м

Вариант 1				Вариант 2			
$S_r$	$S_\theta$	$S_\varphi$	$S$	$S_r$	$S_\theta$	$S_\varphi$	$S$
1,75	4,90	9,91	11,20	0,43	3,82	1,42	4,10

## Истинные ошибки координат НП, м

Номер НП	Вариант 1				Вариант 2			
	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	Полн.	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	Полн.
1	7,13	-8,38	4,26	11,80	0,97	-0,44	-0,03	1,07
	9,16	9,70	18,14	22,52	1,92	1,26	1,52	2,75
2	2,85	-13,07	-0,30	13,38	1,19	0,49	-0,53	1,39
	5,92	10,62	17,20	21,06	1,67	1,35	1,44	2,59
3	5,11	-10,21	2,27	11,64	-0,08	0,04	-3,06	3,06
	6,44	8,72	16,70	19,91	1,54	1,21	1,12	2,26
4	6,52	-9,45	1,67	11,60	1,24	0,63	-3,09	3,39
	8,80	8,26	15,94	20,00	1,44	1,41	1,20	2,25

Примечание. В варианте 1  $\mu_{\text{априор}} = 1,5''$ ;  $\mu_{\text{апост}} = 1,8''$ .

В варианте 2  $\mu_{\text{априор}} = 1,5''$ ;  $\mu_{\text{апост}} = 6,9''$ .

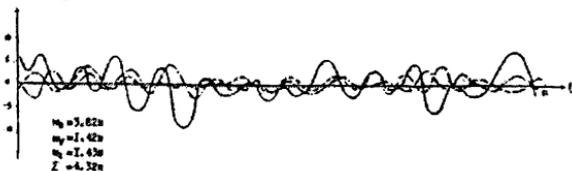
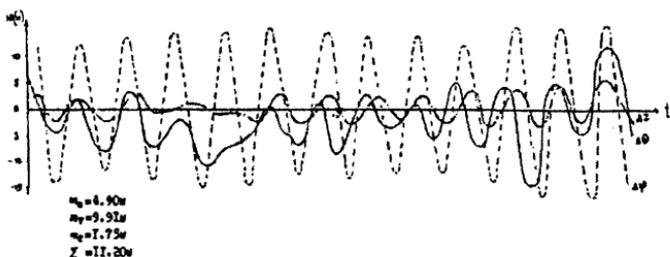


Рис. 10.4. Истинные ошибки положения СКА  
 а) (вариант 1); б) (вариант 2)

Анализ результатов эксперимента, приведенных в табл. 10.1, показал, что при наличии измерений между КА (вариант 2) положение СКА на орбите определяется точнее, чем по измерениям только с НП (вариант 1) в 2,7 раза. Из анализа фрагментов орбитальных дуг СКА (рис. 10.4) следует, что измерения по линии ВКА–СКА в целом уменьшают влияние остаточных ошибок модели геопотенциала на точность расчета орбиты СКА: размах (минимум – максимум) истинных ошибок определения положения СКА по составляющим получен значительно меньше, чем при измерениях СКА только с НП. Указанное повышение точности достигнуто в результате равномерного и плотного покрытия орбиты СКА измерениями с ВКА–1,2,3. Это является одной из важнейших предпосылок для высокоточного определения геоцентрических координат НП.

Анализ результатов, приведенных в табл. 10.2, показал, что данный вывод подтверждается экспериментально – точность определения координат НП в решении по варианту 2 получена выше, чем по варианту 1, примерно на порядок. В то же время очевидно, что в решении по варианту 2 величины  $\mu$ , принятые до и полученные после уравнивания, значительно различаются между собой. Этот, на первый взгляд, неожиданный результат объясняется следующим образом.

Невысокое качество решения в варианте 2 является следствием двух основных причин: некорректного назначения весов измерений и несовершенной модели движения КА, имеющей в своем составе остаточные ошибки модели геопотенциала. Благодаря высокоточным (при отсутствии тропосферы) измерениям по линии ВКА–СКА, вес которых значительно превосходит веса измерений с НП, образуется жесткая система, состоящая из одного СКА и трех ВКА, обращающихся на хорошо определенных орбитах. На эту систему измерения невысокой точности с НП почти не оказывают влияния, и метод наименьших квадратов реализуется только для измерений между КА. В то же время возмущающие силы в виде остаточных ошибок модели геопотенциала разворачивают (смещают) указанную систему

относительно сети НП, что приводит к появлению дополнительных ошибок в их координатах.

При траекторных измерениях СКА только с НП (вариант 1) ошибки модели геопотенциала не выявляются из-за недостаточной (в условиях тропосферы) точности измерений, поэтому в этих вариантах  $\mu_{\text{априор}} \approx \mu_{\text{апост}}$ .

Таким образом, полученные результаты исследований дают основание предполагать, что при реализации орбитального метода космической геодезии с измерениями между КА можно ожидать значительного повышения точности построения КГС. Однако для обеспечения строгого геометрического соответствия между системой КА и сетью НП, получения качественного решения целевой задачи и полной реализации потенциальных возможностей рассматриваемого метода в целом требуется более совершенная модель движения КА, а также корректное назначение (или уточнение в ходе уравнивания) весов измерений.

Эффективность способа назначения весов измерений, описанного в главе 9 и работе [20], исследовалась с помощью математических моделей. Модель КГС включала 11 НП, размещенных в границах России. На всех НП моделировались фотографические ( $m_f = 1,0''$ ) и доплеровские ( $m_p = 1,0$  см/с) измерения орбиты геодезического СКА, на пяти из них, кроме того, – измерения дальности ( $m_r = 1,0$  м) до навигационных ВКА. Между ВКА и СКА моделировались дальномерные ( $m_p = 0,3$  м) измерения. Модель геопотенциала, созвездие КА, длина их орбитальных дуг и дискретность измерений были приняты такими как в предыдущем эксперименте. Дополнительно введены возмущения, обусловленные влиянием на движение КА остаточных ошибок моделей атмосферного торможения и светового давления: 20% от общего влияния данного возмущения. Определяемыми являлись начальные условия движения КА и координаты пунктов в геоцентрической (земной) системе координат  $Z$  ( $Z_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ). Геоцентричность координатных решений анализировалась с помощью элементов взаимного трансформирования (ЭВТ), характеризующих сдвиги начала реализуемой системы координат

относительно истинной ( $\Delta Z_j$ ), масштабную поправку ( $\Delta m$ ) и развороты вокруг соответствующих осей ( $\omega_{zj}$ ).

Уравнивание измерений выполнялось в двух вариантах. В варианте 1 веса измерений назначались обратно пропорциональными дисперсиям измерений, и таким образом ошибки модели мешающих параметров не учитывались. В варианте 2 веса уточнялись в процессе уравнивания в соответствии с вышеизложенным способом. Между собой варианты сравнивались по значениям истинных и средних квадратических ошибок определения координат НП. Качество решений в обоих вариантах оценивалось по соотношению между СКО единицы веса, принятыми до и полученными после уравнивания.

Результаты эксперимента приведены в табл. 10.3 и 10.4. Из анализа результатов эксперимента в варианте 1 следует, что наличие остаточных ошибок в модели движения КА приводит к искажению (смещенности) результатов МНК-уравнивания. Дополнительным показателем этого является значительное ( $\sim$  в 6 раз) расхождение между  $\mu_{\text{априор}}$  и  $\mu_{\text{апост}}$ . Решение в варианте 2, где веса измерений уточнялись при уравнивании, привело к значительному улучшению результатов по точности как определения координат НП (см. табл. 10.3), так и отнесения реализуемой системы координат к центру масс Земли (см. табл. 10.4). Приближенное равенство между  $\mu_{\text{априор}}$  и  $\mu_{\text{апост}}$  свидетельствует о корректной постановке задачи, а также о высокой точности ее решения. Оценки в этом случае получены несмещенными и эффективными.

Таким образом, основное достоинство рассмотренного способа назначения весов измерений заключается в том, что он обеспечивает статистический учет всех источников ошибок и тем самым – значительное ослабление влияния остаточных ошибок модели движения КА на конечный результат. Это особенно важно при наличии разнородных измерений, в том числе измерений между КА. Если параметры модели включаются в число функционально уточняемых неизвестных, что имеет место в динамическом методе космической геодезии с измерениями между КА,

то статистическое уточнение весов при этом будет учитывать, в основном, ошибки измерений, а также влияние неуточняемых мешающих параметров.

При исследовании динамического метода модель КГС включала 11 НП, как и в предыдущем эксперименте. Предполагалось, что НП оснащены фотографической ( $m_f = 0,5''$ ) и доплеровской ( $m_p = 0,3$  см/с) аппаратурой для измерения на СКА, пять из них, кроме того, и дальномерной ( $m_p = 1,0$  м) аппаратурой для измерений на ВКА. Между ВКА и СКА моделировались измерения дальности ( $m_p = 0,3$  м). Таким образом, точностные характеристики измерительных средств задавались примерно равными реальным характеристикам средств, разрабатываемых для МКГС ГЕОИК-2.

Модель геопотенциала, динамические модели атмосферного торможения и светового давления, созвездие КА и дискретность измерений были приняты такими же, как и в предыдущем эксперименте, длина орбитальных дуг ВКА и СКА – восемь и пять суток соответственно. Определяемыми являлись координаты НП в геоцентрической системе координат. Геоцентричность координатных решений анализировалась с помощью элементов их взаимного трансформирования.

Уравнивание модели КГС выполнялось в двух вариантах построения космической геодезической системы, состоящей:

– из одного СКА (измерения по линии НП–СКА) – вариант 1;

– из одного СКА и трех ВКА из состава КНС ГЛОНАСС (измерения по линиям НП–СКА, НП–ВКА и ВКА–СКА) – вариант 2.

В обоих вариантах веса измерений назначались в соответствии с вышеизложенным подходом. Между собой варианты сравнивались по значениям истинных и средних квадратических ошибок определения координат НП. Точность решений оценивалось так же, как и в предыдущем эксперименте.

## Истинные ошибки определения координат НП, м

Номер НП	Вариант 1				Вариант 2			
	Z <sub>1</sub>	Z <sub>2</sub>	Z <sub>3</sub>	Полн.	Z <sub>1</sub>	Z <sub>2</sub>	Z <sub>3</sub>	Полн.
1	-3,12	3,04	-1,03	4,48	-0,80	1,20	-0,35	1,48
	8,24	3,73	2,45	9,37	1,50	0,95	0,89	1,99
2	-3,89	2,19	-1,39	4,68	-2,50	1,05	-1,09	2,92
	4,14	2,51	1,94	5,22	0,83	0,65	0,74	1,29
3	-3,95	2,75	-2,32	5,34	-2,01	2,66	-1,21	3,55
	6,35	2,04	2,11	7,00	1,13	0,65	0,78	1,52
1	-0,88	0,06	-2,06	2,24	-0,80	1,12	-0,98	1,73
	2,02	5,55	1,99	6,23	0,58	1,03	0,75	1,40
5	-0,4-	0,43	-5,79	5,82	-1,93	-0,62	-4,49	4,93
	13,07	4,11	2,54	13,93	2,56	1,19	0,95	2,98
6	-0,48	3,00	-0,99	3,20	-0,02	3,11	0,06	3,11
	4,36	2,91	2,07	5,64	0,87	0,69	0,77	1,35
7	-0,25	1,20	-0,46	1,31	-0,85	0,38	0,05	0,93
	3,30	7,20	0,78	7,96	0,64	1,18	0,50	1,43
8	-2,08	-1,25	-1,60	2,91	-1,03	0,29	-1,21	1,62
	5,29	5,88	0,71	7,94	0,89	1,00	0,50	1,43
9	-0,13	2,43	-0,42	2,47	-0,85	0,70	-0,16	0,97
	3,76	11,34	0,88	11,98	0,70	1,81	0,55	2,02
10	1,25	1,17	-1,78	2,47	0,52	0,72	-1,05	1,38
	4,69	2,78	0,67	5,49	0,80	0,53	0,47	1,07
11	-0,75	0,48	-1,48	1,73	0,01	0,51	-0,37	0,63
	3,49	3,13	0,64	4,73	0,64	0,56	0,47	0,97
Сред- нее	3,33 7,78				2,11 1,59			
	$\mu_{\text{априор}} = 0,50''$ ; $\mu_{\text{апост}} = 3,26''$				$\mu_{\text{априор}} = 0,50''$ ; $\mu_{\text{апост}} = 0,54''$			

## Истинные ошибки определения ЭВТ, м

Вариант	$\Delta Z_1$	$\Delta Z_2$	$\Delta Z_3$	m	$\omega_{Z1}$	$\omega_{Z2}$	$\omega_{Z3}$
1	1,30	-5,39	0,13	-0,014	0,009	-0,016	0,046
	0,35	-0,36	0,34	0,005	0,006	-0,006	0,190
2	0,60	0,87	0,73	0,000	-0,005	0,013	0,003
	0,15	0,15	0,37	0,002	0,002	0,003	0,003

## Истинные ошибки координат НП, м

Номер НП	Вариант 1				Вариант 2			
	Z <sub>1</sub>	Z <sub>2</sub>	Z <sub>3</sub>	Полн.	Z <sub>1</sub>	Z <sub>2</sub>	Z <sub>3</sub>	Полн.
1	0,06	2,76	-1,55	3,17	0,08	-0,08	-0,16	0,20
2	2,62	1,33	-0,52	2,98	0,07	0,21	0,20	0,30
3	2,65	1,89	-0,70	3,33	0,06	0,19	0,06	0,21
4	1,61	1,58	-0,89	2,42	0,09	-0,03	-0,09	0,13
5	2,94	1,91	-1,42	3,78	-0,08	-0,07	-0,15	0,18
6	2,20	0,16	-2,22	3,13	-0,21	-0,11	-0,01	0,26
7	1,51	2,05	-0,77	2,66	-0,03	0,12	-0,06	0,15
8	2,17	-1,30	0,56	2,51	0,10	-0,42	0,04	0,43
9	1,90	0,44	-0,03	2,03	0,17	-0,04	0,30	0,35
10	1,40	-1,45	1,56	2,55	0,18	0,04	-0,19	0,26
11	1,78	1,28	-0,14	2,20	0,06	-0,22	-0,15	0,27
$\mu_{\text{априор}} = 0,50''$ $\mu_{\text{апост}} = 0,54''$					$\mu_{\text{априор}} = 0,50''$ $\mu_{\text{апост}} = 0,52''$			

Таблица 10.6

## Истинные ошибки определения ЭВТ, м

Вариант	$\Delta Z_1$	$\Delta Z_2$	$\Delta Z_3$	m	$\omega_{Z1}$	$\omega_{Z2}$	$\omega_{Z3}$
1	-4,32	-1,12	0,72	0,006	-0,031	0,012	-0,005
2	0,02	0,02	-0,01	0,001	0,002	0,000	-0,001

Результаты численного эксперимента приведены в табл. 10.5 и 10.6. При этом СКО в табл. 10.5 не приведены, так как их соотношение с соответствующими истинными ошибками примерно такое же, что и в предыдущем эксперименте. На общий вывод они не влияют. Из анализа результатов численного эксперимента следует, что решения в обоих вариантах достаточно качественные ( $\mu_{\text{априор}} \approx \mu_{\text{апост}}$ ), точность определения координат НП по измерениям в рамках многоцелевой космической системы третьего поколения ГЕОИК-2 (вариант 2) на порядок выше, чем это достижимо по измерениям средствами КГК ГЕОИК (вариант 1).

Отнесение начала координат КГС к центру масс Земли и ориентирование осей координат в решении по варианту 2 осуществляются с минимальными ошибками. С учетом полученных результатов координатного решения можно с полным основанием ожидать высокой точности определения параметров ГПЗ при реализации нового способа создания КГС техническими средствами МКГС ГЕОИК-2.

В заключение отметим, что результаты вышеприведенных исследований были использованы при разработке концепции решения перспективных целевых задач с применением средств и методов МКГС ГЕОИК-2. В общем виде эта концепция предполагает реализацию следующих этапов [59].

1. Совместное определение координат НП КГС и планетарной модели ГПЗ в виде коэффициентов разложения до 50–90 степени по траекторным (с НП) и между КА измерениям, высокоточным измерениям до поверхности мирового океана с СКА, гравиметрическим данным.

2. Вывод детальной модели ГПЗ в виде коэффициентов разложения до 180–360-й степени на основе планетарной модели ГПЗ и объединенного каталога гравиметрических и высотомерных данных.

3. Оценка точности и контроль решения координатной задачи и задачи вывода модели ГПЗ по независимой измерительной информации.

При необходимости выполняется новая итерация (этапы 1–3). В решении задачи предусматривается использование данных измеренных комплексом ГЕОИК, а также информации, получаемой в рамках международной кооперации. Другие материалы, касающиеся МКГС ГЕОИК-2, приведены в приложении 3.

### **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПУТНИКОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ**

При решении практических задач геодезии все более широкое применение находят спутниковые технологии с использованием наблюдений навигационных ИСЗ космических систем ГЛОНАСС и GPS. Как было показано в предыдущей главе, использование навигационных систем весьма перспективно при создании геоцентрической системы координат. В данной главе рассматривается возможность решения и других задач геодезии с использованием спутниковых технологий. Что же могут и чего не могут спутниковые технологии? Заменяют ли спутниковые методы технологии наземной геодезии? Необходимо подчеркнуть, что спутниковые методы не могут пока решать задачи изучения детального гравитационного поля Земли над сушей, а лишь позволяют определять ее низкие гармоники; к которым чувствительны орбиты спутников, а также характеристики детального ГПЗ над водными поверхностями (методы спутниковой альтиметрии). При уменьшении высоты полета ИСЗ труднопредсказуемые возмущения от атмосферы начинают превосходить возмущения от ГПЗ. Методы “спутник в спутнике” и спутниковой градиентометрии пока не дают требуемых точностей определения параметров ГПЗ, хотя в будущем возможно появление новых спутниковых методов изучения детальных характеристик гравитационного поля. Спутниковые методы не используют понятия отвесной линии и эллипсоида относимости, поэтому “чисто” спутниковые методы не могут решать многие задачи астрономии (определение астрономических координат и азимутов) и геометрического нивелирования, которые связаны с нормальными высотами, применяемыми на практике во многих областях

геодезии и картографии. О том, что может спутниковая технология, кратко излагается в последующих разделах.

---

### **11.1. Применение спутниковых технологий при развитии геодезических сетей**

---

Прежде всего спутниковые технологии могут использоваться для развития государственных геодезических сетей на территории некоторых государств или крупных регионов. В России этими вопросами занимается Федеральная служба геодезии и картографии (Роскартография), которая разработала программу перспективного развития государственных геодезических сетей, изложенную в Основных положениях о государственной геодезической сети России [46].

В соответствии с Основными положениями государственную геодезическую сеть России планируется развивать в виде иерархии трех классов спутниковых сетей, традиционной астрономо-геодезической сети и геодезических сетей сгущения 3 и 4 классов – итого, если считать АГС сетью одного класса, то шести классов сетей. Исходной геодезической основой для дальнейшего повышения точности пунктов государственной геодезической сети на территории страны является фундаментальная астрономо-геодезическая сеть (ФАГС).

ФАГС состоит из некоторой постоянной части и периодически определяемых пунктов и реализует общеземную геоцентрическую систему координат в рамках решения задач координатно-временного обеспечения страны. В состав постоянно действующих пунктов ФАГС включается часть пунктов существующей КГС (ПЗ–90), расположенных на территории страны, а также пункты Госстандарта и радиоинтерферометрических пунктов со сверхдлинной базой (РИСБ) РАН. К периодическим пунктам ФАГС отнесены пункты РАН и Роскартографии, входящие в международную геодинамическую сеть IGS, часть пунктов

КГС на территории страны, базовые пункты системы ГЛОНАСС, а также часть пунктов Госстандарта и РИСБ. Расположение остальных пунктов ФАГС определяется, исходя из решения задач геодинамики и требований равномерного покрытия территории страны. Среднее расстояние между пунктами составит 800 – 1000 км.

Пространственное положение пунктов ФАГС определяется методами космической геодезии в общеземной системе координат со средними квадратическими ошибками относительно ЦМЗ  $2 - 3 \cdot 10^{-8}R$  ( $R$  – средний радиус Земли) и взаимные положения любых пунктов ФАГС с СКО 2 см в плане и 3 см по высоте с учетом скорости их изменения во времени. Достоверная оценка точности построения ФАГС в целом и определения положения и скорости любого из ее пунктов входит в число основных задач построения ФАГС. На всех пунктах ФАГС определяются нормальные высоты из нивелирования I и II классов и ускорения силы тяжести. Задаваемая пунктами ФАГС система координат согласовывается на соответствующем уровне точности с фундаментальными (небесными) системами координат и надежно связывается с аналогичными пунктами различных государств в рамках согласованных научных проектов международного сотрудничества.

На основе ФАГС развивается высокоточная спутниковая геодезическая сеть (ВГС), призванная распространить на всю территорию страны общеземную геоцентрическую систему координат и определить точные параметры взаимного ориентирования общеземной геоцентрической и российской референцной систем координат. ВГС, наряду с ФАГС, является основой для спутниковых геодезических сетей и построения высокоточных карт квазигеоида с использованием гравиметрической информации и данных нивелирования. Пункты ВГС определяются относительными методами космической геодезии, обеспечивающими точность взаимного положения с СКО  $3 \text{ мм} + 5 \cdot 10^{-8}D$  ( $D$  – расстояние в миллиметрах) в плане и  $5 \text{ мм} + 7 \cdot 10^{-8}D$  по высоте. Каждый пункт ВГС должен быть связан измерениями со смежными пунктами ВГС и не менее, чем с

тремя пунктами ФАГС. Расстояния между пунктами ВГС составляют 150 – 300 км. Пункты ФАГС и ВГС связываются с ближайшими пунктами АГС, при этом СКО не превышает 2 см по каждой координате. На пунктах ВГС также определяются нормальные высоты по результатам нивелирования I и II классов.

Далее развивается спутниковая геодезическая сеть I класса (СГС-1), чтобы создать оптимальные условия для реализации точностных и оперативных возможностей спутниковой аппаратуры при переводе геодезического обеспечения территории России на спутниковые методы определения координат. Создание СГС-1 позволяет решить задачи определения и учета локальных деформаций существующей государственной геодезической сети (СК-95) на территориях между смежными пунктами ВГС, а также обеспечения однородности результатов определения координат в пределах СКО не более 5 см относительно любых близких пунктов АГС, СГС-1 и ВГС. СГС-1 создается относительноными методами космической геодезии, СКО составляет  $3 \text{ мм} + 1 \cdot 10^{-7} D$  в плане и  $5 \text{ мм} + 2 \cdot 10^{-7} D$  по высоте. Расстояния между пунктами СГС-1 планируется 15 – 20 км в районах интенсивной хозяйственной деятельности, 25 – 30 км средней плотности и 40 – 50 км в необжитых районах. На пунктах СГС-1 нормальные высоты определяются по результатам нивелирования III класса, в необжитых районах допускается тригонометрическое нивелирование с СКО между смежными пунктами 0,2 м. Пункты СГС-1 связываются с окружающими пунктами АГС.

В данной работе нас интересуют перспективные спутниковые методы решения геодезических задач, однако в Основных положениях они характеризуются весьма общими фразами типа “методы космической геодезии” (при развитии ФАГС) и “относительные методы космической геодезии” (при развитии ВГС). В то же время ФАГС характеризуется как общеземная геоцентрическая система координат с точностью отнесения начала к ЦМЗ с СКО 13 – 19 см и взаимным положением пунктов 2 – 3 см по каждой координате. В настоящее время точность отнесения

начал систем координат ПЗ–90 и WGS–84 оценивается СКО около 1 м, а расхождение между ними составляет около 8 м. Сравнение двух примерно равноточных сетей по расхождениям координат общих пунктов показывает, что приписываемые им точности отнесения к ЦМЗ завышены. Для ФАГС такой возможности сравнения не будет и приписываемая ей точность даже при ее создании будет далека от достоверности.

Как было показано в части I и главе 11, создание геоцентрической системы координат на территории отдельного государства невозможно. В этом можно убедиться и на практике, однако специалисты Роскартографии в этом деле не имеют опыта, так как до сих пор созданием геоцентрической системы координат занималась Топографическая служба Вооруженных Сил РФ. Что же касается методов, то единственным подходящим методом для создания государственной геодезической сети (ФАГС и ВГС) является спутниковый дифференциальный метод, кратко описанный в части I. Опорой для этого метода являются пункты ITRF, реализующие систему координат WGS–84. Однако связь этой системы с пунктами ПЗ–90, а значит и с СК–95, довольно слаба. Поэтому представляется более логичным в качестве ФАГС принять все пункты существующей КГС с последующим уточнением их взаимного положения дифференциальным методом, оставляя неизменной систему координат ПЗ–90. В любом случае достижение дециметровой точности отнесения начала координат к ЦМЗ без реализации нового космического комплекса ГЕОИК-2 невозможно.

Что касается применения относительного метода при создании ВГС, то практически доказано, что при расстояниях более 50 км взаимное положение пунктов определяется с СКО более 1 дм и декларируемая точность может быть достигнута только для СГС-1. Поэтому ВГС следует также развивать дифференциальным методом или, еще лучше, вообще отказаться от этой лишней ступени. Предлагаемые Основные положения [46], разрушая и расчлняя существующую геоцентрическую систему координат ПЗ–90, взамен дают

недостаточно методически обоснованную и очень дорогостоящую программу с сомнительным исходом.

Кроме ГГС создаются местные геодезические сети различных ведомств (Росземкадастр, Геологоразведка, Росводоканал и т. д.), а также специальные геодезические сети, создаваемые для решения определенных задач. Наилучшим методом для создания этих сетей является относительный. Часто при этом применяется упрощенный относительный метод, который заключается в том, что сначала с двух-трех пунктов ГГС определяется некий базовый пункт, а с него усом – координаты остальных определяемых пунктов. Хотя при относительном методе угол засечки определяемого пункта с исходных не играет роли, но в неблагоприятных условиях такой бесконтрольный метод может привести к значительным ошибкам координат определяемых пунктов, особенно при низком проценте надежности разрешения неоднозначности и плохом геометрическом факторе. Кроме того, надо иметь в виду, что азимуты линий вдоль параллелей в средних широтах определяются с низкой точностью из-за того, что широта места близка к точке вертекса НИСЗ и они проходят только к югу и только вдоль измеряемой линии. Оптимальными условиями определения координат пунктов спутниковыми методами считается равномерное прохождение НИСЗ в зоне видимости пункта как на восходящих, так и на нисходящих ветвях орбиты. В данном случае длина линии определяется хорошо, а поперечная составляющая практически не определяется. На коротких линиях ошибка азимута может составить несколько минут или даже десятков минут, поэтому расстояние до ориентирных пунктов должно быть в пределах 500 – 1000 м при требуемой точности азимута 1".

При выполнении некоторых инженерных задач пользуются только плановыми координатами, считая их достаточными для определения площадей и границ землепользования. Однако если для строительных работ плановых координат и достаточно, то при отводе земель на больших площадях необходимо учитывать фактическую площадь

на поверхности Земли. В настоящее время разницу между расчетной плановой и фактической площадями просто списывают на неудобья, что в условиях рыночных отношений может привести к достаточно значительной разности в стоимости земельных угодий. Относительный метод космической геодезии позволяет более точно определять фактическую площадь земельных участков.

## **11.2. Определение площади земельных участков**

Если земельный участок расположен в равнинной местности и имеет прямоугольную форму, его площадь определяется при умножении ширины участка на его длину. Если участок ограничен ломаной линией и расположен на пересеченной местности, для определения площади приходится разбивать его на более менее плоские части и суммировать их площади. В этом случае удобно представить участок в виде суммы треугольников, стороны которых измеряются. Тогда площадь треугольника может быть вычислена по формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad (11.2.1)$$

где  $a, b, c$  – длина сторон треугольника,  $p = 0,5(a + b + c)$  – полупериметр.

Относительным методом могут быть определены координаты вершин треугольников. Тогда длина любой стороны равна

$$d = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}. \quad (11.2.2)$$

Однако при относительном методе необязательно сначала вычислять длины сторон, а затем по формуле Герона определять площади треугольников. Площадь треугольника может быть вычислена непосредственно по координатам его вершин [32]

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{bmatrix} Y_1 & Z_1 & 1 \\ Y_2 & Z_2 & 1 \\ Y_3 & Z_3 & 1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} Z_1 & X_1 & 1 \\ Z_2 & X_2 & 1 \\ Z_3 & X_3 & 1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{bmatrix}^2}, \quad (11.2.3)$$

где  $X_i, Y_i, Z_i$  – координаты вершин треугольника,  $i = 1, 2, 3$ .

Вычислять фактические площади участков можно и методами наземной геодезии, если измерять стороны треугольников дальномерами и редуцировать их на поверхность Земли. Однако измерять все стороны треугольников, в том числе внутри участка, не всегда возможно в труднопроходимой местности. Более рационально проложить полигонометрический ход только по контуру участка и определять усом координаты возвышенностей и углублений внутри участка, а площади треугольников вычислять все-таки координатным способом. Формулы, выведенные в части I, позволяют реализовать такой вариант.

Для этого измеренные величины должны быть приведены только к центрам пунктов. Редуцирование их на плоскость или эллипсоид не требуется. Основная идея способа состоит в построении пространственных плоскостей, поэтому можно использовать любую местную пространственную систему координат. Для привязки землеустроительных работ к государственной системе координат достаточно двух-трех исходных пунктов. Как правило, координаты этих пунктов даются в установленной местной системе плоских координат. Поэтому для условной местной системы координат их можно использовать следующим образом. Исходные местные координаты пересчитываются в геодезические, без которых невозможно перейти к пространственным координатам, принимая местные координаты за координаты в системе 1942 года (или в государственной системе). От геодезических координат всегда можно перейти как к пространственным координатам, так и обратно к плоским и, таким образом, знание ключей услов-

ной системы координат необходимо лишь при привязке землеустроительных работ к государственной системе координат.

Приведение измерений к центрам пунктов осуществляется по формулам раздела 4.3. Далее возможны два пути дальнейших вычислений. Во-первых, определение по измеренным значениям декартовых пространственных координат точек полигонометрического хода и точек, определенных усом, и использование для вычисления площадей треугольников формулы (11.2.3) и, во-вторых, определение геодезических координат тех же точек и по ним длин линий в результате решения обратных и прямых задач в пространстве [41] с последующим применением формулы (11.2.1). Оба метода дают одинаковые результаты и точности, однако требуют различного программного обеспечения.

В первом методе один из исходных пунктов принимается за базовый и его координаты перевычисляются в декартовы по схеме

$$x, y, H \rightarrow B, L, H \rightarrow X, Y, Z,$$

где  $x, y$  – местные координаты, принятые за координаты в государственной системе.

Далее последовательно вычисляются координаты остальных точек по формулам

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= X_i + D_0[(\cos B \cos z_0 - \sin B \sin z_0 \cos A) \cos L - \\ &- \sin z_0 \sin A \sin L]; \\ Y_{i+1} &= Y_i + D_0[(\cos B \cos z_0 - \sin B \sin z_0 \cos A) \sin L + \\ &+ \sin z_0 \sin A \cos L]; \\ Z_{i+1} &= Z_i + D_0(\sin B \cos z_0 + \cos B \sin z_0 \cos A); \end{aligned} \tag{11.2.4}$$

где  $X_i, Y_i, Z_i$  – координаты исходной точки;  $X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1}$  – координаты определяемой точки;  $B, L$  – геодезические координаты исходной точки;  $D_0$  и  $z_0$  – приведенные к

центрам пунктов дальность и зенитное расстояние соответственно;  $A$  – азимут с исходной точки на определяемую. Азимут на базовом пункте может быть взят произвольным, например, равным  $0^\circ$ , однако для облегчения привязки к государственной системе координат его желательно получить из решения обратной геодезической задачи между исходными пунктами.

При переходе на следующую точку обратный азимут на предыдущую точку получается в результате решения обратной геодезической задачи в пространстве, а затем на переднюю точку азимут передается после прибавления измеренного угла на данной точке. Если при замыкании контура участка возникли координатные невязки, они могут быть разбросаны пропорционально длинам сторон.

Второй метод (геодезических координат) отличается от предыдущего только тем, что при решении прямых и обратных геодезических задач используются геодезические координаты. Примеры вычисления площадей обоими методами даются в работе [43]. Описание необходимого для реализации обоих методов программного обеспечения приведено в следующем разделе.

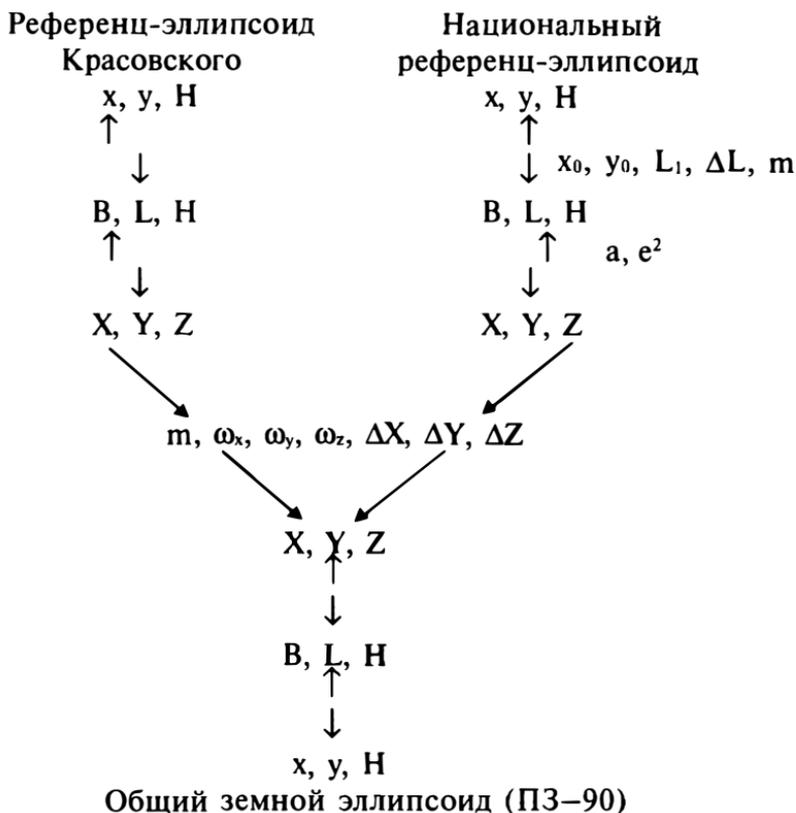
---

### **11.3. Решение прямых и обратных геодезических задач**

---

Решение прямых и обратных геодезических задач на любой принятой поверхности (в пространстве, на плоскости и эллипсоиде) связано с перевычислением координат (рис. 11.1).

Под национальным эллипсоидом здесь подразумевается любой эллипсоид, размер которого задается. На нем может быть задана любая система прямоугольных координат в проекции Гаусса, в том числе используемые в России местные системы. В этом случае должны быть заданы ключи этой системы.



**Рис. 11.1. Схема перевычисления координат**

Условные обозначения:

$x, y, H$  – плоские координаты на плоскости в проекции Гаусса;  $B, L, H$  – геодезические координаты на эллипсоиде с параметрами  $a, e^2$ ;  $X, Y, Z$  – прямоугольные декартовы координаты с началом в центре и главными осями инерции эллипсоида;  $m, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  – элементы трансформирования декартовых координат;  $x_0, y_0, L_1, m$  – ключи координатной системы.

### **Алгоритмы решения прямых геодезических задач**

1. В пространстве декартовых координат

а) Даны:  $X_1, Y_1, Z_1$  – координаты исходного пункта;

$A, z, D$  – полярные топоцентрические координаты: азимут, зенитное расстояние и наклонная дальность между центрами пунктов. Следует определить координаты  $X_2, Y_2, Z_2$  пункта 2.

**Р е ш е н и е.** \* Координаты пункта  $X_1, Y_1, Z_1$  перевычисляются в  $B, L, H$  по формулам

$$L = \arctg \frac{Y_1}{X_1}; \quad B = \arctg \frac{Z}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2} - \frac{ae^2}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 B}}};$$

$$H = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} \cos B + (Z + Ne^2 \sin B) \sin B - N;$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}},$$

где уравнение для широты  $B$  решается итерациями при условии принятия в первом приближении  $\operatorname{tg} B$  равным нулю.

$$X_2 = X_1 + D[(\cos B \cos z - \sin B \sin z \cos A) \cos L - \sin L \sin z \sin A];$$

$$* Y_2 = Y_1 + D[(\cos B \cos z - \sin B \sin z \cos A) \sin L + \cos L \sin z \sin A];$$

$$Z_2 = Z_1 + D(\sin B \cos z + \cos B \sin z \cos A).$$

б) Даны:  $X_1, Y_1, Z_1, \Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ . Необходимо определить координаты  $X_2, Y_2, Z_2$  пункта 2.

$$\text{Р е ш е н и е. } X_2 = X_1 + \Delta X; Y_2 = Y_1 + \Delta Y; Z_2 = Z_1 + \Delta Z.$$

в) Даны:  $X_1, Y_1, Z_1$  – координаты исходного пункта;  $\xi, \eta, \zeta$  – топоцентрические прямоугольные координаты. Следует определить координаты  $X_2, Y_2, Z_2$  пункта 2.

**Р е ш е н и е.** \* Топоцентрические прямоугольные координаты перевычисляются в топоцентрические полярные

по формулам

$$A = \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}; \quad z = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\zeta}; \quad D = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

\* Далее решается задача 1, а.

## 2. На поверхности эллипсоида

а) Даны:  $B_1, L_1, N_1, \Delta B, \Delta L, \Delta N$ . Необходимо определить координаты  $B_2, L_2, N_2$  пункта 2.

Р е ш е н и е.  $B_2 = B_1 + \Delta B; L_2 = L_1 + \Delta L; N_2 = N_1 + \Delta N$ .

б) Даны:  $B_1, L_1, N_1, s, A_1$  – координаты исходного пункта, длина геодезической линии и азимут на исходном пункте. Следует определить координаты  $B_2, L_2, N_2$  пункта 2 и азимут  $A_2$  на втором пункте.

Р е ш е н и е. По методу Бесселя (см., например, [41]).

## 3. На плоскости в проекции Гаусса

Даны:  $x_1, y_1, d, \alpha$  – координаты исходного пункта, расстояние на плоскости и дирекционный угол. Надо определить координаты  $x_2, y_2$  пункта 2.

Р е ш е н и е.  $x_2 = x_1 + d \cos \alpha; y_2 = y_1 + d \sin \alpha$ .

**Примечание.** Алгоритмы 1, б и 2, а, несмотря на их тривиальность, включены, во-первых, для полноты классификации, и, во-вторых, потому, что они реализуются в относительном методе космической геодезии при определении координат пунктов по наблюдениям спутников навигационных систем.

Каждая из приведенных задач может решаться на любом эллипсоиде. Если для решения прямых геодезических задач на референц-эллипсоиде Красовского в Системе координат 1942 года и общем земном эллипсоиде (ПЗ–90) никаких дополнительных данных, кроме указанных в алгоритме, не требуется, то для другого (национального) эллипсоида необходимы его параметры и расчет необходимых постоянных и коэффициентов, которые для первых уже выполнены.

## Алгоритмы решения обратных геодезических задач

1. В пространстве декартовых координат даны  $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$ . Необходимо определить:

а)  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ .

Решение.  $\Delta X = X_2 - X_1; \Delta Y = Y_2 - Y_1; \Delta Z = Z_2 - Z_1$ .

б)  $A, z, D$ .

Решение.\* Решается задача а).

\* Координаты пункта 1 перевычисляются в  $B, L, H$  (см., прямую геодезическую задачу 1, а).

\* Топоцентрические полярные координаты вычисляются по формулам

$$A = \operatorname{arctg} \frac{-\Delta X \sin L + \Delta Y \cos L}{-\Delta X \sin B \cos L - \Delta Y \sin B \sin L + \Delta Z \cos B};$$

$$D = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2};$$

$$\cos z = \frac{\Delta X \cos B \cos L + \Delta Y \cos B \sin L + \Delta Z \sin B}{D};$$

$$z = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 z}}{\cos z}.$$

в)  $\xi, \eta, \zeta$ .

Решение.\* Решается вариант б).

\* Топоцентрические прямоугольные координаты вычисляются по формулам

$$\xi = D \sin z \cos A; \quad \eta = D \sin z \sin A; \quad \zeta = D \cos z.$$

2. Даны  $B_1, L_1, H_1, B_2, L_2, H_2$ . Следует определить:

а)  $\Delta B, \Delta L, \Delta H$ .

Решение.  $\Delta B = B_2 - B_1; \Delta L = L_2 - L_1; \Delta H = H_2 - H_1$ .

б)  $s, A_2$ .

Решение. По методу Бесселя (см. [41]).

3. На плоскости в проекции Гаусса даны  $x_1, y_1, x_2, y_2$ . Надо определить  $d, \alpha$ .

## Р е ш е н и е.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \alpha = \arctg \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

**Примечание.** Обратные геодезические задачи, как и прямые, могут решаться на любом эллипсоиде.

В составленной по этим алгоритмам программе при решении прямых и обратных геодезических задач координаты исходных пунктов могут быть заданы в любой системе. Перевычисление их выполняется автоматически в ту систему координат, в которой заданы исходные данные (длина линий, азимуты и зенитные расстояния). В прямой задаче результирующие координаты также автоматически перевычисляются в заданную систему координат. В обратной задаче координаты обоих пунктов должны быть заданы в единой системе. Ниже приводятся примеры решения геодезических задач с помощью описанного комплекса программ.

### П р и м е р 1.

Редукция измерений к центрам пунктов за высоту.

С пункта 1 измерены дальность  $D$  и зенитное расстояние  $z$  на одну и ту же визирную цель на пункте 2. Геодезические координаты пункта 1 равны  $B_1, L_1, H_1$ , высота прибора  $i$ , высота визирной цели  $v$ . Так как азимут на пункте 1  $A_1$  не изменяется при перенесении вдоль нормали, он может быть принят любым, например, равным  $0^\circ$ .

Порядок решения задачи.

\* Решается прямая геодезическая задача с координатами  $B_1, L_1, H_1 + i$  и измерениями  $A_1, z, D$ .

\* Решается обратная геодезическая задача с координатами  $B_1, L_1, H_1, B_2, L_2, H_2 - v$  с получением редуцированных данных  $A_1, z', D'$ .

Легко убедиться, что результат совпадает со значениями, полученными по формулам раздела 4.3.

### Пример 2.

Вычисление приближенных декартовых координат по измеренным топоцентрическим полярным координатам  $A$ ,  $z$ ,  $D$ .

Эта задача может возникнуть при совместном уравнении спутниковых и наземных измерений. Необходимо пояснить, что спутниковые измерения не связаны с отвесной линией, а наземные измерения всегда зависят от нее, поэтому декартовы координаты, полученные по наземным измерениям, могут приниматься лишь как предварительные. Если в наземных измерениях будет учтено влияние уклонов отвесных линий и высот квазигеоида, то полученные при решении данной задачи координаты определяемого пункта будут действительно декартовыми и их точность будет зависеть лишь от точности наземных измерений. Итак, декартовы координаты пункта 1 равны  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $Z_1$  и измерены  $A_1$ ,  $z$ ,  $D$ .

Непосредственно решается прямая геодезическая задача 1, а).

### Пример 3.

Определение высоты квазигеоида на пункте 2.

Эта задача может быть решена при совместном использовании относительного метода космической геодезии (прямая геодезическая задача 1, б) и определении превышения между пунктами в результате геометрического или тригонометрического нивелирования. Тогда высота квазигеоида  $\zeta = H - H'$ , где  $H'$  – нормальная высота на пункте 2. При более низких требованиях к точности высот квазигеоида превышение между пунктами может определяться по формулам тригонометрического нивелирования

$$h = D_r \operatorname{tg}(90^\circ - z) + i - v + (1 - k)D^2/2R,$$

где  $D_r$  – горизонтальное проложение дальности между пунктами;  $k$  – коэффициент рефракции;  $R$  – средний радиус Земли.

Если измерения будут приведены к центрам пунктов, как в примере 1, то превышение вычисляется по формуле

$$h = D \cos z.$$

Таким образом, приведенная программа может найти широкое применение при решении различных геодезических задач.

---

#### **11.4. Спутниковые технологии – новая трехмерная геодезия**

---

Как показано в данной работе, большинство практических геодезических работ, начиная с уравнивания государственной геодезической сети, местных и региональных сетей, выполнения землеустроительных работ, определения геодезических азимутов и других, могут выполняться спутниковыми методами в пространственной декартовой прямоугольной системе координат. При этом нет необходимости редуцировать измеренные величины на поверхность относимости (плоскость или эллипсоид), а только к центрам пунктов, что выполняется и при традиционной технологии геодезических работ.

Однако при проведении некоторых видов геодезических работ приходится использовать и геодезические координаты, например, при определении геодезических азимутов, так как само понятие геодезического азимута связано с эллипсоидом и геодезическими координатами. Переход к геодезическим координатам на любом эллипсоиде от декартовых и обратно осуществляется достаточно просто и однозначно, поэтому выполнение таких видов работ не представляет трудности.

Существует также ряд геодезических работ, которые не могут выполняться только спутниковыми методами – это работы, связанные с гравитационным полем Земли. К ним относятся определение нормальных высот точек земной поверхности, астрономических азимутов и т. п. Измерения спутниковым методом геодезических данных не связаны с отвесной линией, и поэтому по ним не удастся

получить величины, связанные с ГПЗ. Однако и при таких видах геодезических работ спутниковые методы оказывают значительную помощь. Например, сочетание геометрического нивелирования и спутникового метода определения геодезической высоты позволяет с высокой точностью получать точечные значения нормальных высот или высот квазигеоида в отличие от сглаженных высот квазигеоида, определяемых интегральными методами. Так как точность высот квазигеоида, полученных таким методом, гораздо выше точности высот, полученных астрономо-гравиметрическим методом, то они могут служить исходной основой при составлении карт высот квазигеоида и изучении детальных характеристик ГПЗ.

Кроме того, показано, что прямоугольная декартова система координат применима не только в спутниковых методах, но легко используется в традиционной наземной геодезии. Применение пространственной системы координат для обработки наземных геодезических сетей потребует при совместном их уравнивании с КГС, связи спутниковых сетей ФАГС, СГС-1 с АГС и заполняющих геодезических сетей низших классов.

При проведении геодезических работ спутниковые методы гораздо дешевле, так как не требуют многозатратных строительных работ, кроме, может быть стационарных пунктов КГС и контрольно-передающих пунктов в дифференциальном методе. Спутниковые методы более оперативны и точнее. Переход на спутниковые методы выполнения геодезических работ неизбежно приведет к развитию новой геодезии, которая будет опираться на достижения спутниковой геодезии, гравиметрии и использовать в основном декартову прямоугольную систему координат. Декартовы пространственные координаты могут отличаться между собой началами и направлениями осей. При наличии некоторой эталонной общеземной системы координат параметры перехода между ними легко определяются.

В последнее время все больше видов геодезических и землеустроительных работ выполняются с использованием спутниковой технологии, базирующейся на относительном методе космической геодезии. Прилагаемые к комплектам приемников сигналов навигационных спутников пакеты программ позволяют с высокой точностью получать разности координат пар пунктов в общеземной системе координат WGS-84 (СК-84), а также уравнивать геодезические сети. Полученные координаты из СК-84 пересчитываются в нужную потребителю систему координат с помощью ключей. Однако для уравнивания геодезической сети координаты исходных пунктов должны быть заданы в СК-84. Это возможно только при использовании точных высот квазигеоида, которые в настоящее время определяются с помощью карты довольно грубо. Кроме того, в документации к комплексу программ нет описания алгоритмов вычислений – инструкции к программам содержат лишь указания, какими клавишами следует пользоваться для выполнения определенных действий.

Настоящая монография содержит основные сведения, относящиеся к уравниванию высокоточных геодезических сетей, создаваемых относительным методом, и методику определения высот квазигеоида путем интерполяции их с исходных пунктов на определяемые. Основная часть изложенных алгоритмов проверена на комплексах программ, разработанных авторами для уравнивания небольших геодезических сетей, включая городские. Они могут использоваться для составления и отладки программ производственного уравнивания различного назначения.

Эта работа не касается вопросов предварительной обработки псевдодальностей, измеренных приемником до навигационных спутников для получения разностей координат.

нат. Указанные вопросы относятся к области, скорее, радиотехники и нуждаются в отдельном изложении.

Работа также не претендует на полное раскрытие всех вопросов уравнивания геодезических сетей, созданных относительным методом, и может служить лишь вводным курсом в рассматриваемую проблематику. Поэтому авторы будут благодарны любым конструктивным предложениям, рекомендациям и замечаниям, направленным на улучшение содержания данной работы при возможных ее переизданиях.

---

## Список литературы

---

1. *Абегауз Г.Г., Тронь А.П., Копенкин Ю.Н., Коровина И.А.* Справочник по вероятностным расчетам. М.: Воениздат, 1966.
2. *Аксенов Е.П.* Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1977. 360 с.
3. *Арнольд Курт.* Методы спутниковой геодезии. М.: Недра, 1973. 224 с.
4. *Баранов В.Н., Бойко Е.Г., Краснорылов И.И.* и др. Космическая геодезия. Учебник для вузов. М.: Недра, 1986. 407 с.
5. *Бард Й.* Нелинейное оценивание параметров. М.: Статистика, 1979. 350 с.
6. *Бойко Е.Г., Клеицкий Б.М., Ландис И.М., Устинов Г.А.* Использование искусственных спутников Земли для построения геодезических сетей. М.: Недра, 1977. 376 с.
7. *Бойко Е.Г., Клеицкий Б.М., Ландис И.М., Устинов Г.А.* Построение, уравнивание и оценка точности космических геодезических сетей. М.: Недра, 1972. 208 с.
8. *Бойков В.В., Галазин В.Ф., Каплан Б.Л.* и др. Опыт создания геоцентрической системы координат ПЗ-90 // Геодезия и картография. 1993. № 11. С. 17 – 21.
9. Бортовые устройства спутниковой радионавигации / Под ред. В.С. Шебшаевича. М.: Транспорт, 1988. 201 с.
10. *Бурша М.* Основы космической геодезии. Ч. 1. Геометрическая космическая геодезия. М.: Недра, 1971. 129 с. Ч. 2. Динамическая космическая геодезия. М.: Недра, 1975. 280 с.
11. *Бурша М., Юркина М.И.* Небесномеханические задачи о несферических телах // Геодезия и картография. 1998. № 11. С. 3 – 7.

12. *Вейс Г.* Геодезическое использование искусственных спутников Земли. М.: Недра, 1967. 115 с.

13. *Герасимов А.П.* Уравнивание государственной геодезической сети. М.: Картогеоцентр—Геодиздат, 1996. 215 с.

14. *Глушков В.В.* К вопросу выбора оптимальных условий определения параметров орбиты СКА по измерениям между ВКА и СКА // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. 1996. № 4.

15. *Глушков В.В.* О новом методе построения космической геодезической сети // Геодезия и картография. 1996. № 7. С. 22 – 25.

16. *Глушков В.В.* О точности определения положения СКА по измерениям между ВКА и СКА // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. 1996. № 4.

17. *Глушков В.В.* О точности орбитального метода космической геодезии с измерениями между КА // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. 1997. № 2 – 3.

18. *Глушков В.В., Насретдинов К.К.* Способ создания космической геодезической сети. Патент на изобретение № 2124217 с приоритетом от 6 мая 1997 г.

19. *Глушков В.В., Максимов В.В.* О параметрах связи систем координат ПЗ–90 и WGS–84 / Материалы 5-го российско-американского совещания экспертов ИКАО 6–8 мая 1997 г. в Москве. М.: ФАС, 1997.

20. *Глушков В.В., Насретдинов К.К.* О назначении весов измерений в новом методе построения космической геодезической сети // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. 1997. № 4.

21. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

22. *Грушинский Н.П.* Основы гравиметрии. М.: Наука, 1983. 352 с.

23. *Дынкин Е.Б.* Необходимые и достаточные статистики // Успехи математических наук. Т. VI. № 1. 1951. 66.

24. *Жонголович И.Д.* Об определении размеров общего земного эллипсоида // Тр. ИТА. М.-Л., 1956. Вып. IV. С. 4 – 66.

25. *Закс Ш.* Теория статистических выводов. М.: Мир, 1975. 776 с.

26. *Идельсон Н.И.* Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений. М.: Геодезиздат, 1947. 359 с.

27. Использование искусственных спутников для геодезии / Под ред. С. Хенриксена, А. Манчини, Б. Човица. М.: Мир, 1975. 432 с.

28. *Каплан Б.Л., Насретдинов К.К.* Об оптимальных условиях определения координат центра масс Земли // Геодезия и картография. 1980. № 8. С. 12 – 14.

29. *Каула В.М.* Космическая геодезия. М.: Недра, 1966. 164 с.

30. *Каула У.* Спутниковая геодезия. Теоретические основы. М.: Мир, 1970. 172 с.

31. *Кемниц Ю.В.* О потере статистической информации при оценке точности геодезических опорных сетей // Геодезия и картография. 1972. № 10. С. 25 – 29.

32. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.

33. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979. 408 с.

34. *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1962. 350 с.

35. *Манин А.П., Романов Л.М.* Методы и средства относительных определений в системе NAVSTAR // Зарубежная радиоэлектроника. Спец. вып. Радионавигация. М., 1989. № 1. С. 33 – 45.

36. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т. 1. М.-Л.: ГИЗ технико-теорет. лит., 1950. 704 с.

37. Математическая энциклопедия. Т. 3. Обращение ряда. М.: Сов. энциклопедия, 1982. 1184 с.

38. *Месарович М., Мако Д., Такахара И.* Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1973. 344 с.

39. *Мищенко И.Н., Волынкин А.И., Волосов П.С., Григорьев М.И.* Глобальная навигационная система NAVSTAR // Зарубежная радиоэлектроника. 1980. № 8. С. 52 – 83.

40. *Морозов В.П.* Курс сфероидической геодезии. М.: Недра, 1969. 304 с.

41. *Морозов В.П.* Курс сфероидической геодезии. М.: Недра, 1979. 296 с.

42. *Насретдинов К.К.* Иерархическое уравнивание разнородных измерений // Геодезия и картография. 1981. № 1. С. 6 – 11.

43. *Насретдинов К.К.* Как правильно измерить площадь земельного участка? // ГЕОДЕЗИСТЪ. 2001. № 5.

44. *Насретдинов К.К.* Уравнивание линейно-угловых сетей при неизвестных весах измерений // Геодезия и картография. 1978. № 11. С. 22 – 24.

45. *Нейман Ю.М.* О назначении весов по эмпирическим дисперсиям // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. 1968. Вып. 3. С. 26 – 31.

46. Основные положения о государственной геодезической сети России. Проект. М.: ЦНИИГАиК, 1999.

47. *Пеллинен Л.П., Нейман Ю.М.* Физическая геодезия // Геодезия и аэрофотосъемка: Итоги науки и техники. М., 1980. Т. 18. 132 с.

48. *Поддубная М.С., Панкратов В.В., Селина А.Ю.* Навигационное сообщение в спутниковой системе NAVSTAR // Зарубежная радиоэлектроника. 1991. № 4. С. 22 – 42.

49. Радионавигация // Зарубежная радиоэлектроника: Спец. вып. 1989. № 1. 112 с.

50. *Рао С.Р.* Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968. 548 с.

51. *Русаков А.А.* Спутниковая навигационная система NAVSTAR // Зарубежная радиоэлектроника. 1978. № 1. С. 4 – 24.

52. *Сазонов А.З.* Анализ результатов уравнивания // Геодезия и картография. 1978. № 8. С. 21 – 24.
53. *Сазонов А.З.* Уравнивание уравненного // Геодезия и картография. 1972. № 7. С. 6 – 10.
54. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1971. 584 с.
55. Стандартная Земля. Геодезические параметры на 1966 г. / Под ред. К. Лундквиста и Г. Вейса. М.: Мир, 1969. 272 с.
56. *Тревого И.С., Шевчук П.М.* Городская полигонометрия. М.: Недра, 1986. 199 с.
57. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.-Л.: Физматгиз, 1963. 735 с.
58. *Форсайт Дж., Молер К.* Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М.: Мир, 1969. 168 с.
59. *Хвостов В.В., Глушков В.В., Зуева А.Н., Насретдинов К.К.* ГЕОИК-2 – новая космическая геодезическая система России / Сб. тр. 2-й Международной конференции по радионавигации 24–26 июня 1997 г. М.: Радионавигация, Интернавигация, 1997.
60. *Хемминг Р.В.* Численные методы для научных работников и инженеров. М.: Физматгиз, 1972. 400 с.
61. *Херрик С.* Астродинамика. Т. 3. М.: Мир, 1978. 360 с.
62. *Цурков В.И.* Декомпозиция в задачах большой размерности. М.: Наука, 1981. 352 с.
63. *Шварц Лоран.* Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972. 824 с.
64. *Шебшаевич В.С., Григорьев М.Н., Кокина Э.Г. и др.* Дифференциальный режим сетевой спутниковой радионавигационной системы // Зарубежная радиоэлектроника: Спец. вып. Радионавигация. М., 1989. № 1. С. 5 – 32.
65. *Шебшаевич В.С.* Сетевые спутниковые радионавигационные системы. М.: Радио и связь, 1990.
66. *Шимбирев Б.П.* Теория фигуры Земли. М.: Недра, 1975. 431 с.
67. *Эскобал П.* Методы определения орбит. М.: Мир, 1970. 471 с.

68. *Яворский Б.М., Детлаф А.А.* Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. М.: Физматгиз, 1963. 848 с.

69. *Bursha M.* Geocentricity and parametr of recent geopotential models // Bull. Astron. Inst. Czechosl. 1976. 27. № 3. P. 135 – 137.

70. Department of Defense World Geodetic System 1984. DMA TR 8350.2, 30 September 1987 (Second Printing).

71. *Dow J.M.* Definition of various geodetic datums and transformation between them // ESA Scientific & Technical Review. 1976. Vol. 2. № 2. P. 151 – 164.

72. *Fischer R.A.* On the mathematical foundations of theoretical statistics. – Philos. Trans. Roy. Soc. A., 222 (1922). P. 309 – 368.

73. *Fischer R.A.* Theory of statistical estimation. – Proc. Camb. Phil. Soc., 22 (1925). P. 700 – 725.

74. *Grafarend E., d'Hone A.* Gewichtsschätzung in geodatischer Netzen. Deut. geod. Komm. bei der Bayer. Akad. der Wissen. Reihe A, Teor. Geod., Heft № 88, München. 1978. S. 1 – 43.

75. *Helmert F.R.* Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 1924. 362 s.

76. *Kubik K.* The estimation of the weight of measured quantities within the method of least squares // Bull. Geod. 1970. № 95. P. 21 – 40.

77. *Nakiboglu S.M.* Hydrostatic figure and related properties of the Earth. Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1979. 57. № 3. P. 639 – 648.

78. *Pucci E.* Sulle formule fondamentali della Geodesia geoidica. Ann. Di Mat. II. 14 (1886 – 1887). 193.

79. *Saastamoinen J.* Contribution to the theory of atmospheric refraction // Bull. Geod. № 105. Paris: Bureau Central de l'Association Internationale de Geodesie, 1972. 279 – 298 pp. Introduction to practical computation of astronomical refraction // Bull. Geod. № 106. 1972. P. 383 – 397. Contribution to the theory of atmospheric refraction // Bull. Geod. № 107. P. 13 – 34.

80. *Schaab H., Groten E.* Comparison of geocentric origins of global systems from uniformly distributed data // Bull. geod. 1979. 53. № 1. P. 11 – 17.

81. USNO Circular № 163. Washington, 1981.

## Некоторые сведения из математики

### Экономизация степенных рядов

Для быстро сходящихся степенных рядов без большой потери точности последний член ряда можно заменить его значением из полинома Чебышева, таким образом можно понизить степень ряда. В заданном конечном степенном ряду

$$a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + a_8x^8 + \dots + a_kx^k \quad (1)$$

с известными коэффициентами  $a_i$ , где  $1 \geq x \geq -1$ ,  $x^k$  заменяется значением, найденным из уравнения, полученного приравниванием соответствующего полинома Чебышева нулю.

По определению [формула 8.940, 21] полином Чебышева 1-го рода равен

$$T_2(x) = 2x^2 - 1;$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1;$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1;$$

$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1;$$

.....;

$$T_n(x) = x^n - \binom{n}{2} x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4} x^{n-4}(1-x^2)^2 - \dots - \binom{n}{6} x^{n-6}(1-x^2)^3 + \dots + L, \quad (2)$$

где  $n$  – четные степени;  $1 \geq T_i(x) \geq -1$ ;  $\binom{n}{k}$  – число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$ ;  $\binom{n}{0} = 1$ , при  $k$  переменном

получаются биномиальные коэффициенты Ньютона, которые проще вычисляются с помощью треугольника Паскаля

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 \\
 & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1, & & 
 \end{array}$$

где коэффициенты очередного бинома получаются в результате попарного суммирования коэффициентов предыдущего бинома и окаймления полученных коэффициентов слева и справа единицами.

Теперь предположим, что нам дан ряд (1) восьмой степени, тогда, приравняв полином Чебышева  $T_8(x) = 0$ ,

найдем  $x^8 = -\frac{1}{128} + \frac{x^2}{4} - \frac{5x^4}{4} + 2x^6$  и, подставив это значение в ряд (1) и сгруппировав члены с одинаковыми степенями  $x$ , получим экономизированный ряд шестой степени

$$\left(a_0 - \frac{a_8}{128}\right) + \left(a_2 + \frac{a_4}{4}\right)x^2 + \left(a_4 - \frac{5a_6}{4}\right)x^4 + (a_6 + 2a_8)x^6 \quad (3)$$

с погрешностью  $a_8 x^8 / 128$ . Экономизация рядов впервые была предложена К. Ланцошем [60].

### Обращение степенных рядов

Если дан степенной ряд

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots \quad (4)$$

с известными коэффициентами  $a_i$ , то обращенным называется ряд

$$x = A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + A_4 y^4 + \dots, \quad (5)$$

коэффициенты которого являются функциями коэффициентов ряда (4). Обращение ряда основано на подстановке ряда в ряд [формула 0.315, 21].

Пусть даны  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k y^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ ,  $y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ , где  $a_k$ ,  $b_k$

известные коэффициенты. Тогда из равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \right)^k,$$

приравнявая коэффициенты при равных степенях  $x$ , последовательно определяются коэффициенты  $c_k$  обращенного ряда. Для применения этих формул из равенства (4) находим

$$x = \frac{y}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} x^2 - \frac{a_3}{a_1} x^3 - \frac{a_4}{a_1} x^4 - \dots$$

Тогда

$$A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + A_4 y^4 + L = \frac{y}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} x^2 - \frac{a_3}{a_1} x^3 - \frac{a_4}{a_1} x^4 - \dots$$

или

$$\left( A_1 - \frac{1}{a_1} \right) y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + A_4 y^4 + L = 0x - \frac{a_2}{a_1} x^2 - \frac{a_3}{a_1} x^3 - \frac{a_4}{a_1} x^4 - \dots \quad (6)$$

Подставляя в правую часть уравнения (6) значение  $x$  из равенства (5) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $y$ , последовательно находим

$$A_1 = \frac{1}{a_1}; \quad A_2 = -\frac{a_2}{a_1} A_1^2 = -\frac{a_2}{a_1^3};$$

$$A_3 = -\frac{a_2}{a_1} 2A_1 A_2 - \frac{a_3}{a_1} A_1^3 = \frac{1}{a_1^5} (2a_2^2 - a_1 a_3);$$

$$\begin{aligned} A_4 &= -\frac{a_2}{a_1} (A_2^2 + 2A_1 A_3) - \frac{a_3}{a_1} 3A_1^2 A_2 - \frac{a_4}{a_1} A_1^4 = \\ &= \frac{1}{a_1^7} (5a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - 5a_2^3), \dots \end{aligned}$$

Обращенный ряд (5) называется также рядом Лагранжа [37] и, как большинство многочленов (Лежандра, Чебышева, Якоби, Лагерра, Эрмита и др.), является частным

решением дифференциального уравнения 2-го порядка от гипергеометрической или вырожденной гипергеометрической функции [36]. Для проверки правильности вычисления коэффициентов обращенного ряда ряд (4) можно подставить в ряд (5) с полученными значениями коэффициентов  $A_i$ . В результате получится тождество  $x \equiv x$ .

### Обращение тригонометрического ряда

В данном контексте тригонометрическим называется ряд вида

$$y = x + p_2 \sin 2x + p_4 \sin 4x + p_6 \sin 6x + p_8 \sin 8x + \dots \quad (7)$$

с известными коэффициентами  $p_i$ . Ряд с любыми степенями синуса с помощью половинного угла может быть приведен к виду (7). При обращении этого ряда требуется найти коэффициенты ряда

$$x = y + q_2 \sin 2y + q_4 \sin 4y + q_6 \sin 6y + q_8 \sin 8y + \dots = y + \Delta \quad (8)$$

как функции коэффициентов ряда (7). В работе [41] приведены коэффициенты

$$q_2 = -p_2 \left( 1 + p_4 - \frac{p_2^2}{2} \right), \quad q_4 = -p_4 + p_2^2,$$

$$q_6 = -p_6 + 3p_2 p_4 - \frac{3}{2} p_2^3 \text{ для обращенного ряда.}$$

Решим эту задачу методом подстановки ряда в ряд, как и в случае степенного ряда, до коэффициента  $q_8$  включительно с дополнительными слагаемыми для предыдущих коэффициентов.

Подставив значение  $x$  из выражения (8) в ряд (7), получаем уравнение

$$-p_2 \sin 2(y + \Delta) - p_4 \sin 4(y + \Delta) - p_6 \sin 6(y + \Delta) - p_8 \sin 8(y + \Delta) = \Delta, \quad (9)$$

где

$$\Delta = q_2 \sin 2y + q_4 \sin 4y + q_6 \sin 6y + q_8 \sin 8y. \quad (10)$$

При быстрой сходимости рядов (7) и (8) величину  $\Delta$  можно считать малой, поэтому разложением в ряд Тейлора в тригонометрических функциях выражения (9) ее можно вывести за функцию синуса. По формуле синуса суммы углов получаем

$$\sin 2(y + \Delta) = \sin 2y \cos 2\Delta + \cos 2y \sin 2\Delta, \quad (11)$$

где  $\cos 2\Delta = 1 - 2\Delta^2 + \frac{2}{3}\Delta^4$ ;  $\sin 2\Delta = 2\Delta - \frac{4}{3}\Delta^3$ .

Аналогично

$$\sin 4(y + \Delta) = \sin 4y \cos 4\Delta + \cos 4y \sin 4\Delta, \quad (12)$$

где  $\cos 4\Delta = 1 - 8\Delta^2 + \frac{32}{3}\Delta^4$ ;  $\sin 4\Delta = 4\Delta - \frac{32}{3}\Delta^3$ ;

$$\sin 6(y + \Delta) = \sin 6y \cos 6\Delta + \cos 6y \sin 6\Delta, \quad (13)$$

где  $\cos 6\Delta = 1 - 18\Delta^2$ ;  $\sin 6\Delta = 6\Delta$ ;

$$\sin 8(y + \Delta) = \sin 8y \cos 8\Delta + \cos 8y \sin 8\Delta,$$

где  $\cos 8\Delta = 1$ ;  $\sin 8\Delta = 0$ .

Следовательно, уравнение (9) принимает вид

$$\begin{aligned} & -p_2 \left[ (1 - 2\Delta^2) \sin 2y + \left( 2\Delta - \frac{4}{3}\Delta^3 \right) \cos 2y \right] - p_4 \left[ (1 - 8\Delta^2) \sin 4y + \right. \\ & \left. + \left( 4\Delta - \frac{32}{3}\Delta^3 \right) \cos 4y \right] - p_6 \left[ (1 - 18\Delta^2) \sin 6y + 6\Delta \cos 6y \right] - \\ & - p_8 \sin 8y - \dots = \Delta. \end{aligned}$$

Оставляя члены только до третьей степени для коэффициентов  $p_i$ ,  $i = 2, 4, 6$ ,

$$-a - 2b\Delta + 2c\Delta^2 = \Delta, \quad (14)$$

где  $a = p_2 \sin 2y + p_4 \sin 4y + p_6 \sin 6y + p_8 \sin 8y$ ;

$$b = p_2 \cos 2y + 2p_4 \cos 4y + 3p_6 \cos 6y$$
;

$$c = p_2 \sin 2y + 4p_4 \sin 4y + 9p_6 \sin 6y.$$

Следующий шаг состоит в подстановке в уравнение (14) значения величины  $\Delta$  из того же уравнения, т. е. формула (14) является рекуррентной. В результате получаем

$$-a + 2ab - 4ab^2 + 2a^2c = \Delta. \quad (15)$$

Подставляя в уравнение (15) значения полиномов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и используя только значимые члены, получаем

$$\begin{aligned} & -p_2 \sin 2y - p_4 \sin 4y - p_6 \sin 6y - p_8 \sin 8y + p_2^2 \sin 4y + \\ & + 4p_2 p_4 \sin 2y \cos 4y + 6p_2 p_6 \sin 2y \cos 6y + 2p_2 p_4 \sin 4y \cos 2y + \\ & + 2p_4^2 \sin 8y + 6p_4 p_6 \sin 4y \cos 6y + 2p_2 p_6 \sin 6y \cos 2y + \\ & + 4p_4 p_6 \sin 6y \cos 4y - 4p_2^3 \sin 2y \cos^2 2y - 4p_2^2 p_4 \sin 8y - \\ & - 12p_2^2 p_6 \sin 4y \cos 6y - 4p_2^2 p_4 \sin 4y \cos^2 2y - \\ & - 4p_2^2 p_6 \sin 6y \cos^2 2y + 2p_2^3 \sin^3 2y + \\ & + 4p_2^2 p_4 \sin^2 2y \sin 4y + 4p_2^2 p_6 \sin^2 2y \sin 6y + 8p_2^2 p_4 \sin^2 2y \sin 4y + \\ & + 18p_2^2 p_6 \sin^2 2y \sin 6y + \dots = \Delta. \end{aligned} \quad (16)$$

Для приведения тригонометрических функций в уравнении (16) к функциям кратных аргументов из работы [21] используем формулы

$$1.314. \quad 1. \quad \sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2};$$

$$3. \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};$$

$$5. \quad \cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2};$$

$$1.320. \quad 1. \quad \sin^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} 2 \binom{2n}{k} \cos 2(n-k)x + \binom{2n}{n} \right];$$

$$3. \quad \sin^{2n-1} x = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+k-1} \binom{2n-1}{k} \sin(2n-2k-1)x.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}
 & -p_2 \sin 2y - p_4 \sin 4y - p_6 \sin 6y - p_8 \sin 8y + p_2^2 \sin 4y + \\
 & + 2p_2p_4 \sin 6y - 2p_2p_4 \sin 2y + 3p_2p_6 \sin 8y - 3p_2p_6 \sin 4y + \\
 & + p_2p_4 \sin 6y + p_2p_4 \sin 2y + 2p_4^2 \sin 8y - 3p_4p_6 \sin 2y + \\
 & + p_2p_6 \sin 8y + p_2p_6 \sin 4y + 2p_4p_6 \sin 2y - p_2^3 \sin 6y - p_2^3 \sin 2y - \\
 & - 4p_2^2p_4 \sin 8y + 6p_2^2p_6 \sin 2y - 2p_2^2p_4 \sin 4y - p_2^2p_4 \sin 8y - \quad (17) \\
 & - p_2^2p_6 \sin 2y - 2p_2^2p_6 \sin 6y + \frac{3}{2}p_2^3 \sin 2y - \frac{1}{2}p_2^3 \sin 6y + p_2^2p_4 \sin 8y + \\
 & + 2p_2^2p_6 \sin 6y - p_2^2p_6 \sin 2y + 4p_2^2p_4 \sin 4y - 2p_2^2p_4 \sin 8y + \\
 & + 9p_2^2p_6 \sin 6y - \frac{9}{2}p_2^2p_6 \sin 2y + \dots = \Delta.
 \end{aligned}$$

Последующие члены будут содержать коэффициенты  $p_i$  в четвертой степени и выше.

Приравнивая в выражениях (17) и (10) члены с одинаковыми синусами, получаем

$$\begin{aligned}
 q_2 &= -p_2 - p_2p_4 + \frac{1}{2}p_2^3 - p_4p_6 - \frac{1}{2}p_2^2p_6 + \dots; \\
 q_4 &= -p_4 + p_2^2 + 2p_2^2p_4 - 2p_2p_6 + \dots; \\
 q_6 &= -p_6 + 3p_2p_4 - \frac{3}{2}p_2^3 + 9p_2^2p_6 + \dots; \\
 q_8 &= -p_8 + 4p_2p_6 + 2p_4^2 - 6p_2^2p_4 + \dots
 \end{aligned} \quad (18)$$

Так как ряды (7) и (8) одинаковы и при известных коэффициентах  $q_i$  аналогично получают коэффициенты  $p_i$ , то для проверки точности определения коэффициентов в формулы (18) можно подставить значения коэффициентов  $p_i$ , выраженные с помощью коэффициентов  $q_i$  по тем же формулам (18).

## Векторное и матричное дифференцирование

Пожалуй, впервые в систематизированном виде приемы векторного и матричного дифференцирования изложены в работе [5], который стал доступен на русском языке в 1979 г. Однако некоторые элементы векторного дифференцирования можно найти уже в работах [50; 63] и др. Но эти приемы имели тогда ограниченное применение и не были широко распространены. Ситуация изменилась с появлением задач, требующих векторного и матричного дифференцирования, в частности, оценивания ковариационных матриц измерений методом максимального правдоподобия [76]. Однако при решении этих задач приемы векторного и матричного дифференцирования не приводились. Второй из авторов данной работы при разработке вопросов уравнивания линейно-угловых сетей при неизвестных весах измерений [44] использовал свои принципы векторного и матричного дифференцирования, которые представляются более простыми и понятными при реализации, чем приведенные в работе [5].

Прежде, чем приводить эти приемы дифференцирования, необходимо сделать предварительные оговорки. При векторном и матричном дифференцировании обычно ограничиваются рамками линейной алгебры, т. е. результат дифференцирования должен быть также вектором или матрицей. Например, производная скалярной функции по вектору есть вектор, а по матрице – матрица. Аналогично производные вектора и матрицы по параметру также являются вектором и матрицей соответственно. Производная вектора по вектору является матрицей с размерами, равными размерностям векторов. Именно этими случаями

обычно ограничивается векторное и матричное дифференцирование.

Однако приемы дифференцирования, приводящие к объемным матрицам, выполняются по тем же принципам. Например, производные вектора по матрице и матрицы по вектору являются трехмерными матрицами, третья размерность которой равна размерности вектора. Такую объемную матрицу можно представить как ряд матриц, повторяющихся друг за другом по числу размерности вектора. Аналогично четырехмерную матрицу, получающуюся при дифференцировании матрицы по матрице, можно представить как ряд трехмерных матриц толщиной, равной первой размерности второй матрицы, повторяющихся по числу второй размерности той же второй матрицы. Таким образом, дифференцирование по векторам и матрицам увеличивает размерность результирующей матрицы в соответствии с их размерностями.

При вычислении дифференциала умножение на вектор — приращение или матрицу — приращение возвращает размерность дифференцируемой величины к первоначальному размеру. Аналогичное действие должно оказывать и интегрирование по векторам и матрицам, как действие, обратное дифференцированию. Исключение может составить векторное произведение векторов и соответствующее интегрирование, но здесь эти вопросы не затрагиваются. В данном разделе вектора обозначаются строчными, а матрицы прописными латинскими буквами, параметры — греческими буквами.

1. Рассмотрение правил векторного и матричного дифференцирования удобно начать с производных, использовавшихся в задачах, рассматриваемых в главе 9. Вычислим производную определителя матрицы по самой матрице, т. е.  $\partial |P| / \partial P$ . Пусть симметричная матрица  $P$  имеет третий порядок

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix},$$

где  $|\mathbf{P}| = p_{11} p_{22} p_{33} + 2 p_{12} p_{13} p_{23} - p_{13}^2 p_{22} - p_{12}^2 p_{33} - p_{11} p_{23}^2$ .

Вычислим производную определителя по элементу  $p_{11}$

$$\partial |\mathbf{P}| / \partial p_{11} = p_{22} p_{33} - p_{23}^2.$$

Аналогично находим

$$\partial |\mathbf{P}| / \partial p_{12} = 2 p_{13} p_{23} - 2 p_{12} p_{33},$$

где коэффициент 2 указывает на равенство миноров симметричной матрицы. Таким же образом находим производные по остальным элементам и убеждаемся, что производная определителя по самой матрице равна присоединенной матрице соответствующих миноров. Так как матрица симметричная, то прямая матрица равна транспонированной. Если присоединенную матрицу поделить на определитель исходной матрицы, получаем обратную

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{P}|} \frac{\partial |\mathbf{P}|}{\partial \mathbf{P}} = \frac{\partial \ln |\mathbf{P}|}{\partial \mathbf{P}}.$$

Если матрица  $\mathbf{P}$  несимметрична, то в результате получится  $(\mathbf{P}^T)^{-1}$ , или  $(\mathbf{P}^{-1})^T$ .

2. Рассмотрим получение производной квадратичной формы по матрице. Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} &= [v_1 \ v_2 \ v_3] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \\ &= p_{11} v_1^2 + 2p_{12} v_1 v_2 + 2p_{13} v_1 v_3 + p_{22} v_2^2 + 2p_{23} v_2 v_3 + p_{33} v_3^2. \end{aligned}$$

Продифференцировав это выражение по всем элементам матрицы  $\mathbf{P}$ , найдем

$$\frac{\partial \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\partial \mathbf{P}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} [v_1 \ v_2 \ v_3] = \begin{bmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_1 v_2 & v_2^2 & v_2 v_3 \\ v_1 v_3 & v_2 v_3 & v_3^2 \end{bmatrix}.$$

Так как полученная матрица является случайной, то в работе [5] для получения ее математического ожидания предполагается, что вектор  $v$  имеет многократную реализацию. Однако вполне можно обойтись и без этого трудно-реализуемого требования, если предположить независимость и равноточность измерений, поправками к которым являются компоненты вектора  $v$ . На практике чаще всего принимается такая гипотеза относительно геодезических измерений. В этом случае

$$\frac{\partial v^T P v}{\partial P} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ где } \sigma^2 = \sum_{i=1}^3 v_i^2 / 3.$$

3. Продифференцировав ту же квадратичную форму по вектору  $v$ , получим

$$\partial v^T P v / \partial v = 2 P v,$$

в чем легко убедиться, дифференцируя сумму квадратов взвешенных поправок.

Теперь формулируем общие правила дифференцирования по матрицам и векторам:

а) дифференцирование выполняется по транспонированному значению переменной. Если дифференцируемое выражение не содержит транспонированного значения переменной, то сначала выполняется транспонирование функции;

б) после дифференцирования части функции справа и слева от переменной необходимо поменять местами.

Применим эти правила к примерам, приведенным в работе [5].

$$\frac{\partial e^T A v e}{\partial A} = \frac{\partial e^T v^T A^T e}{\partial A} = (e^* e^T v^T).$$

Здесь левая от переменной  $A^T$  часть функции равна  $e^T v^T$ , правая —  $e$ . О значениях скобок и знака умножения в

результате будет сказано ниже при рассмотрении вычисления дифференциалов векторных и матричных функций.

$$5. \frac{\partial a^T \mathbf{A} b}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial b^T \mathbf{A}^T a}{\partial \mathbf{A}} = (a^* b^T).$$

$$6. \frac{\partial \text{Tr}(\mathbf{B} \mathbf{A}^T \mathbf{C})}{\partial \mathbf{A}} = \text{Tr}(\mathbf{C}^* \mathbf{B}).$$

$$7. \frac{\partial a^T \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{A}^T b}{\partial \mathbf{A}} = (b^* a^T \mathbf{A} \mathbf{B}) + \frac{\partial b^T \mathbf{A} \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T a}{\partial \mathbf{A}} = \\ = (b^* a^T \mathbf{A} \mathbf{B}) + (a^* b^T \mathbf{A} \mathbf{B}^T).$$

$$8. \frac{\partial a^T \mathbf{A} a}{\partial a} = \mathbf{A} a + \frac{\partial a^T \mathbf{A}^T a}{\partial a} = \mathbf{A} a + (\mathbf{A}^T a).$$

Если  $\mathbf{A}$  – симметричная матрица, то  $\partial a^T \mathbf{A} a / \partial a = 2 \mathbf{A} a$  (пример 3).

$$9. \frac{\partial \mathbf{A} c a^T \mathbf{B} c}{\partial c} = \frac{\partial c^T \mathbf{B}^T a c^T \mathbf{A}^T}{\partial c} = (\mathbf{B}^T a c^T \mathbf{A}^T) + (\mathbf{A}^T c^T \mathbf{B}^T a).$$

До сих пор было полное совпадение результатов с результатами, приведенными в работе [5]. В данном случае результат получился транспонированным, так как этот момент транспонирования в работе [5] определен нечетко – словами “там, где надо”. Видимо автор сам запутался, где же надо транспонировать, а где нет.

10. Пусть матрица  $\mathbf{A}^{-1}$  зависит от параметра  $\alpha$ , тогда в соответствии с работой [63] производная обратной матрицы определяется как

$$\frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial \alpha} = - \mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \alpha} \mathbf{A}^{-1}.$$

Тогда пример из работы [5] дифференцируется следующим образом

$$\frac{\partial x^T A^{-1} x}{\partial A} = -A^{-1} x x^T A^{-1},$$

что подчиняется вышеприведенным правилам. Последний пример ж) из работы [5] соответствует примеру 1.

Рассмотрим несколько примеров объемных матриц.

11. Как известно, решение нормальных уравнений имеет вид  $x = (A^T P A)^{-1} A^T P l$ . Найдем зависимость решения от весовой матрицы  $P$

$$\begin{aligned} \partial x / \partial P &= -A(A^T P A)^{-1} A^T P l^* (A^T P A)^{-1} A^T + l^* (A^T P A)^{-1} A^T = \\ &= - (Ax - l)^* (A^T P A)^{-1} A^T = -v^* (A^T P A)^{-1} A^T, \end{aligned}$$

где  $Ax - l = v$  – вектор поправок к измерениям.

12. Продифференцируем то же выражение по матрице  $A$

$$\begin{aligned} \partial x / \partial A &= -2PA(A^T P A)^{-1} A^T P l^* (A^T P A)^{-1} + P l^* (A^T P A)^{-1} = \\ &= -P(Ax + v)^* (A^T P A)^{-1}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим вопрос о том, как эти производные могут быть использованы для вычисления дифференциалов функций. Для этого нужно выполнить следующие действия, приводящие функции к первоначальному виду с заменой переменных на их дифференциалы:

а) умножить производную слева на транспонированный векторный дифференциал, если производная бралась по вектору, и справа на матричный дифференциал, если производная бралась по матрице;

б) если при дифференцировании правая и левая части функции были переставлены, то необходимо сделать обратную перестановку. Стык частей в производной отмечен знаком умножения;

в) если было выполнено транспонирование, то надо повторить эту операцию. Производная заключается в скобки, если транспонирование было выполнено.

Проверим эти правила на вышеприведенных примерах.

$$1. d \ln |\mathbf{P}| = \mathbf{P}^{-1} d\mathbf{P}.$$

$$2. d\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T d\mathbf{P} \mathbf{v}.$$

$$3. d\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = 2d\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}.$$

$$4. d\alpha = \mathbf{e}^T d\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{e}.$$

$$5. d\alpha = \mathbf{a}^T d\mathbf{A} \mathbf{b}.$$

6.  $d\alpha = \text{Tr}(\mathbf{B} d\mathbf{A}^T \mathbf{C})$ . Для отличия производной от объемной матрицы  $\mathbf{B}^* \mathbf{C}$  здесь также указан символ следа  $\text{Tr}$ .

$$7. d\alpha = \mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{B} d\mathbf{A}^T \mathbf{b} + \mathbf{a}^T d\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

$$8. d\alpha = d\mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T d\mathbf{A} \mathbf{a}.$$

9.  $d\mathbf{b} = \mathbf{A} d\mathbf{c} \mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{c} + \mathbf{A} \mathbf{c} \mathbf{A}^T d\mathbf{B} \mathbf{c}$ . Как видим, найденная нами ранее производная в данном примере подчиняется общим обратным правилам.

$$10. d\alpha = -\mathbf{x}^T \mathbf{A}^{-1} d\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}.$$

$$11. d\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T d\mathbf{P} \mathbf{v}.$$

12.  $d\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} d\mathbf{A}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{v})$ . В объемных матрицах производная умножается справа на транспонированный матричный дифференциал.

**Перспективы использования  
космической геодезической  
системы ГЕОИК-2  
в международных проектах**

**Определение орбиты экспериментального  
космического аппарата “Зея”  
по измерениям ВКА–СКА**

В феврале–апреле 1997 года совместными усилиями ряда отечественных научно-исследовательских учреждений, организаций промышленности (НПО прикладной механики имени академика М.Ф. Решетнева и др.), центров сбора и обработки измерительной информации (Главный баллистический центр по обработке информации 153-й ГИЦИУ КС, Центр сбора и обработки лазерных измерений ЦУС ЦНИИмаш и др.) с использованием инфраструктуры космодрома “Свободный” был проведен эксперимент по опробованию технологии траекторного контроля параметров движения ракеты-носителя “Старт-1,2” и среднеорбитального космического аппарата “Зея” с помощью бортовой интегрированной навигационной аппаратуры (БИНА) “Терминатор-С”, работающей по сигналам, излучаемым с ВКА космических навигационных систем ГЛОНАСС (Россия) и GPS (США).

Основные задачи эксперимента:

- проверка функционирования БИНА на участке выведения ракеты-носителя в условиях перегрузок, вибраций и на орбите;
- оценка основных характеристик БИНА в стандартном и дифференциальном режимах навигации СКА “Зея” по измерениям на линиях ВКА–СКА;
- усовершенствование используемых моделей ГПЗ.

Определяемая по измерениям ВКА–СКА орбита СКА “Зея” сравнивалась с эталонной орбитой, предварительно определенной с помощью квантово-оптических средств российской и международной лазерной сетей. Результаты эксперимента в целом подтвердили высокие потенциальные возможности измерений по линии ВКА–СКА для решения задач космической геодезии, а также целесообразность кооперации для научных исследований отечественных и зарубежных специалистов.

### **Проект российско-европейской космической геодезической системы ГЕОИК-2**

В 1996–1997 годах в НПО прикладной механики (ПМ) имени академика М.Ф. Решетнева был проведен ряд предварительных проработок по созданию совместной российско-европейской космической геодезической системы ГЕОИК-2. Так, по запросу НПО ПМ фирмой ALCATEL telecom были представлены материалы по полезной нагрузке в составе:

- двухчастотный высотомер (Poseidon);
- трехчастотный радиометр;
- система внешнетраекторных измерений (Doris);
- антенная система.

Эта аппаратура впервые была запущена в качестве экспериментальной на спутнике SPOT-2, затем на спутниках TOPEX-Poseidon, SPOT-3 и -4. В качестве штатной эту аппаратуру планируют на спутниках TOPEX-Poseidon, ENVISAT и SPOT-5. Характеристики вышеуказанного комплекса следующие: точность измерения высотомера (включая ионосферную поправку) 1,5 см; точность тропосферной поправки 1 см; точность определения (по радиусу-вектору) 2,5 см.

Анализ представленной нагрузки показал, что аппаратура высокоточных траекторных измерений Doris, высотомер Poseidon и радиометр по своим массогабаритным и энергетическим характеристикам могут быть установлены на разрабатываемый КА ГЕОИК-2 без

значительных затруднений. По точностным характеристикам полезная нагрузка фирмы ALCATEL telecom отвечает требованиям, предъявляемым к целевой аппаратуре КА ГЕОИК-2.

Учитывая готовность фирмы ALCATEL telecom к поставке вышеназванной аппаратуры, представляется целесообразным вариант совместного создания и эксплуатации системы на основе паритетного участия. Российская сторона может взять на себя разработку, создание и обеспечение запуска на орбиту орбитальной платформы и обеспечить в дальнейшем эксплуатацию КА, поддержание орбитальной группировки. Поставка полезной нагрузки для КА ГЕОИК-2 в полной комплектации будет вкладом европейской стороны в совместный проект. Сбор и обработка измерительной информация, а также решение целевой задачи проводятся как российской, так и европейской сторонами. Кроме того, совместная разработка и создание наземной аппаратуры специального комплекса позволят найти оптимальные решения как по номенклатуре, так и по срокам ее разработки.

Экономические преимущества создания совместной российско-европейской космической геодезической системы для российской стороны очевидны:

- исключается разработка прецизионных бортовых измерительных систем (высотомера, доплеровской системы, дальномерной запросной системы, аппаратуры спутниковой навигации);

- исключается необходимость дорогостоящего полигона для калибровки высотомера с помощью квантовых оптических систем;

- сокращаются сроки разработки системы в целом при минимизации затрат.

Учитывая то, что стоимость разработки целевой аппаратуры составляет до 50% от стоимости всей системы, совместная разработка и создание космической геодезической системы позволят сократить расходы на создание и испытание системы как минимум в 2 раза. Техническая реали-

зуюмость российской части проекта обеспечивается тем, что КА ГЕОИК-2 разрабатывается на единой конструктивной базе с КА “Цикада-М-УТТХ”, создание которого в настоящее время широко развернуто в НПО ПМ. Кроме того, ранее в НП ПМ проводилась работа по определению целесообразности и возможности использования на спутнике ГЕОИК-2 немецкой аппаратуры PRARE в качестве технической реализации схемы межспутниковой радиолинии высокоточного определения орбиты и измерений по наземным реперам, которая сейчас заложена в документации на КА (ДДС, ДС, ДЗС).

Удачное комплексирование бортовой аппаратуры позволит значительно сократить затраты на эксплуатацию наземного специального комплекса, повысить выходные характеристики системы в целом, а сроки ее создания и развертывания значительно уменьшить. Учитывая уникальный набор специальной аппаратуры на борту КА ГЕОИК-2, его многоплановость и многофункциональность, последний приобретает значительный интерес по своей информативности и ценности информации для ряда прикладных задач:

- координатно-временного обеспечения;
- исследования природных ресурсов и геологии;
- океанографии и экологии;
- прогнозирования землетрясений;
- навигации по геофизическим полям;
- изучения рельефа дна морей и океанов в целях безопасности судоходства;
- климатологии;
- сейсмологии и т. д.

Учитывая довольно высокую стоимость специальной бортовой аппаратуры, вариант совместного создания космической геодезической системы является в нынешних условиях наиболее реальным.

Технические, организационные и финансовые вопросы можно успешно разрешить при заинтересованности и наличии доброй воли участвующих сторон. Широкий спектр

решаемых задач в совокупности с уникальностью информации будет представлять коммерческий интерес для многих фирм и организаций, что в дальнейшем позволит скомпенсировать затраты на создание системы.

**Перспективы использования результатов эксплуатации системы ГЕОИК-2 для обеспечения безопасности полетов и посадки самолетов международной гражданской авиации**

Как известно, равноправными составляющими международной системы глобальной навигации GNSS-1 являются космические навигационные системы ГЛОНАСС (Россия) и GPS (США). Их координатными основами служат геоцентрические системы координат ПЗ-90 и WGS-84 соответственно [19]. По своим фундаментальным постоянным, использованным в качестве исходных при выводе указанных систем, по методологии получения геодезических параметров, характеризующих систему координат в целом, и по точности отнесения к ЦМЗ (1 – 2 м) системы координат ПЗ-90 и WGS-84 идентичны и в этом смысле равнозначны. В то же время по взаимному расположению соответствующих осей X, Y, Z систем координат имеются линейные смещения (до 3 м) и угловые развороты (до десятых долей секунды). В этом смысле координатные системы различны.

Для обеспечения безопасности полетов и посадки самолетов Международной организации гражданской авиации (ИКАО), оборудованных интегрированными – работающими по сигналам КА систем ГЛОНАСС и GPS – спутниковыми навигационными приемниками требуются, кроме надежной координатной основы, достаточно точные параметры связи используемых систем координат. В настоящее время параметры связи систем ПЗ-90 и WGS-84 известны с точностью 6 – 8 м. Такая точность достаточна только для обеспечения захода на посадку и посадки самолетов по 1-й категории ИКАО. Для обеспечения посадки по 2-й категории требуется точность порядка 1 м, по 3-й категории

– точность первых дециметров не только параметров связи, но и собственно систем координат. Обеспечить столь высокую точность можно только в результате радикального улучшения систем координат ПЗ–90 и WGS–84. В начале XXI столетия Россия с помощью космической геодезической системы ГЕОИК-2 и США с помощью своих систем должны решить и эту довольно сложную организационную и научно-техническую задачу.