

В.М.КАУЛА

КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ



КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ



В. М. Каула

Перевод с английского
О. Б. ШЕЙНИНА

Под редакцией
А. В. КОНДРАШКОВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НЕДРА» Москва · 1966

Advances in geophysics

Edited by

H. E. LANDSBERG

J. VAN MIEGHEM

VOLUME 9

1962

ACADEMIC PRESS NEW YORK AND LONDON

АННОТАЦИЯ

В книге кратко изложен накопленный за последние годы зарубежный опыт в области космической геодезии. Главное внимание уделено изложению основ динамики искусственных спутников Земли, используемых для геодезических целей, а также рассмотрению влияния земного гравитационного поля и других эффектов на их орбиты. В общих чертах описана техника наблюдений спутников и геофизическая интерпретация данных, получаемых при помощи ИСЗ.

Книга рассчитана на специалистов, работающих в области использования результатов наблюдений ИСЗ. Она может быть рекомендована и научным работникам — геодезистам и астрономам, — а также аспирантам и студентам старших курсов институтов и университетов.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

С появлением искусственных спутников Земли геодезия получила новое эффективное средство для решения своей основной научной задачи — изучения фигуры, размеров и внешнего гравитационного поля нашей планеты.

За прошедшие годы со времени запуска Советским Союзом в 1957 г. первого искусственного спутника Земли были получены многие ценные данные о фигуре и гравитационном поле Земли.

Успехи в разработке теории движения и технике наблюдений искусственных спутников Земли, а также в изучении верхних частей атмосферы и околоземного пространства сделали реальной возможность создания сети геодезических опорных пунктов в единой системе относимости и позволили решить с достаточно высокой точностью такие, не поддававшиеся решению прежними средствами геодезические задачи, как передача координат на уединенные острова Мирового океана, контроль уже созданных и покрывающих значительные части материков триангуляций.

Вместе с тем появление искусственных спутников Земли сделало более прочными и установило новые связи геодезии с ее соседями в науке — геофизикой и астрономией.

Изложенные обстоятельства вызвали широкий интерес геодезистов к проблеме использования искусственных спутников Земли для решения различных геодезических задач. Этот интерес нашел, в частности, отражение в постановке соответствующих курсов в высших геодезических учебных заведениях.

Использование искусственных спутников Земли в геодезических целях породило большое число новых проблем и сделало эту область геодезии в известной степени оригинальной, что дает некоторые основания называть ее космической геодезией.

До настоящего времени в геодезической литературе, изданной в СССР, отсутствовали книги, в которых в едином и достаточно полном аспекте освещались бы вопросы, связанные с использованием искусственных спутников Земли для геодезических целей и исследования ее внешнего гравитационного

поля, а также указывались те геофизические задачи, решению которых могут помочь искусственные спутники Земли.

Результаты многочисленных исследований в этих областях, опубликованные в различных изданиях, не получали должного обобщения и не были представлены в виде достаточно полного научного обзора.

Это сделано в предлагаемой вниманию советских читателей работе * В. М. Каулы.

Небольшой объем работы потребовал от автора особого характера изложения: читателю, как правило, сообщаются соответствующие формулы без выводов, за которыми автор отсылает к другим источникам.

Следует отметить, что работа В. Каулы не предназначена для систематического изучения предмета, однако она может оказать существенную помощь читателю для получения общих сведений по основным проблемам и методам использования искусственных спутников Земли для геодезических целей.

Для более глубокого изучения затрагиваемых в работе вопросов читатель может обратиться к соответствующей специальной литературе, указанной в конце книги автором. При редактировании перевода список литературы, приведенной автором, был систематизирован и дополнен новыми наименованиями книг и статей. Для удобства советского читателя в списке литературы дана ссылка на рефераты зарубежных изданий, опубликованные в реферативных журналах: «Астрономия и геодезия» (РЖ Астр.), «Геодезия» (РЖ Геод.), «Исследование космического пространства» (РЖ Космос), издаваемых Институтом научной информации АН СССР.

В целях облегчения пользования книгой значительно упрощен ее ссылочный аппарат, в связи с чем внесены соответствующие изменения в рубрикацию разделов и нумерацию формул. В конце книги приложен краткий предметный указатель. Раздел «Acknowledgments» (признательность) опущен.

А. В. Кондрашков

* Работа американского ученого В. М. Каулы «Космическая геодезия» опубликована в серии «Advances in geophysics» vol. 9. за 1962 г., издаваемой Academic Press (New York and London).

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ*

<i>A</i>	Расстояние Земля—Луна, обратно пропорциональное среднему лунному параллаксу: $\pi = a_e / A$ (§ 5 и 6)
<i>A</i>	Площадь поперечного сечения спутника (§ 7, 10 и 12)
<i>a</i>	Большая полуось кеплеровой орбиты (§ 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
<i>a</i>	Апертура телескопа (§ 12)
<i>a_e</i>	Средний экваториальный радиус Земли
<i>A_{nm}, B_{nm}</i>	Коэффициенты при $P_{nm}(\sin \varphi)(\cos m \lambda, \sin m \lambda)$ в разложении гравиметрических аномалий по сферическим гармоникам
b	Радиус-вектор (b_1, b_2, b_3) в координатах, отнесенных к оси инструмента
<i>b</i>	Координаты (η и ς), измеренные на фотопластинке (§ 9)
<i>b</i>	Радиус спутника (§ 12)
<i>c</i>	Параметр формы $a_e \sqrt{J_2}$ эллипсоидальных координат (§ 4, 6, 13, 19)
<i>c</i>	Скорость света (§ 6, 13)
<i>C_d</i>	Коэффициент торможения, функция формы тела
C	Матрица коэффициентов частных производных, определяющих дифференциальные поправки
<i>C</i>	Момент инерции Земли относительно полярной оси
<i>E</i>	Эксцентрисическая аномалия кеплеровой орбиты (§ 1, 2, 4, 7, 8, 9)
<i>E</i>	Плотность энергии (размерность $EL^{-2} = MT^{-2}$) (§ 12)
<i>E_i</i>	Общее обозначение любого элемента кеплеровой орбиты
e	Вектор ($M, a, e, i, \omega, \Omega$) элементов кеплеровой орбиты

* Обозначения, показанные жирным шрифтом, в индексах даны светлым шрифтом.

e	Эксцентриситет кеплеровой орбиты или земного эллипсоида
F	Гамильтониан, знак которого выбран в соответствии с правилом, принятым в астрономии (величина, обратная потенциалу; размерность $EM^{-1} = L^2T^{-2}$)
F	Сила (размерность LMT^{-2})
$F_{nmp}(i)$	Функция наклонности в коэффициентах членов, содержащих $(n-2p)\omega$ в аргументе возмущающей функции R_{nm}
f	Истинная аномалия кеплеровой орбиты (§ 1, 2, 4)
$\bar{f}$	Фокусное расстояние телескопа (§ 8, 9, 10, 12)
$\bar{f}$	Частота, выраженная в герцах или периодах на единицу времени $\omega/2\pi$ (§ 13)
f	Сжатие земного эллипсоида (§ 19 и гл. VI)
$\mathbf{f}$	Вектор свободных членов в матричных уравнениях погрешностей и условных уравнениях
G	Каноническое переменное Делоне $\sqrt{\mu a(1-e^2)}$
$G_{npq}(e)$	Функция эксцентриситета в коэффициенте при члене, содержащем $(n-2p+q)M$ в аргументе возмущающей функции R_{nm}
g	Каноническое переменное Делоне ω , аргумент перигея
g_e	Среднее значение ускорения силы тяжести на земном экваторе
H	Гамильтониан, знак которого выбран в соответствии с правилом, принятым в физике, равный минус F , только в уравнениях (22) и (23)
H	Каноническое переменное Делоне $\cos i \sqrt{\mu a(1-e^2)}$ (§ 1, 4)
H	Масштабная высота — $h_Q/(\partial p/\partial h)$ (§ 7)
h	Каноническое переменное Делоне Ω , долгота узла от равноденствия в уравнениях (26) и (28) и § 4
h	Постоянная площадей $r^2\dot{f} = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$ в уравнении (5) и § 4
h	Высота над поверхностью Земли (§ 7, 12)
i	Наклонность
$\mathbf{I}$	Единичная матрица
I	Сила света, количество энергии на стерадиан в единицу времени (размерность $ET^{-1} = L^2MT^{-3}$)
J_n, J_{nm}	Коэффициенты при — $(\mu a_e^n/r^{n+1}) \{P_n(\sin \varphi), P_{nm}(\sin \varphi) \cos m\lambda\}$ в разложении потенциала по сферическим гармоникам
K_{nm}	Коэффициент при — $(\mu a_e^n/r^{n+1}) P_{nm}(\sin \varphi) \sin m\lambda$ в потенциале
k	Постоянная Гаусса: $6,664 \cdot 10^{-8}$ единиц CGS, размерность $L^3M^{-1}T^{-2}$, (§ 2, 6, 7, 19)
k, h	Числа Лява: соответственно отношения приливного потенциала к возмущающему потенциалу и фактической высоты прилива к высоте равновесного прилива (§ 6, 12 и гл. VI)
k	Предел суммирования в R_{nm} : $(n-m)/2$ при четном n и $(n-m-1)/2$ при нечетном n (§ 6)

L	Каноническое переменное Делоне $\sqrt{\mu a}$
l	Каноническое переменное Делоне M , средняя аномалия
l	Радиус-вектор (l_1, l_2, l_3) в координатах, отнесенных к местной отвесной линии
M	Масса астрономического тела в уравнении (1) и § 6, 19, гл. VI
M	Средняя аномалия кеплеровой орбиты (§ 1, 2, 4, 6, 7, 8)
M	Матрица коэффициентов частных производных от наблюдений по параметрам для определения дифференциальных поправок
m	Масса небольшого тела: искусственного спутника, электрона и т. д. (§ 1, 7)
m	Отношение среднего движения возмущающего тела к разности этого движения и среднего движения спутника $n^*/(n-n^*)$ (§ 5)
m	Отношение центробежной силы к силе тяжести $\theta^2 a_e/g_e$ на экваторе (гл. V и VI)
m	Индекс порядка или вторичной волны сферической гармоники, $0 \leq m \leq n$ (§ 4, 6, 9, гл. VI)
n	Индекс степени или первичной волны сферической гармоники (§ 4, 6, 9, гл. VI)
n	Среднее движение в кеплеровской орбите (§ 1, 2, 4, 6, 7, 8)
n	Единичный вектор, нормальный к поверхности или к линии (в оскулирующей плоскости)
N	Электронная концентрация
N	Матрица частных производных от измеренных величин по векторным компонентам
n_2	Ускорение в среднем движении, n/n
O	Порядок величины
P_{nm}	Присоединенная функция Лежандра $P_{nm}(\sin\varphi)$
P	Период, $2\pi/n$ или цикл
P	Вектор импульса (количества движения) или действия в канонических переменных, например L, G, H (§ 1—7)
p	Радиус-вектор (p_1, p_2, p_3) в координатах, отнесенных к прямой наблюдатель—спутник (§ 8—10)
q	Радиус-вектор (q_1, q_2) в плоскости орбиты, отнесенный к линии апсид (§ 8—10)
q	Радиус-вектор или угол в канонических переменных, например l, g, h (§ 1—7)
R	Радиус кривизны (§ 12)
R	Возмущающая функция (§ 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9)
R_{nm}	Возмущающая функция, вызванная аномальным гравиметрическим членом — $(a_e^n/r^{n+1}) \mu P_{nm}(\sin\varphi) (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda)$ (§ 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9)
$R_i(\theta)$	Матрица вращения при вращении против часовой стрелки около оси i на угол θ
r	Радиус-вектор; направления осей координат заранее не устанавливаются (общий случай)
$r, r $	Расстояние по прямой

s	Расстояние вдоль кривой
S, S	Поток энергии, размерность $EL^{-2}T^{-1}=MT^{-3}$ (§ 7, 12)
S	Производящая или определяющая функция канонического преобразования (§ 1, 4)
$S_{nmpq}(\omega, M, \Omega, \theta)$	Множитель в члене с коэффициентами — μa_e^n (J_{nm}, K_{nm}) и содержащий аргумент $[(n-2p)\omega + (n-2p+q)M + m(\Omega-\theta)]$ в возмущающей функции R_{nm}
T	Кинетическая энергия
t	Время
t	Единичный вектор, касательный к кривой
U	Силовая функция, знак которой выбран в соответствии с правилом, принятым в астрономии (величина, обратная потенциалу: $-V$), размерность L^2T^{-2}
u	Радиус-вектор (u, v, w) или (u_1, u_2, u_3) в закрепленных относительно Земли геодезических координатах, отнесенных к полярной оси и гринвичскому меридиану
V	Потенциал, знак которого выбран в соответствии с правилом, принятым в физике (размерность L^2T^{-2})
v	Скорость $ \mathbf{r} $ (§ 1, 12)
v	Полярный угол, измеренный в плоскости орбиты от фиксированной точки (§ 4)
W	Матрица ковариаций
x	Радиус-вектор (x, y, z) или (x_1, x_2, x_3) в инерциальных координатах, отнесенных к полярной оси и весеннему равноденствию
y	Вектор поправок к измерениям при уравнивании по способу наименьших квадратов
z	Вектор поправок к параметрам при уравнивании по способу наименьших квадратов
z	Зенитное расстояние (§ 12)
z	Нормированная высота $(h-h_0)/H$ (§ 13)
α	Прямое восхождение
β	Влияние Солнца на среднее расстояние до Луны (§ 5)
β	Вертикальный градиент масштабной высоты $\partial H / \partial h$ (§ 7)
γ	Синус полунаклонности, $\sin i/2$
δ	Склонение
ε	Высота прилива
θ	Гринвичское звездное время
α	Альбедо (характеристика отражательной способности)
λ	Долгота, отсчитываемая против часовой стрелки от гринвичского меридиана (§ 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 19)
λ	Длина волны света (§ 12)
μ	Гауссова постоянная, умноженная на массу: kM , размерность L^3T^{-2} (§ 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 19, гл. VI)

μ	Показатель преломления (§ 12)
π	Индекс, относящийся к перигею
ρ	Плотность (§ 7, 12)
ρ, σ, α или λ	Эллипсоидальные координаты (§ 4, 19)
Φ	Фазовый угол
φ	Широта
Ω	Долгота узла кеплеровой орбиты, отсчитываемая от весеннего равноденствия
ω	Аргумент перигея кеплеровой орбиты, отсчитываемый от узла (§ 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9)
ω	Частота в радианах на единицу времени, $2\pi f$ (§ 12)

ОБЩИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

' "	Штрихи обозначают параметры или координаты промежуточной орбиты, например a', e', F', p', x'
*	Звездочка обозначает параметры или координаты возмущающего тела, как, например, Солнца или Луны: a^*, X^*, μ^*
o	Нулевой индекс обозначает величины, вычисляемые на момент относимости (эпоху) или координату относимости, например a_0, a'_0, x_0, h_0, u_0
• ..	Точки сверху обозначают полные производные по времени, например $\dot{x}, \dot{x}$
—	Черточка сверху обозначает средние значения относительно определенного промежутка времени, например $\bar{x}, \bar{x}'$
T, S, D	Эти индексы обозначают координаты, начало отсчета которых находится соответственно на земной поверхности, на спутнике и в произвольном начале геодезической системы относимости

ВВЕДЕНИЕ

Определим «космическую геодезию» * как раздел геодезии, в котором решение ее основных задач достигается путем использования внеземных, но достаточно близких к Земле объектов, направления на которые поэтому существенно зависят от положения наблюдателя на Земле. Эти задачи состоят в определении внешнего гравитационного поля и формы Земли (включая их вариации в пространстве и времени), а также в определении положения точек в системе относимости, жестко связанной с Землей.

Определим *внеземной объект* как объект, высота которого (скажем, более 40 км) достаточно велика, чтобы он не поддерживался атмосферой; в качестве внешней границы интересующей нас зоны примем расстояние до Луны (около 400 000 км).

* Дословный перевод термина *celestial geodesy*, равно как и совпадающего с ним названия книги, — *небесная геодезия*. Однако, несмотря на существование давно уже устоявшегося термина *небесная механика*, мы предпочли термин *космическая геодезия*.

Еще недавно слова *космос* и *вселенная* применялись как синонимы, но в связи с широкими исследованиями околоземного пространства понятие *космос* все больше противопоставляется понятию *вселенная*. Под словом *космос* все более понимается именно околоземное пространство. Поэтому использование искусственных спутников Земли, а также и наблюдений Луны в геодезических целях целесообразно назвать *космической геодезией*. Здесь уместно указать на аналогию с другим недавно появившимся термином *космическая медицина*. — *Прим. перев.*

Наша цель состоит в первую очередь в использовании внеземных объектов для решения указанных выше геодезических задач. Эта цель, однако, приводит к необходимости уделять значительное внимание учету влияния атмосферы, других небесных тел, электромагнитных полей и т. д. на внеземные объекты (и на результаты их наблюдений) по той же причине, по какой в обычной геодезии необходимо уделять внимание атмосферной рефракции.

План предлагаемого обзора:

1. Динамика спутников Земли, включая общие принципы и вопросы, представляющие основной геодезический интерес — влияние гравитационного поля Земли на орбиты спутников и влияние других физических явлений, действие которых при этом считается вероятным.

2. Соответствующие геометрические соотношения, включая спецификации параметров спутников и орбит, а также конфигурации сети точек наблюдений, приводящие к оптимальным результатам.

3. Техника наблюдений.

4. Сопоставление и совместное использование результатов «космических» и «наземных» наблюдений;

5. Геофизические выводы из результатов геодезических наблюдений, полученных до настоящего времени «космическим» путем.

Особое внимание в этом обзоре уделено динамическим аспектам, поскольку они приводят к наиболее интересным с научной точки зрения результатам, а также потому, что наиболее эффективное и экономичное решение геометрических (и гравитационных) задач требует использования орбит.

Наиболее всесторонние исследования в области космической геодезии выполнены Вейсом [1]. Более общие вопросы рассматриваются в работах [2, 3 и 4]. В недавно вышедшей работе Беррота и Хофманна [5] приведено наиболее полное изложение вопросов использования наблюдений Луны.

Настоящий обзор был написан в начале 1961 г. и дополнен в июле 1961 г. наиболее интересными для геодезии данными.



Небесная механика представляет собой раздел классической механики, которому в прошлом уделяли значительное внимание наиболее компетентные математики и который в настоящее время успешно развивается как в понимании фундаментальных принципов этой науки, так и в способах их практического применения. Поскольку наиболее интересной для космической геодезии является проблема движения близкого спутника в гравитационном поле сжатой планеты и поскольку геодезисты желают получить как можно больше информации о гравитационном поле, используя данные по орбитам близких спутников, имеет смысл детально изучить современную литературу о фундаментальных принципах классической механики, как, например, [6, 7, 8, 283, 284, 285]. В специальной литературе по небесной механике [9, 10, 11, 12, 286] сделан меньший упор на математические принципы и больший упор на технические приемы астрономии. Ни в одном из указанных источников не рассмотрена проблема близкого спутника, однако ей уделено значительное внимание в более современной литературе [13, 14, 15]. Из указанной литературы наилучшее сочетания ясности и полноты изложения, по-видимому, дано в [9] и [15].

Геометрические границы интересующей нас зоны, указанные во Введении, определяют динамическую проблему космической геодезии как проблему движения по возмущенной кеплеровой орбите, т. е. эллиптической ор-

бите частицы с пренебрегаемо малой массой в центральном силовом поле,

$$F_r = -kM m/r^2, \quad (1)$$

с отклонениями порядка не более 1 : 100 от действия центральной силы. Вблизи нижней границы интересующей нас зоны наиболее существенные отклонения возникают вследствие нецентральных членов гравитационного поля Земли и вследствие влияния земной атмосферы, а в районе верхней границы — вследствие влияния Солнца и Луны.

Рассмотрим сначала некоторые общие принципы и способы решения проблемы, а затем специальные интересующие нас вопросы, для того чтобы получить наиболее точное эффективное решение и глубже понять физическую сущность явления. Современные вычислительные машины уменьшили значение первой, но не второй цели.

§ 1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Динамические принципы

Положение спутника, движущегося по орбите, может быть выражено в любой момент времени его радиусом-вектором $\{x, y, z\}$ и вектором скорости $\{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$, отнесенными к инерциальному пространству с началом в центре Земли. Эти шесть параметров могут быть преобразованы в шесть параметров кеплерова эллипса с одним из фокусов в начале координат

$$\{a, e, i, \Omega, \omega, f\}.$$

Соотношение между этими параметрами и связанными с Землей координатами $\{u, v, w\}$ показано на рисунке.

В сумме углов $\omega + f$ угол ω есть аргумент перигея — угол от восходящего узла Ω до перигея, т. е. до точки эллипса, ближайшей к началу координат; f — истинная аномалия; ω — угол от перигея до спутника. Другие способы выражения аномалии спутника ([9], стр. 23—24), ([15], стр. 17—25):

посредством эксцентрической аномалии E

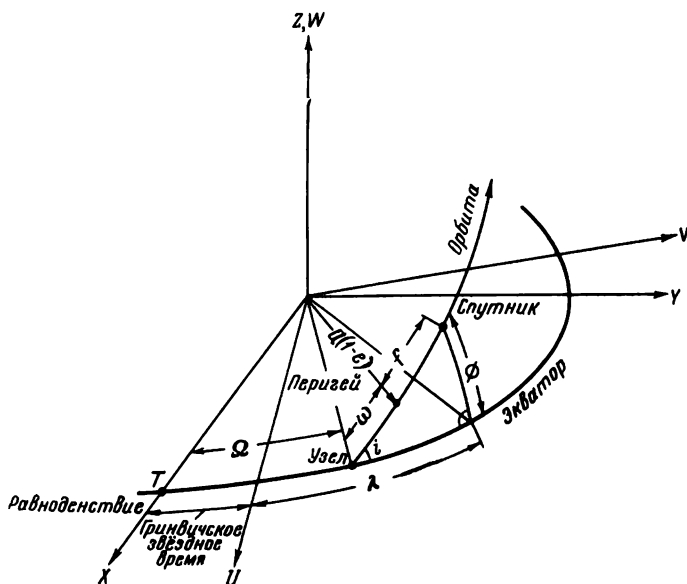
$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{f}{2} \quad (2)$$

и средней аномалии M

$$M = E - e \sin E \quad (3)$$

(уравнение Кеплера).

Дальнейшие полезные соотношения для эллиптического движения ([9], стр. 19—24) указаны в уравнениях (4) — (9), в которых вместо kM уравнения (1) использовано обозначение μ .



Орбита и системы координат

Уравнение энергии

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (4)$$

Интеграл площадей (второй закон Кеплера)

$$h = r^2 \dot{f} = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}. \quad (5)$$

Среднее движение (третий закон Кеплера)

$$n = \dot{M} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \quad (6)$$

Из уравнений (3), (5) и (6) следуют:

$$dM = \frac{r^2}{a^2 \sqrt{1-e^2}} df = (1 - e \cos E) dE; \quad (7)$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} = a(1 - e \cos E); \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} df &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos E} dE \\ dE &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e \cos f} df \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Замкнутое соотношение между f и M невозможно. Разложения в ряды для этого и других соотношений приводятся в специальной литературе, см., например, ([9], стр. 33—48), ([15], стр. 71—81). Большое число формул, особо пригодных к спутникам, дается в [16] и [286].

Эллиптическое движение, описываемое уравнениями (2)—(9), имеет место при движении частицы с пренебрегаемо малой массой в центральном поле, описываемом уравнением (1). Центральная сила может быть выражена через производную скалярного потенциала

$$\left. \begin{aligned} F_r &= -m \frac{\partial V}{\partial r} \\ V &= -\frac{\mu}{r} \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Уравнения (10) выписаны в соответствии с правилом знаков, принятым для V в физике. В астрономии и геодезии принято противоположное правило знаков, в связи с чем там используется величина, противоположная потенциалу, которую иногда называют силовой функцией

$$\left. \begin{aligned} F_r &= m \frac{\partial U}{\partial r} \\ U &= \frac{\mu}{r} \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

* Это утверждение ошибочно. Обратное соотношение, представляющее f как явную функцию M , в замкнутой форме действительно невозможно. — *Прим. ред.*

В дальнейшем, следуя принятому в физике правилу, см. уравнения (10), будем применять обозначение V для потенциала, а следуя принятому в астрономии правилу, см. уравнения (11), — обозначение U для силовой функции.

Эллиптическая орбита имеет место при решении уравнений движения

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = -m\nabla V = m\nabla U. \quad (12)$$

Здесь $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$.

Все усложнения и представляющие интерес следствия обусловлены наличием небольшого отклонения (R) потенциала от форм (10) или (11):

$$\left. \begin{aligned} V &= -\frac{\mu}{r} - R \\ U &= \frac{\mu}{r} + R \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

Наиболее существенные части, составляющие R , таковы:

1. Возмущения, вызванные сжатием Земли,

$$R_2 = -\frac{\mu a_e^2}{r^3} J_2 P_2(\sin \Phi), \quad (14)$$

где a_e — экваториальный радиус Земли;
 $J_2 \approx 1 : 1\,000$ — параметр, характеризующий сжатие Земли;

$P_2(\sin \varphi)$ — полином Лежандра второго порядка.

2. Возмущения, вызванные гравитационным действием Солнца или Луны ([9], стр. 254), ([15], стр. 308),

$$R_s = \mu^* \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|} - \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}^*}{r^{*3}} \right], \quad (15)$$

где отмеченные звездочками величины относятся к возмущающему телу (Солнцу или Луне) в геоцентрической системе координат.

3. Возмущения, вызванные действием торможения, производимого атмосферой, и зависящие более от скорости, чем от положения,

$$R_d = -\frac{b(r)}{3} |\dot{\mathbf{r}}|^3 \quad (16)$$

и от сил, получаемых дифференцированием по скорости

$$F_{d,i} = +m \frac{\partial R_d}{\partial \dot{r}_i} = -mb(r) \dot{r}_i |\dot{\mathbf{r}}|. \quad (17)$$

Выводы влияний R_2 , R_s и R_d , включающие определение функции $b(r)$, рассматриваются соответственно в § 4, 5 и 7.

Рассмотрим сначала некоторые общие принципы и методы исследования уравнения движения (1), принимая потенциал в форме (13), с тем, чтобы воспользоваться небольшой величиной отклонения движения от кеплерова эллипса, см. уравнения (2) — (9).

Кинетическая энергия определяется как

$$T = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2. \quad (18)$$

Количество движения (импульс) выражается как

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i} = m \dot{r}_i. \quad (19)$$

Принимая $m=1$ и $q_i=r_i$, получаем

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i} = \dot{q}_i, \quad (20)$$

а из уравнения (12)

$$\ddot{r}_i = \dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (21)$$

Принимая $R_d=0$, можно определить гамильтониан

$$H = T + V \quad (22)$$

и получить канонические уравнения

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \right\}. \quad (23)$$

Шесть дифференциальных уравнений первого порядка (23) заменяют три дифференциальных уравнения второго порядка (12).

Имея в виду правило знаков, принятое в астрономии, заменим H через F :

$$F = U - T \quad (24)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i &= - \frac{\partial F}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= \frac{\partial F}{\partial q_i} \end{aligned} \right\}. \quad (25)$$

Существует большое число систем канонических переменных p_i, q_i , которые могут быть использованы в уравнениях (23) или (25). Наиболее близка к кеплеровым элементам система, предложенная Делоне ([9], стр. 152), ([15], стр. 290)

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= L = \sqrt{\mu a}, & q_1 &= l = M \\ p_2 &= G = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}, & q_2 &= g = \omega \\ p_3 &= H = \cos i \sqrt{\mu a (1 - e^2)}, & q_3 &= h = \Omega \end{aligned} \right\}. \quad (26)$$

Из уравнений (4), (13), (18), (24), (26) следует

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} + R. \quad (27)$$

Если эксцентриситет или наклонность орбиты приближаются к нулю (теряют смысл соответственно равенства $g = \omega$ или $h = \Omega$), то полезна другая система канонических переменных ([15], стр. 240):

$$\left. \begin{aligned} L, & \quad l + g + h \\ G - L, & \quad g + h \\ H - G, & \quad h, \end{aligned} \right\}. \quad (28)$$

При использовании уравнений (26) и (27) для перехода от канонических к кеплеровым переменным и определения n из уравнения (6) получаются уравнения движения, содержащие кеплеровы элементы ([9], стр. 147), ([15], стр. 289):

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{a} &= \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial M} \\
 \dot{e} &= \frac{1-e^2}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega} \\
 \dot{\omega} &= - \frac{\cos i}{na^2 \sin i \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\
 \dot{\Omega} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} \\
 \dot{M} &= n - \frac{1-e^2}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial a}
 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Уравнения (29) представляют простейшее средство для вывода в первом приближении влияния возмущающей функции R на орбитальные элементы. Также могут быть получены аналогичные уравнения, выражающие возмущающую силу через радиальную, трансверсальную и нормальную компоненты ([9], стр. 151), ([15], стр. 301). Однако при втором приближении, которое необходимо для R_2 в случае близкого спутника и для R_s в случае удаленного спутника, преобразования при использовании уравнений (29) становятся чрезвычайно сложными. Поэтому возвратимся к каноническим уравнениям (25), соблюдая при этом принятое в астрономии правило знаков.

Во-первых, обобщим канонические уравнения увеличением на единицу размерности каждого из векторов p, q :

$$\left. \begin{aligned}
 p_4 &= t \\
 q_4 &= - \int \frac{\partial (F + q_4)}{\partial t} dt
 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Новые компоненты удовлетворяют уравнениям (25), где вместо F используется $F + q_4$.

Это обобщение аналогично преобразованию уравнения поверхности из формы $z = f(x, y)$ к форме $F(x, y, z) = 0$. Оно необходимо при использовании (отрицательных) гамильтонианов F , явно зависящих от времени, и, кроме того, желательно вообще, поскольку бо-

лее симметричная форма приводит к облегчению понимания процесса решения.

Если может быть найдена орбита, называемая промежуточной, для которой известно решение канонических уравнений (25) в координатах (p', q') , близких в любой заданный момент времени к координатам (p, q) фактической орбиты, то решение для фактической орбиты может быть выражено через решение для промежуточной орбиты плюс разложение в ряд Тейлора по степеням небольшого отклонения (p', q') от (p, q) . Эта промежуточная орбита может быть определена так, что для нее гамильтониан F' окажется функцией только количеств движения (импульсов) p'_i .

Тогда из уравнений (25) последует

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}'_i &= \frac{\partial F'}{\partial q'_i} = 0, & p'_i &= \text{const} \\ \dot{q}'_i &= \frac{\partial F'}{\partial p'_i} = \text{const}, & q'_i &= q'_{i0} + \text{const}(t - t_0) \end{aligned} \right\}. \quad (31)$$

Чтобы промежуточная орбита оставалась вблизи фактической, ее гамильтониан F' должен быть равным постоянной части гамильтониана F фактического движения (или, если принимается во внимание торможение, должен быть равным секулярно меняющейся части F ; это усложнение здесь учитываться не будет)

$$F'(p') = F(p, q) - \int \frac{\partial U_p}{\partial t} dt = F - \int \frac{\partial R_p}{\partial t} dt. \quad (32)$$

Здесь $U_p = R_p$ — часть силовой функции (отрицательный потенциал), периодически и явно зависящая от времени.

Оба эти гамильтониана раскладываются в ряды, причем основной член F также является функцией только импульсов

$$\begin{aligned} F'_0(p') + F'_1(p') + F'_2(p') + \dots &= F_0(p) + F_1(p, q) + \\ &+ F_2(p, q) + \dots - \int \frac{\partial R_p}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь индексы 0, 1, 2, ... указывают порядок, до которого параметры, характеризующие возмущающую функцию R , появляются в соответствующих членах в качестве коэффициентов (например, степени J_2 в случае R_2 или степени отношения n^*/n среднего движения Солнца к среднему движению спутника в случае R_s).

Для того чтобы действия, приводящие к уравнениям (31)—(33), были возможны, необходимо выбрать координатную систему, в которой преобладающая часть F_0 гамильтониана выражалась бы только через импульсы, как, например, в координатах Делоне [см. уравнения (26) или (28)], приводящих к уравнению вида (27) для F .

Задача теперь такова: по данным на любой момент времени каноническим переменным (p', q') найти переменные (p, q) фактической орбиты на тот же момент времени, т. е. произвести каноническое преобразование

$$(p', q') \rightarrow (p, q) \quad (34)$$

таким методом, который был бы столь возможно последовательным и простым.

В основном (не единственном) методе, восходящем к Цейпелю [17], употребляется произвольная функция $S(p, q, p', q')$, называемая производящей или определяющей. Поскольку ввиду уравнений (25), (3) и (33) две из четырех систем p, q, p', q' оказываются функциями двух других, S может быть выражено в функции только двух из этих систем. Наиболее часто употребляется функция вида

$$S = S(p', q). \quad (35)$$

Тогда две другие системы переменных определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i} \\ q'_i &= \frac{\partial S}{\partial p'_i} \end{aligned} \right\}. \quad (36)$$

Здесь S разлагается в ряд способом, аналогичным способу разложения F и F' ,

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + \dots, \quad (37)$$

где индексы имеют то же значение, что и в уравнении (33).

S_0 здесь должно иметь такой вид, чтобы в невозмущенном случае (т. е. при $S_1=0$, $S_2=0$ и т. д.) было $p_i = p'_i$, $q_i = q'_i$, т. е.

$$S_0 = \sum_i q_i p'_i. \quad (38)$$

Подставим уравнение (38) в уравнение (37), продифференцируем по q_i , p'_i и подставим в уравнение (36):

$$\left. \begin{aligned} p_i &= p'_i + \frac{\partial S_1}{\partial q_i} + \frac{\partial S_2}{\partial q_i} + \dots \\ q_i &= q'_i - \frac{\partial S_1}{\partial p'_i} - \frac{\partial S_2}{\partial p'_i} - \dots \end{aligned} \right\}. \quad (39)$$

Подстановка $p_4 = p'_4$ и $q_4 = q'_4$ из уравнения (30) в уравнение (39) и сравнение с уравнением (32) дает

$$F' = F - \frac{\partial S}{\partial t} \quad (40)$$

и

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \int \frac{\partial R_p}{\partial t} dt.$$

Уравнение (40) является формой уравнения Гамильтона — Якоби. В других формах этого уравнения в левой части появляется 0, а F выводится из уравнений (18), (24) и (36) в виде

$$F = U - \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \right)^2.$$

Разложим F в уравнении (33) в ряд Тейлора по $(p_i - p'_i)$, $(q_i - q'_i)$, $i=1, 2, 3$ и подставим значения

этих разностей из уравнений (39), суммируя повторяющиеся индексы от 1 до 3 во всех произведениях:

$$\left. \begin{aligned} F - \frac{\partial S}{\partial t} = F_0(p') \\ + \frac{\partial F_0}{\partial p'_i} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial q_i} + \dot{F}_1(p', q') - \frac{\partial S_1}{\partial t} \\ + \frac{\partial F_0}{\partial p'_i} \cdot \frac{\partial S_2}{\partial q_i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 F_0}{\partial p'_i \partial p'_j} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial q_j} \\ + \frac{\partial F_1}{\partial p'_i} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial q_i} - \frac{\partial F_1}{\partial q'_i} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial p'_i} \\ + F_2(p', q') - \frac{\partial S_2}{\partial t} + \dots \end{aligned} \right\} = \\ = \left\{ \begin{aligned} &F'_0 \\ &+ F'_1 \\ &+ F'_2 \\ &+ \dots \end{aligned} \right\}. \quad (41)$$

Приравняв члены равного порядка в F и F' . Полученные уравнения определяют члены в S , а поскольку F' может содержать только p'_i , то любые члены с q_i в разложении F (включая те члены, которые в явной форме зависят от времени, если они есть) должны быть учтены членами в S . Например, разобьем F_1 на две части

$$F_1 = F_{1s}(p') + F_{1p}(p', q'). \quad (42)$$

Тогда

$$F'_1 = F_{1s}(p') \quad (43)$$

и

$$\frac{\partial S_1}{\partial q_i} = - \frac{1}{\partial F_0 / \partial p'_i} F_{1p}(p', q'). \quad (44)$$

Для получения члена первого порядка в разложении p_i производная $\partial S_1 / \partial q_i$ из уравнения (44) непосредственно используется в уравнении (39); для получения члена первого порядка в разложении q_i из уравнения

(39) уравнение (44) сначала интегрируется по q_i , а затем дифференцируется по p'_i . Производные $\partial S_1/\partial q_i$, $\partial S_1/\partial p'_i$ используются также в члене второго порядка уравнения (41) для оценки S_2 , F'_2 для второго приближения и т. д. Затруднение здесь обычно состоит в нахождении интегрируемых производных $\partial S_1/\partial q_i$, $\partial S_2/\partial q_i$.

Предшествующие выводы имели целью выявить те свойства теории орбит, которые помогают лучше понять применение основных методов к определению орбит спутников. Однако классическая динамика располагает многими различными способами решения одной и той же задачи и допускает различные толкования одних и тех же математических преобразований. Например, в предыдущих выводах было рассмотрено каноническое преобразование $(p', q') \rightarrow (p, q)$ как перемещение из одной точки в другую. Это преобразование может также рассматриваться как преобразование координат одной и той же точки из одной системы координат (p', q') в другую (p, q) . Канонические уравнения (25) и производящая функция S из уравнения (35) — специальные случаи более общих форм. Канонические уравнения не обязательно должны иметь независимым переменным время; может быть использован любой произвольный параметр ω , для которого известна производная $d\omega/dt$. Производящая функция S относится к общей категории интегралов действия

$$A = \int p_i dq_i, \quad (45)$$

в которые включаются p_4 , q_4 , определяемые уравнением (30). Так, например, принцип Гамильтона утверждает, что при интегрировании от данных начальных координат в пределах любого промежутка времени частица будет двигаться так, что значение интеграла постоянно. Иначе говоря, при любом малом произвольном изменении пути интегрирования $\delta A = 0$, откуда могут быть выведены уравнения движения (12). A здесь равно также интегралу от лагранжиана $L = T + U$ по времени в пределах того же промежутка. Об этих и других методах см. ([6], стр. 1—39, 215—317), ([8], стр. 98—197), ([9], стр. 129—157, 177—206), ([15], стр. 273—306, 530—562), [18].

Характеристики методов решения

Если принять во внимание соображения, рассмотренные выше, то при решении любой задачи, касающейся спутников, в явной или неявной форме должны быть сделаны следующие операции (не обязательно строго в том же порядке, как указано ниже):

1. Выбор системы координат.
2. Выбор независимого переменного.
3. Разложение возмущающей функции в выбранной системе координат и с выбранным независимым переменным.
4. Запись уравнений движения в выбранной системе координат и с выбранным независимым переменным.
5. Выбор промежуточной орбиты либо решение основной части уравнений движения.
6. Определение постоянных интегрирования.
7. Разложение и интегрирование уравнений движения способом, подходящим для определения положения и (или) скорости на любой момент времени.

Попытаемся описать основные методы выполнения каждой из этих операций для дальнейшего сравнения различных решений проблемы спутника.

1. Система координат. Логично за начало координат выбрать центр массы Земли. Для проблемы движения Луны влияние ощутимой массы Луны на положение центра тяжести системы Земля — Луна учитывается коэффициентом простого вида, вводимым в силовую функцию, отнесенную к центру Земли ([9], стр. 254—257), ([15], стр. 310—311), ([19], стр. 2—8).

Одна из координатных плоскостей логически определяется либо основной возмущающей функцией (эклиптика для R_s , экватор для R_2), либо возмущаемым телом (плоскость промежуточной орбиты), а направления осей в этой плоскости определяются по произвольно выбранной точке (точка весеннего равноденствия для эклиптики или экватора, восходящий узел или начальная точка в плоскости орбиты), либо оси принимаются вращающимися так, как это требуется основной возмущающей функцией.

Использованные до сего времени типы координат включают прямоугольные, сферические и эллипсоидальные, так же как и кеплеровы и канонические, элементы орбит.

2. Независимое переменное. Как было указано ранее, время может быть заменено любым произвольным параметром ω , для которого известна производная dw/dt . В некоторых теориях используется истинная аномалия f или эксцентрическая аномалия E с тем, чтобы для приближений каждого порядка сохранить замкнутые выражения для возмущающей функции и ее влияний. Как было упомянуто, замкнутое соотношение между f и M или t невозможно*, а уравнение Кеплера, соотносящее M и E , трансцендентно относительно E . В любой теории, использующей один из этих параметров вместо времени, необходимо принять предосторожности для различения параметра при его появлении в качестве независимого переменного от его появления в качестве координаты.

3. Разложение возмущающей функции. Для близких спутников аналитическое разложение потенциала Земли по сферическим или эллипсоидальным гармоникам предпочтительнее ввиду двойного затухающего влияния экстраполяции на высоту и на интегрирование уравнений движения даже для численного интегрирования. Преобразование к координатам, отнесенным к орбите, производится прямым, хотя и утомительным методом (см. § 4 и 6). Разложение лунного или солнечного возмущения более сложно, поскольку включает две системы периодов (см. § 4 и 5).

4. Уравнения движения. На форму этих уравнений в сильной степени влияет выбор системы координат и промежуточной орбиты. Изменения в привычной инерциальной прямоугольной или сферической координатной форме могут произойти при использовании вращающихся систем координат вследствие возникновения кориолисовых членов и членов, зависящих от центробежной силы, либо при разделении влияний, действующих в орбитальной плоскости, от влияний, действующих на орбитальную плоскость, либо при использовании вспомогательной функции, например типа интеграла действия (45), либо, наконец, при переходе к уравнению относительно малых отклонений от промежуточной орбиты.

5. Промежуточная орбита. Промежуточные орбиты могут быть двух типов:

* См. прим. ред. на стр. 18.

I — динамические промежуточные орбиты, определяемые членами, зависящими от потенциала или силовой функции и учитываемыми в точно определяемых орбитах, как, например, в орбите, соответствующей уравнению (31);

II — геометрические промежуточные орбиты, которые вводятся так, что устанавливаемые для них параметры и скорости изменения последних не обязательно соответствуют орбите, выводимой из любого возможного потенциала.

Методу решения может соответствовать более чем одна промежуточная орбита, причем каждая из них характеризует различную стадию решения (разделение короткопериодических вариаций от долгопериодических или вариаций в плоскости орбиты от вариаций этой плоскости).

6. Постоянные интегрирования. Наиболее четкое определение орбиты в любой теории достигается шестью независимыми постоянными интегрирования — обычно тремя постоянными импульсами (p_{i0}) и тремя постоянными положениями (q_{i0}) в определенный момент времени t_0 . Простейшими по идее являются импульсы и положения действительной орбиты на данную эпоху, выраженные либо в прямоугольных координатах, либо в оскулирующих кеплеровых элементах. Однако в математической практике намного удобнее определять постоянные относительно промежуточной орбиты, поскольку параметры последней либо постоянны, либо меняются медленнее, чем параметры действительной орбиты. С математической точки зрения очевидным является выбор постоянных частей координат p_{i0} и вековой переменной части координат местоположения q_{i0} на данную эпоху. Однако во многих теориях координаты p_{i0} вводятся так, что они легко определяются по наблюдению координат положения: большая полуось a_0 (или ее канонический эквивалент L) определяется по среднему движению из уравнения (6) или по видоизмененной форме последнего, эксцентриситет e_0 (или G) — по коэффициенту при $\sin E$ или $\sin f$ периодической вариации средней долготы $\Omega + \omega + M$ или средней аномалии, как, например, в уравнении (3), и наклонность i — по коэффициенту при $\sin(\omega + f)$ или аналогичной

вариации в синусе склонения или широты из прямо-угольного сферического треугольника орбита-меридиан-экватор (см. рисунок на стр. 17)

$$\sin \varphi = \sin i \sin (\omega + f). \quad (46)$$

Шесть постоянных интегрирования в соответствии со сказанным выше определяются в произвольный момент времени t_0 , однако эпоха также может быть задана произвольным значением любой из трех переменных, обладающих вековой вариацией M , ω и Ω (или l , g , h), или их соотношением. Существуют теории, в которых эпоха определяется уравнением $M=0$. В других теориях эпоха определяется частным значением широты спутника. Для последнего определения из уравнения (46) можно получить

$$f_0 = \arcsin \frac{\sin \varphi_0}{\sin i} - \omega. \quad (47)$$

Таким образом, в подобных теориях могут появиться периодичности $(k \pm j) \omega$ взамен периодичностей $(jf + k\omega)$, которые имеют место в теориях, определяющих эпоху по времени. Определение эпохи по M , ω и Ω или по отношениям между ними часто связывается с использованием M (или E , или f) в качестве независимого переменного и сопряжено с риском смешения понятий ввиду двойного употребления одной и той же величины в качестве координаты местоположения и в качестве независимого переменного.

Постоянные интегрирования рассматриваются в ([15], стр. 411—413), ([19], стр. 115—124) и в [20].

7. Разложение уравнений движения и интегрирование. Обычный метод состоит в разложении в буквенный ряд способом последовательных приближений, подобным описанному в уравнениях (31)—(44). Результат состоит в выражении координат и компонент скорости через постоянные интегрирования, разложенные в ряд, а также через параметры потенциального поля и независимую переменную либо через промежуточные функции. Подобное разложение может быть существенно сжато, если вместо теоретической вековой скорости изменения переменной местоположения подставить численное значение скорости, основанное на наблюдениях. Эта процедура особо приложима в случае Луны, для которой уклонение от точной механики

Ньютона невелико и может быть отделено при исследовании наблюдений. Разложение может быть сжато еще больше, если допустить формы, пригодные для итеративного решения, как, например, если переменная p_i выражена в виде

$$p_i = p'_i [1 + \varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{q})], \quad (48)$$

где $\varepsilon \ll 1$.

Наконец, разложение, разумеется, может быть полностью сжато к собственно уравнениям движений, если с самого начала применять численное интегрирование. Однако для каждой из описанных выше операций различные периодичности, взаимодействия и т. д. становятся менее заметными. Поэтому достижение второй цели теории, т. е. достижение более отчетливого понимания физической природы явления, становится более затруднительным.

Прежде чем приложить предыдущие соображения к различным разработанным теориям спутников, рассмотрим два метода весьма общего применения: метод эмпирических орбит и метод численного интегрирования.

§ 2. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ

Как показывают уравнения (31), если преобладающая часть (отрицательного) гамильтониана $F = U - T$ может быть выражена только через импульсы p_i , то каждая каноническая переменная может быть представлена как константа плюс периодические члены плюс (для переменных местоположения) вековой член. Это же справедливо для кеплеровских элементов $a, e, i, M, \omega, \Omega$. Следовательно, если бы существовало чисто ньютоново физическое положение, то точно наблюдаемые вариации кеплеровой орбиты могли бы быть полностью учтены эмпирическими рядами Фурье:

$$\begin{pmatrix} a \\ e \\ i \\ M \\ \omega \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ e_0 \\ i_0 \\ M_0 \\ \omega_0 \\ \Omega_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ n \\ \dot{\omega} \\ \dot{\Omega} \end{pmatrix} (t - t_0) + \left| \right.$$

$$\left. \begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} C_{ak} \\ C_{ek} \\ C_{ik} \\ C_{Mk} \\ C_{\omega k} \\ C_{\Omega k} \end{Bmatrix} \cos [\alpha_k (t - t_0)] + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} S_{ak} \\ S_{ek} \\ S_{ik} \\ S_{Mk} \\ S_{\omega k} \\ S_{\Omega k} \end{Bmatrix} \sin [\beta_k (t - t_0)]
\end{aligned} \right\}. \quad (49)$$

Поскольку, как описано в § 4 и 6, гравитационные вариации, представляющие интерес для геодезии, появляются в орбите в форме периодических или вековых изменений известной частоты, то удобнее всего их вычислять по эмпирически определенным величинам C и S уравнения (49).

Методы вывода эмпирических орбит по наблюдениям спутников были весьма широко развиты на смитсоновской астрофизической обсерватории Вейсом и его сотрудниками в соответствии с программой дифференциального исправления орбит ([1], стр. 135—144), [21]. Поскольку действительное физическое положение нельзя считать чисто ньютоновым положением в абсолютном пространстве, то для учета торможения и других вариаций добавляются полиномиальные, экспоненциальные и гиперболические члены.

Полное выражение, возможное для каждого орбитального элемента F_i , таким образом, имеет форму

$$\begin{aligned}
E_i \sum_j & \left[P_{ij} (t - t_0)^j + S_{0ij} \sin \{ S_{1ij} + S_{2ij} (t - t_0) \} + \right. \\
& \left. + E_{0ij} e^{E_{1ij}(t-t_0)} + H_{0ij} (H_{1ij} - t)^{H_{2ij}} \right]. \quad (50)
\end{aligned}$$

Кроме того, вариации определяются не совершенно точно. Во-первых, программа разработана для приложения к наблюдениям направлений. Поэтому большая

полуось не включена в элементы, исследуемые уравнением (50), а принимается из вычислений по наблюдаемому среднему движению $\bar{n}$ с использованием уравнения (63). Во-вторых, наблюдения обычно производятся с частотой, которая заметно меньше частоты обращения спутника по орбите, так что вместо короткопериодических вариаций частоты n , $2n$ и т. д. ([22], стр. 31—33) могут быть получены ложные долгопериодические вариации. Таким образом, короткопериодические вариации, вызванные сжатием J_2 , вычисляются по формулам Козаи [23] и исключаются до исследования по уравнению (50).

Эмпирические орбиты регулярно вычисляются смитсоновской астрофизической обсерваторией и публикуются в их серии «Исследования по космическим наукам, специальные отчеты» (*Research in Space Science, Special Reports*).

§ 3. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

При наличии достаточных вычислительных средств простейшее решение динамической проблемы состоит в численном интегрировании уравнений движения (12) в прямоугольных координатах при помощи одного из стандартных методов решения систем обычных дифференциальных уравнений высшего порядка ([24], стр. 261—306), ([25], стр. 375—411). В астрономии численное решение в инерциальных прямоугольных координатах обычно известно как метод Кауелла. Он описан в ([9], стр. 218—222), ([12], стр. 89—91), ([15], стр. 169—175). Численное интегрирование в прямоугольных координатах — наиболее широко применяемый метод, и программы для этого метода (применяемого либо в качестве основного, либо для контроля программы, основанной на общей теории) имеются во всех вычислительных центрах, занимающихся вычислением орбит.

Приемы численного интегрирования, имеющие, вероятно, наиболее широкое применение в США, — это приемы, разработанные Каннингемом и в существенной части описанные Винопом и Бреди [26]. Для сохранения точности, достаточной для геодезического применения в течение нескольких недель, требуется код двойной точности (т. е. код, содержащий более восьми значащих

десятичных цифр), а шаг интегрирования для близкого спутника должен быть равен 2 мин или менее. В [26] используются центральные разности вплоть до десятого порядка. Итеративная оценка интегралов служит для переноса компонентов положения и скорости вперед на девять последовательных шагов, после чего производится контроль путем вычисления компонентов положения для пятого шага по формуле, использующей центральные разности. Если соответствие не достигается в пределах 10^{-11} , то шаг интегрирования сокращают наполовину, а если оно достигается в пределах 10^{-15} , то шаг удваивают. Код обычной точности (10^{-8}) убыстряет работу в десять раз [27] и, вероятно, достаточен для геодезических целей на протяжении около одного дня при шаге в 1 мин. Рассмотрение накопления ошибок при численном интегрировании см. в ([15], стр. 158—159) и [28].

Если численное решение выполняют при небольших отклонениях от известного решения, т.е. для возмущений относительно промежуточной орбиты, то шаг интегрирования может быть значительно увеличен и, следовательно, достигнута экономия в вычислениях. Подобные методы известны в астрономии, где они применялись длительное время. Наиболее обычным для тел с пренебрегаемо малой массой является метод Энке ([9], стр. 222—224), ([12], стр. 91—105), ([15], стр. 176—182), в котором отклонения от кеплеровой орбиты вычисляются в прямоугольных координатах. Эти отклонения $\xi = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ появляются в дифференциальном уравнении

$$\ddot{\xi} = \frac{\mu}{r'^3} (fq\mathbf{x} - \xi) + \nabla R, \quad (51)$$

где $f q$ — величина, противоположная сумме всех членов после первого в биномиальном разложении $(r'/r)^3$, т.е. величина порядка ξ/r . Форма (51) используется потому, что она удобна для вычислений на настольных вычислительных машинах, так как $\dot{f}$ может быть табулировано в функции q ([12], стр. 155). Для применения к спутникам Земли метод Энке может быть обобщен так, чтобы $\mathbf{r}'$ относилось к промежуточной орбите, учитывающей влияние сжатия Земли.

Метод, аналогичный методу Энке в полярных координатах, принадлежит Ганзену ([9], стр. 224—227). Однако

он настолько сложен, что вместо него можно выполнять численное интегрирование относительно кеплеровых элементов непосредственно, используя уравнения (29) или им аналогичные, выражающие возмущающие силы в ортогональных компонентах. Методы численного интегрирования относительно кеплеровых либо аналогичных элементов известны как методы вариации произвольных постоянных, или вариации параметров, или вариации элементов. Было разработано несколько таких методов либо относительно только кеплеровых элементов, либо относительно сочетания некоторых из них с прямоугольными или полярными координатами, как, например, метод Брауэра ([15], стр. 398—414) или Мьюзена [29]. Дальнейшее теоретическое развитие численных методов логически приводит к общей численной теории, рассмотренной далее.

Другой численный метод, таящий в себе значительные возможности для решения проблем геодезии, заключается в выражении возмущений элементов или координат числовым рядом Фурье [30]. Этот метод, по-видимому, впервые применил Эри к проблеме Луны ([19], стр. 245—246), а недавно он был применен Эккертом [31] для исправления лунной орбиты.

Сравнение различных численных методов дано в [32, 33 и 34]. В общем, если желательно сэкономить на программировании и если должны быть учтены большие или переменные возмущения, то предпочтительнее более простые методы, как, например, метод Кауелла. Если же промежуток времени велик, возмущения невелики и имеют систематический характер и необходимо сэкономить машинное время, то предпочтительнее более совершенные методы вариации постоянных. Эти методы, кроме того, обеспечивают лучшее понимание физического смысла явления.

§ 4. ЗАДАЧА БЛИЗКОГО СПУТНИКА

Определим задачу близкого спутника как решение уравнений движения для частицы пренебрегаемо малой массы в потенциальном поле с возмущающей функцией R_2 уравнения (41). С исторической точки зрения может показаться неуместным рассматривать проблему близкого спутника до проблемы Луны, однако задача близ-

кого спутника является более важной для геодезии и более легкой, а вместе с тем вплоть до последнего времени и «обладавшей отличительной особенностью быть простейшей из нерешенных проблем небесной механики» [35].

Решение указанной задачи до членов первого порядка наиболее просто достигается использованием R_2 в лагранжевых уравнениях (29), вследствие чего возмущения всех элементов оказываются пропорциональными J_2 . Здесь J_2 для Земли составляет около 1:1000. Другие коэффициенты гравитационного поля Земли, которые представляют интерес, имеют порядок 10^{-6} или меньше, поэтому при решении необходимо также учитывать члены, пропорциональные J_2^2 . Чтобы свести число ссылок на литературу к минимуму, рассмотрим только те теоретические выводы, которые либо учитывают влияния до J_2^2 (в данном параграфе), либо выводят влияния первого порядка для общего члена коэффициента J_{nm} , K_{nm} (см. § 6). Из многих выводов влияний первого порядка заслуживают упоминания, как имеющие приоритет, лишь выводы Краузе [36] и Спитцера [37]. Рассмотрение основано на семи пунктах, перечисленных в § 1 в качестве характеризующих методы решений, с отдельным предварительным учетом систем координат и выражения в них потенциала. Все рассматриваемые решения также учитывают влияния J_4 , а некоторые — влияния J_3 и J_5 , но только до первого порядка, вследствие чего они будут изложены далее в § 6.

Возмущающая функция

Силовая функция (величина, противоположная потенциалу) в сферических полярных координатах имеет вид

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (52)$$

а в прямоугольных координатах

$$U = \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \left[1 - J_2 \frac{a_e^2}{x^2 + y^2 + z^2} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{3z^2}{2(x^2 + y^2 + z^2)} - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (53)$$

В эллипсоидальной (сплюснутый эллипсоид вращения) системе координат, для которой уравнение потенциала (52) или (53) совпадает с той же эллипсоидальной координатной поверхностью на экваторе и на полюсе [38, 39], силовая функция будет

$$U = \frac{\mu}{\sqrt{c^2 + \rho^2 - c^2 \sigma^2}} \left[1 - \frac{c^2}{2(c^2 + \rho^2 - c^2 \sigma^2)} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{3\rho^2 \sigma^2}{c^2(1 - \sigma^2) + \rho^2} - 1 \right) \right], \quad (54)$$

где $c = a_e \sqrt{J_2}$. Здесь ρ определяет эллипсоидальную поверхность, а σ (пробегающее значения от -1 до $+1$) устанавливает поверхность гиперboloидного типа; σ — синус угла между асимптотой и экватором.

Координаты в уравнении (54) разделяются не без труда, поэтому решение, использующее эллипсоидальные координаты, с большим удобством может быть получено из выражения

$$U_E = \frac{\mu \rho}{\rho^2 + c^2 \sigma^2} = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_2^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\cos \varphi), \quad (55)$$

которое отличается от U на величину порядка J_2^2 [38, 39].

Потенциал (52) в оскулирующих кеплеровых элементах ([15], стр. 564), [23, 40 или 41] имеет вид

$$U = \frac{\mu}{a} \left[\frac{a}{r} - \frac{J_2}{4} \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 \{ (2 - 3 \sin^2 i) + \right. \\ \left. + 3 \sin^2 i \cos 2(\omega + f) \} \right], \quad (56)$$

а в переменных Делоне ([15], стр. 564), [40]

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{4 L^6} \left[\left(3 \frac{H^2}{G} - 1 \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 + \right. \\ \left. + \left(3 \frac{H^2}{G^2} - 3 \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \cos 2(g + f) \right]. \quad (57)$$

Для исключения r и f из уравнений (56) и (57) требуются эллиптические разложения по степеням эксцентриситета ([9], стр. 44—46), ([15], стр. 564), [40].

Методы решений в данной работе несколько произвольно классифицированы в соответствии с возможностью или невозможностью определить промежуточную орбиту как точное решение части одного из потенциалов (52) — (57). Иначе говоря, классифицированы в соответствии с разделением на динамические и геометрические промежуточные орбиты. Обозначения, взятые из цитированных статей, насколько возможно приведены в соответствие с обозначениями, принятыми в этом обзоре. Относительно перехода от других параметров сжатия к J_2 см. [40, 42 или 43].

Динамические теории промежуточных орбит

Теория Брауэра ([15], стр. 562—573), [40] является решением уравнений Делоне (25), (26) и (27) с использованием возмущающей функции в форме уравнения (57) методом канонических преобразований, как в уравнениях (37) — (44). Для облегчения интегрирования производящей функции S и обеспечения достаточной близости орбиты к действительной производятся два канонических преобразования: первое — к орбите, описываемой гамильтонианом $F'(L', G', H', g)$, которая таким образом имеет те же долгопериодические вариации, как и фактическая орбита, и второе — к орбите, описываемой гамильтонианом $F''(L'', G'', H'')$.

Это двухступенчатое преобразование приводит к появлению дополнительного члена $(\partial F'_1 / \partial g) (\partial S_1 / \partial G')$ в правой части уравнения (41). Здесь F'_1 полностью определено. При выполнении интегрирования по средней аномалии l используются преобразования (7) и (8), а интегрирование выполняется формально по истинной аномалии f . Определяются только долгопериодические (т.е. не являющиеся функциями от l) вариации, вызванные S_2 , однако в остальном решение полностью соответствует второму порядку. Иначе говоря, выводятся все вариации, возникающие ввиду F'_2 и F''_2 . Постоянными интегрирования являются средние элементы, т.е. постоянные части a'', e'', i'' и секулярно меняющиеся части l''_0, g''_0, h''_0 на данную эпоху. Невозмущенное

среднее движение определяется в виде $n_0 = \sqrt{\mu/a''^3}$, вследствие чего промежуточная орбита оказывается кеплеровой, соответствующей потенциалу $U_0 = \mu/r'$. Брауэр [40] выводит также долгопериодические и вековые эффекты J_3 , J_4 и J_5 первого порядка. Проблемы нулевого эксцентриситета и нулевой наклонности могут быть решены использованием канонических переменных (28). Вековые и долгопериодические члены, возникающие ввиду действия члена с J_2 в теории Брауэра, где $\gamma_1 = \sqrt{1-e''^2}$, $\theta = \cos l''$ и $\gamma_2' = a_e' J_2 / (2a''^2 \eta^4)$, таковы:

$$\left. \begin{aligned} l' &= l_0'' + n_0 t \left\{ 1 + \frac{3}{2} \gamma_2' \eta (-1 + 3\theta^2) + \frac{3}{32} \gamma_2'^2 \eta \times \right. \\ &\quad \times [-15 + 16\eta + 25\eta^2 + (30 - 96\eta - 90\eta^2) \theta^2 + \\ &\quad + (105 + 144\eta + 25\eta^2) \theta^4] \left. \right\} + \frac{1}{8} \gamma_2' \eta^3 [1 - 11\theta^2 - \\ &\quad - 40\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1}] \sin 2g'' \\ g' &= g_0 + n_0 t \left\{ \frac{3}{2} \gamma_2' (-1 + 5\theta^2) + \frac{3}{32} \gamma_2'^2 [-35 + \right. \\ &\quad + 24\eta + 25\eta^2 + (90 - 192\eta - 126\eta^2) \theta^2 + (385 + \\ &\quad + 360\eta + 45\eta^2) \theta^4] \left. \right\} - \frac{1}{16} \gamma_2' [2 + e''^2] - 11(2 + \\ &\quad + 3e''^2) \theta^2 - 40(2 + 5e''^2) \theta^4 (1 + 5\theta^2)^{-1} - 80e''^2 \theta^6 \times \\ &\quad \times (1 - 5\theta^2)^{-2}] \sin 2g'' \\ h' &= h_0'' + n_0 t \left\{ -3\gamma_2' \theta + \frac{3}{8} \gamma_2'^2 [(-5 \pm 12\eta + 9\eta^2) \theta + \right. \\ &\quad + (-35 - 36\eta - 5\eta^2) \theta^3] \left. \right\} - \frac{1}{8} \gamma_2' e''^2 \theta [11 + 80\theta^2 \times \\ &\quad \times (1 - 5\theta^2)^{-1} + 200\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-2}] \\ c' &= c'' + \frac{1}{8} \gamma_2' e'' \gamma_2'^2 [1 - 11\theta^2 - 40\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1}] \cos 2g'' \\ i' &= i'' - \frac{1}{8} \gamma_2' e''^2 \operatorname{ctg} i'' [1 - 11\theta^2 - 40\theta^4 (1 - \\ &\quad - 5\theta^2)^{-1}] \cos 2g'' \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Долгопериодических вариаций в a нет. Следует заметить, что периодические члены второго порядка, вы-

веденные из F'_2 и F''_2 , становятся членами первого порядка в том смысле, что их коэффициенты содержат скорее J_2 , а не J_2^2 . Следует, кроме того, заметить, что выражение $(-1 + 5\theta^2)$, содержащееся в вековом члене первого порядка для g' , снова встречается в этих членах второго порядка для всех переменных в виде $1/(1 - 5\theta^2)$. Отсюда следует, что эта теория не может быть использована вблизи $\theta = \left(\frac{1}{5}\right)^{1/2}$ или $i = 63^\circ 26'$. Подобные орбиты должны определяться отдельно (см. § 4).

Ковалевский [20] развил теорию второго порядка, аналогичную теории Брауэра.

Теория Гарфинкеля [35, 44] использует в качестве промежуточной орбиту, соответствующую потенциалу

$$U_0 = \frac{\mu}{r} \left[(1 - 3J_2 a_e^2 c_3) - \frac{3}{2} J_2 a_e^2 c_1 \frac{\sin^2 \varphi - c_2}{r} \right], \quad (59)$$

где

$$c_1 = \frac{1}{a(1 - e^2)},$$

$$c_2 = \cos^2 i;$$

$$c_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3 \cos^2 i - 1}{a^2 (1 - e^2)^{3/2}}.$$

Решением уравнений движения с силовой функцией в виде (59) является «псевдоэллипс», включающий два эллиптических интеграла. Произведенный выбор значений c_i приводит к тому, что эта промежуточная орбита включает все вековое движение первого порядка. Канонические переменные, соответствующие псевдоэллипсу, по форме аналогичны переменным Делоне (26), за исключением того, что μ заменяется на $\mu' = \mu(1 - 3J_2 a c_3)$, а H умножается на коэффициент

$$\sqrt{1 + 6J_2 a_e^2 \cos^2 i / [\mu' a^2 (1 - e^2)^2]}.$$

Все вариации первого порядка и все вековые и долгопериодические вариации, возникающие в этих псевдоэллиптических элементах от F'_2 , определяются каноническим преобразованием типа, в общих чертах описанного в уравнениях (37) — (44).

Стерн [45] отыскивает промежуточную орбиту, соответствующую потенциалу

$$U_0 = \frac{\mu}{r} \left[1 - 3J_2 a_e^2 \left\{ c_1 \frac{\sin^2 \Phi - c^2}{2r} + \frac{c_4}{r^2} \right\} \right]. \quad (60)$$

В решении для промежуточной орбиты участвуют четыре эллиптических интеграла. В [45] получены только возмущения первого порядка.

Винти [38, 46, 47] разработал теорию спутника в эллипсоидальных координатах. Он получает уравнения Гамильтона — Якоби (40), соответствующие эллипсоидальному потенциалу U_E уравнения (55), причем каждая из трех координат ρ , σ и α (прямое восхождение) разделяется на различные члены так, что они интегрируются численно или разложением в степенной ряд по J_2 . Постоянные интегрирования могут быть выбраны так, что их можно считать обобщениями кеплеровых элементов. Формальной сингулярности (особенности), как в уравнений (58), при критической наклонности $i = 63^\circ 26'$ нет. Однако проблема возмущений при критической наклонности остается ввиду того, что действительные J_4 , J_6 и т. д. отличаются от J_2^2 , $-J_2^3$ уравнения (55), см. § 4. Винти [38] полностью описывает теорию вплоть до получения уравнений Гамильтона — Якоби с разделенными координатами. Недавно было опубликовано [46] решение, включающее все вековые влияния и периодические влияния до членов $O(J)$.

Ижак [39] выполнил решение уравнений Винти, которое включает все члены до второго порядка — короткопериодические, равно как и долгопериодические. Его решение уравнений Гамильтона — Якоби имеет вид

$$S(\rho, \sigma, \alpha) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\sqrt{P(\rho)}}{\rho^2 + c^2} d\rho + \int_0^{\sigma} \frac{\sqrt{Q(\sigma)}}{1 - \sigma^2} d\sigma + p_3 \alpha, \quad (61)$$

где P и Q — многочлены четвертой степени своих аргументов и трех переменных (импульсов).

Нижние пределы интегрирования произвольны, и наиболее удобно принять в качестве их минимум ρ (аналогично перигею) и экватор. Дифференцирование уравнения (61) относительно каждого из переменных

импульсов для получения угловых переменных приводит к переносу радикалов в знаменатель; интегралы оказываются эллиптическими. Наибольшее внимание в теории Ижака уделяется преобразованию этих интегралов к обычному виду и их последующему разложению в ряды Фурье. Независимой переменной сделан эллиптический аналог истинной аномалии, а канонические переменные импульсы преобразуются в аналоги a , e и $\sin i$. Для ρ и σ выводятся замкнутые выражения через эллиптические функции от a , e , $\sin i$ и постоянных, которые являются функциями последних. Эти постоянные раскладываются в ряды по степеням (c/a_e) до четвертого порядка, т. е. до J_2^2 . Четыре интеграла, полученные дифференцированием уравнения (61), раскладываются в ряды Фурье аналогично аргументу широты и истинной аномалии в кеплеровом движении. Наконец, эти формулы преобразуются для получения удобных выражений для координат и других представляющих интерес количеств через орбитальные элементы a , e , $\sin i$, t_0 , Ω , ω и истинную аномалию, которая, в свою очередь, выражается через время, орбитальные элементы, c и μ . Малых величин в знаменателях нет, поэтому теория хороша для всех эксцентриситетов и наклонностей (включая наклонность в $63^\circ 26'$).

Козаи [23] основывается на лагранжевых уравнениях движения (29), из которых быстро выводятся возмущения первого порядка. Возмущения второго порядка получают интегрированием типа

$$dE_i = \int \dot{E}_i dt + \sum_j dE_j \int \frac{\partial \dot{E}_i}{\partial E_j} dt - \\ - \sum_j \int \dot{E}_j \left(\int \frac{\partial \dot{E}_i}{\partial E_j} dt \right) dt, \quad (62)$$

в которых E_i — любой орбитальный элемент, а $\dot{E}_i$ получается из уравнений (29).

Козаи выводит все долгопериодические члены второго порядка и вековые члены, кроме членов с M (средняя аномалия). Его постоянные интегрирования совпа-

дают с постоянными Брауэра, за исключением большой полуоси

$$\bar{a} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{n^2}} \left(1 + \frac{1}{3} p + \frac{23}{27} p^2 \right), \quad (63)$$

где

$$p = \frac{3J_2 a_e^2}{4(1-e^2)^{3/2}} (1 - 3 \cos^2 i) \sqrt[3]{\frac{n^4}{\mu^2}},$$

что примерно равносильно изменению μ на μ' Гарфинкеля.

Брауэр [48, 49] применил к проблеме близкого спутника теорию Хилла—Брауна для Луны (см. § 5), используя прямоугольные координаты, вращающиеся вместе со спутником (в экваториальной [48] или в орбитальной [49] плоскостях) с круговой промежуточной орбитой. Теория в [48] развита до членов второго порядка, но включает наклонность и эксцентриситет в виде степенных рядов до i^3 и e^3 и, таким образом, точна только для почти круговых, почти экваториальных орбит. Теория в [49] дает только промежуточные орбиты и не включает влияния эксцентриситета.

Теории геометрических промежуточных орбит

Теория Мьюзена [50, 51, 52] основана на теории, развитой Ганзенем для Луны. Обработка возмущений разделена на две части, соответственно их разделению на возмущения в плоскости оскулирующей орбиты и возмущения этой плоскости. Это разделение достигается применением для первых возмущений в качестве промежуточной орбиты равномерно вращающейся кеплеровой орбиты, отнесенной к прямоугольным осям координат x , y , зафиксированным в плоскости орбиты. Возмущающая функция R раскладывается в числовой ряд Фурье ([12], стр. 123) по промежуточной эксцентрической аномалии E' , которая служит независимой переменной. При разложении уравнений движения полярный угол ν от закрепленной оси x на действительное место спутника принимается равным соответствующему углу фиктивного спутника на промежуточной орбите. Вычисленные таким образом возмущения относятся к

моменту, когда спутник проходит некоторый полярный угол: $\delta z = z - t$. Радиальные возмущения выражаются через небольшой коэффициент

$$r(t) = (1 + \nu) r'(z). \quad (64)$$

Оба возмущения δz и ν определяются в плоскости Ганзена через одну и ту же функцию Ганзена $\overline{W}$, которая наиболее кратко выражается в виде

$$\overline{W} = -1 - \frac{h}{h'} + \frac{2h}{h'} \frac{1}{1 + \nu}, \quad (65)$$

где h определяется из уравнения (5). (Величина h в обозначениях Ганзена и Мьюзена обратна той же величине в наших обозначениях.)

Здесь $\overline{W}$ — безразмерная величина, которая, как δz и ν , в невозмущенном случае обращается в нуль. Этот принцип все время применяется в вычислениях для удобства. Функция, определяемая в первую очередь по возмущающей функции R , — это

$$dW/dE',$$

где E' используется как независимая переменная, а не как параметр положения.

При интегрировании по E' для вывода W учитывается, что в соответствующих выражениях нет постоянных членов или членов с аргументом E' , что объясняется применением промежуточной орбиты. Эта процедура эффективно определяет постоянную интегрирования e' как коэффициент вариации $\sin E'$ в оскулирующей средней аномалии в соответствии с кеплеровым уравнением (3). Постоянная интегрирования $\underline{a'}$ определяется по «среднему» среднему движению $\underline{n} = n'$ и третьему закону Кеплера, см. уравнение (6). Ориентировка оскулирующей плоскости определяется четырьмя параметрами, два из которых незначительно отличаются соответственно от $\sin i/2$ и $\cos i/2$, а два — незначительно отличаются от нуля. Этим избытком параметров достигают преимуществ симметрии.

Для определения параметров ориентирования производится разложение в ряды Фурье по E' , а наклонность i' промежуточной орбиты определяется так, что

$\sin i'$ оказывается, как в уравнении (46), коэффициентом всех вариаций $\sin \varphi$ вида $\sin(f + \omega)$.

Промежуточная орбита содержит все вековые движения узла.

По данной последовательности постоянных интегрирования a' , e' , i' , ω'_0 , Ω'_0 , M'_0 и параметрам гравитационного поля μ , J_2 и т.д. при помощи итераций, используя принцип, выраженный уравнением (48), получают ряды Фурье и вспомогательные постоянные. Тогда для любого момента времени радиус-вектор $\mathbf{r}$, который служит для получения эксцентрической аномалии E' , используемой в дальнейшем в рядах Фурье, может быть определен итерацией уравнения Кеплера (3) со средней аномалией, выраженной в виде

$$M'_0 + \bar{n}(t - t_0) + \bar{n}\delta z.$$

Применение итерации позволяет численно установить точность вычислений как предел, после достижения которого вычисления прекращаются. Теория Мьюзена неприменима для случая малых эксцентриситетов, поскольку применение E' в качестве независимого переменного требует хорошо определенного положения перигея. Она неприменима и для случая критической наклонности $i = 63^\circ 26'$. Эта теория была широко применена Хергетом с сотрудниками в качестве основы для программ вычисления орбит в вычислительном центре Национального управления по авиации и исследованию космического пространства [53, 54, 55]. Мьюзен недавно опубликовал новую теорию [56] с несколькими усовершенствованиями. В качестве независимого переменного используется полярный угол ν от начальной точки, поэтому радиус-вектор и ориентировка плоскости орбиты могут быть выражены не усеченными бесконечными рядами, а замкнутыми тригонометрическими многочленами, что обеспечивает более быструю сходимость процесса итерации.

В теории Кинг-Хила [57] принимается, что спутник постоянно находится в опорной плоскости с фиксированной наклонностью. Промежуточная орбита в этой плоскости — кеплерова орбита с аргументом фиксированного перигея, равным соответствующему аргументу для действительного спутника. Этот перигей на данную эпоху принимается за начальную точку, от которой при

помощи полярного угла выражается угловое место спутника. Уравнения движения решаются в первом приближении в предположении, что уравнение для $1/r$, см. уравнение (8), в правой части видоизменяется членами порядка J_2 и что долгота узла опорной плоскости Ω имеет вековое движение, пропорциональное J_2 . Эти первые приближения затем используются для последовательного отыскания членов порядка $J_2 e$ и J_2^2 . Члены высшего порядка не выводятся, поэтому можно полагать, что эта теория обеспечивает результаты, сравнимые по точности с результатами ранее описанных теорий лишь при небольших эксцентриситетах.

Теория Бреннера и Латта [58] аналогична теории Кинг-Хила; ее основные видоизменения состоят в том, что опорная плоскость имеет переменную наклонность и в угловом месте спутника учитывается вековое движение перигея в этой плоскости. Члены порядка $J_2 e^2$ или более высокого порядка не выведены.

Жонголович [61] предложил теорию второго порядка, исходящую из уравнений движения, аналогичных уравнениям (29), но выражающих возмущающие силы в ортогональных компонентах (радиальном, трансверсальном, нормальном). Постоянными интегрирования служат оскулирующие элементы восходящего узла.

Мерсон [59] также предложил теорию, учитывающую вековые влияния в J_2^2 , используя уравнения движения с ортогональными компонентами возмущения и узловые элементы. После этого он определяет промежуточную орбиту так, что a' и e' постоянные с точностью до $O(J_2^2)$ *.

Сравнение теорий

Для достижения большей точности и эффективности решения теория Мьюзена [50, 56] для большинства спутников, вероятно, является наилучшей из существующих, поскольку метод решения итерациями равносильно учету членов порядка выше J_2^2 . Из общих теорий (не просто численных решений) теории Винти [46] и Ижака [39] представляют собой наиболее полные решения проблемы

* После написания данного обзора автору стало известно о новых теориях близкого спутника второго или высших порядков [246—250].

двух параметров (μ , J_2) и в то же время применимы к наибольшему многообразию орбитальных спецификаций. Однако теории, изложенные в [35, 40, 59, 61] должны быть достаточны для основных геодезических применений, равно как и теория [23] при эмпирическом определении среднего движения и при небольшом эксцентриситете [57, 58]. Вторая цель (глубокое понимание физической сущности) в значительной степени является индивидуальным делом. Предыдущие описания позволяют выбрать наиболее подходящую теорию.

Два других критерия, по которым можно судить о теориях, это легкость включения дополнительных влияний и легкость сравнения результатов с результатами другой теории или с результатами численного интегрирования. Для исследования явлений с существенными влияниями только первого порядка, как например, гравиметрических гармоник высшего порядка, все теории одинаковы, поскольку отклонения от любой численной или общей теории по существу одни и те же. Включение явлений, имеющих значительные влияния второго порядка, например торможения, было исследовано до сих пор только для теории Брауэра ([15], стр. 574—582), [118]. Однако нерегулярные вариации торможения столь велики, что любые теоретические выводы имеют сомнительную ценность. Учет торможения в численных приложениях теории Мьюзена ограничивался [54] включением члена, выражающего вековое изменение среднего движения, n :

$$n = n_0(1 + n_2 t). \quad (66)$$

Основной критерий ценности любой теории состоит в том, что теория дает те же радиус-векторы и векторы скорости на любой момент времени, что и получаемые численным интегрированием, либо те же оскулирующие элементы, что и по теории, уже зарекомендовавшей себя как надежная. Бейли и Брайант [62] приводят формулы, позволяющие выполнить сравнения второго вида с теорией Мьюзена. Кроме того, полезно иметь возможность непосредственно преобразовывать постоянные интегрирования одной теории в постоянные другой теории. Подобные преобразования легче всего выполняются для теорий, использующих в качестве постоянных средние элементы, а также сферические системы координат, та-

ких как теории Брауэра [40], Гарфинкеля [35] и Козаи [23].

Гарфинкель приводит соотношения между постоянными Брауэра и своими, а уравнение (63) дает возможность согласования теорий Козаи и Брауэра в вековых движениях узла и перигея лучшего, чем до 10^{-5} . Значительно труднее получить преобразования, связывающие теории, развитые в различных (сферических и эллипсоидальных) координатах, или теории, использующие различные (динамические и геометрические) промежуточные орбиты. Единственное опубликованное преобразование подобного рода [63] ограничено случаем круговой орбиты для теорий Брауэра [40] и Кинг-Хила [47]. Трудность состоит здесь, скорее, не в погрешности или неточности определений, как это было предположено Ковалевским [20], а, по-видимому, в алгебраической сложности. Применение оскулирующих элементов для моментов прохождения через перигеи или восходящий узел в качестве постоянных интегрирования в [57, 58, 59, 61] приводит к тому, что в соответствующие этим теориям коэффициенты входят отличающиеся друг от друга степени эксцентриситета и возникают отличающиеся друг от друга периоды, как это указывается уравнением (47). Например, теория Жонголовича [61] имеет в $\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$ члены, пропорциональные $J_2^2 \cos \omega$.

Применение общих теорий возмущений, вызванных сжатием Земли, для определения лучших значений J_2 будет рассмотрено в § 6.

Специальные проблемы

Проблема критической наклонности ($5 \cos^2 i - 1 = 0$ или $i = 63^\circ 26'$) решена Хори [64], Гарфинкелем [65], Хажихарой [254], Козаи [281] и Страблом [247] с применением степенных разложений по $\sqrt{J_2}$, встречающихся в эллипсоидальных теориях [38, 39]. Величина J_4 становится значащей при определении ширины зоны наклонности i , в пределах которой перигей совершает колебательное движение, а не перемещается секулярно.

Для орбит с небольшим эксцентриситетом или небольшой наклонностью могут быть использованы канонические элементы (28). Неточность, которая будет

иметь место в h или в $g+h$, не будет оказывать соизмеримого влияния на точность определения положения или скорости спутника, поскольку функции h и $g+h$ всегда умножаются на коэффициенты соответственно $O(\sin^2 i)$ и $O(e)$. Другая система элементов, которая по существу включает эти коэффициенты, дана Козаи [23]. Проблема малых эксцентриситетов рассматривается также в [255—257].

Козаи [66] исследует влияние прецессии и нутации земной оси, которые при использовании инерциальных координат приводят к медленному изменению члена J_2 в R со временем. Наибольшим является вековое изменение, достигающее несколько больше чем до $20''$ в год. Кроме того, имеются периодические вариации с амплитудой до $8''$. Если координаты отнесены к движущемуся экватору (опорная плоскость, см. § 8), то появляются меньшие периодические члены.

Козаи [67], а также Мьюзен, Бейли и Аптон [68, 69] выводят влияние лунного и солнечного возмущений на близкий спутник. Возмущающая функция R_s приведенная в уравнении (15), может быть разложена в сумму полиномов Лежандра

$$R_s = \frac{\mu^*}{r^*} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r^*} \right)^n P_n(S), \quad (67)$$

где

$$S = \cos(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) = \sum_i F_i(\gamma\gamma^*) \times \\ \times \cos \left[f + \omega + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Delta\Omega \pm (f^* + \omega^*) \right] \quad (68)$$

сумма шести членов, в которой $\gamma = \sin i/2$ и $\Delta\Omega = \Omega - \Omega^*$. Наличие коэффициента $(r/r^*)^n$ приводит к тому, что только два главных члена (при $n=2$ и 3) могут иметь значение в R_s . При подстановке S из уравнения (68) и выполнении всех умножений выражение $P_2(S)$ раскладывается в 23 члена (включая постоянную) вида

$$P_2(S) = \sum_i F_i(\gamma, \gamma^*) \cos(a_i(f + \omega) +$$

$$+ b_i(f^* + \omega^*) + c_i\Delta\Omega], \quad (69)$$

где $a_i=0$ или 2, $b_i=-2$, 0 или 2 и $c_i=-2$, -1 , 0, 1 или 2.

Выражение $P_3(S)$ раскладывается в 56 членов. Затем возмущающая функция преобразуется от истинных аномалий f, f' к средним аномалиям M, M^* путем применения стандартного эллиптического разложения для функции $(r/a)^p \cos(qf + \alpha)$, см., например, ([9], стр. 44—46). Поскольку аномалия спутника меняется намного быстрее, чем любой другой угол, входящий в возмущающую функцию, ощутимый вклад при интегрировании по времени будут давать члены, в которых отсутствует средняя аномалия спутника M .

Долгопериодическая величина

$$\mu^* \frac{r^2}{r^{*3}} P_2(S) = \mu^* \frac{a^2}{a^{*3}} \sum_i F_i(\gamma, \gamma^*) G_i(e) \times \\ \times \sum_j G_j(e^*) \cos[a_i\omega + b_i\omega^* + (b_i + j)M^* + c_i\Delta\Omega], \quad (70)$$

где j пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$, $G_i(e)$ имеет порядок e^{a_i} , а $G_j(e^*)$ — порядок $e^{*|j|}$, $e^*=0,017$ для случая Солнца и 0,055 для случая Луны. Очевидно, что существенные члены, для которых $F_i G_i$ велико, а $[a_i\omega + b_i(\omega^* + M^*) + c_i\Delta\Omega]$ мало, сильно зависят от непосредственного влияния эксцентриситета и наклонности орбиты на F_i и G_i и их косвенного (посредством J_2) влияния на ω и Ω и должны определяться для каждого спутника отдельно. Например ([68], стр. 39), для спутника 1958 β_2 ($i=34^\circ, 2$, $e=0,19$) член $a_i=2$, $b_i=-2$, $c_i=2$ наиболее важен, несмотря на коэффициент e^2 . Введение этого члена в уравнения (29) приводит к колебанию высоты перигея с амплитудой 1,458 км. (В некоторых оценках лунного и солнечного влияний этими членами с e^2 пренебрегают.)

Полное разложение долгопериодических членов $P_2(S)$ и $P_3(S)$ приведено в [68] вместе с короткопериодическими членами $P_2(S)$ в функции эксцентрической аномалии для использования в теории Мьюзена [50] ганзеновского типа.

В движении Луны ($a = 3,84 \cdot 10^5$ км) влияния второго порядка J_2 в уравнениях (58) пренебрегаемо малы, наоборот, r/r^* в R_s в уравнении (67) ощутимо больше, так что преобладает солнечное возмущение R_s . Поэтому уравнения (68)—(70) могут быть упрощены введением эклиптики в качестве опорной плоскости, так что $\gamma^* = 0$. Однако среднее лунное движение n теперь ощутимо сравнительно со средним солнечным движением ($n^*/n \approx 1/13$), поэтому должны учитываться короткопериодические члены. Должны быть учтены также члены более высокого порядка вплоть до $R_{s,4}$, содержащие $P_4(S)$, и, наконец, a , γ , e в уравнении (70) не могут считаться постоянными, а ω , Ω — секулярно меняющимися и поэтому должны быть получены приближения более высоких порядков.

Теория Луны имеет длительную историю и достигает наибольшего расцвета в исследованиях Ганзена [70, 71], Делоне [72] и Хилла [73, 74]. Теории Ганзена и Делоне представляют большой исторический интерес как наиболее широкие приложения определенных динамических принципов и приемов и как предшественницы теорий близких спутников соответственно Мьюзена [50] и Брауэра [40]. Детальное изложение теорий Ганзена и Делоне приведено в [19] и [75]. Теория, применяемая в настоящее время, — это теория Хилла, дополненная Брауном [76] и Эккертом [31, 77].

Теория движения Луны, разработанная Хиллом — Брауном, описана в специальной литературе ([9], стр. 254—291), ([25], стр. 335—374). В ней используется прямоугольная система координат x , y , z , вращающаяся с постоянной скоростью в плоскости эклиптики так, что ось x направлена на среднее Солнце, а ось z перпендикулярна к эклиптике. Вследствие этого в уравнениях движения (12) появляются члены, соответствующие силе Кориолиса и центробежной силе,

$$\ddot{\mathbf{r}} - 2\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{n}^* - (\mathbf{r} \times \mathbf{n}^*) \times \mathbf{n}^* = \nabla U, \quad (71)$$

где

$$\mathbf{n}^* = \{0, 0, n^*\}.$$

Хилл подставил

$$u = x + y \sqrt{-1} ; \quad s = x - y \sqrt{-1} ; \quad v = n - n^* ;$$

$$m = n^* / (n - n^*) ; \quad x = (\mu_E + \mu_M) / (n - n^*)^2 ,$$

принял

$$\zeta = e^{v(t-t_0)\sqrt{-1}}$$

за независимую переменную и ввел операторы $D = \zeta(d/d\zeta)$, $D_t = \zeta(\partial/\partial\zeta)$. Соответствующая подстановка в уравнение (71) и некоторые дальнейшие преобразования переводят уравнения движения в

$$\left. \begin{aligned} D^2(us + z^2) - Du \cdot Ds - (Dz)^2 + 2m(sDu - uDs) + \\ + \frac{9}{4} m^2(u + s)^2 - 3m^2 z^2 = C - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) R'_{s,n} + \\ + D^{-1}(D_t R'_s) \\ D(uDs - sDu - 2mus) + \frac{3}{2} m^2(u^2 - s^2) = \\ = s \frac{\partial R'_s}{\partial s} - u \frac{\partial R'_s}{\partial u} \\ D_z^2 - m^2 z^2 - \frac{xz}{r^3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial R'_s}{\partial z} \end{aligned} \right\} , \quad (72)$$

где C — постоянная интегрирования, а $R'_{s,n}$ — член в R'_s , содержащий $P_n(S)$.

R'_s отличается от R_s уравнения (67) следующими тремя изменениями:

1) a/a^* всюду заменено на

$$a/a^* [(\mu_E - \mu_M)/(\mu_E + \mu_M)]$$

для учета массы Луны (существенно только в $R'_{s,3}$);

2) координаты Солнца r^* отсчитываются относительно центра тяжести системы Земля — Луна;

3) из $R'_{s,2}$ вычитается член

$$3m^2(u + s)^2/4 - m^2(us + z^2).$$

а соответствующие производные вычитаются из левой части уравнения (72), см. ([9], стр. 256—259).

Промежуточная орбита является периодическим решением уравнения (72) при нулевых значениях e^* , a/a^* , z и e . Это приводит к исчезновению в правой части уравнения (72) всех членов, кроме C , равно как и всех членов, содержащих z в левой части. В результате возмущающая сила оказывается постоянной и всегда направлена вдоль оси x . Промежуточная орбита называется вариационной кривой. Она представляет собой овал, вращающийся так, что его меньшая ось направлена вдоль оси x . Условие периодичности требует, чтобы координаты u , s могли быть разложены в ряд следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u &= A \sum_{-\infty}^{\infty} a_{2i} \zeta^{2i+1}; \\ s &= A \sum_{-\infty}^{\infty} a_{-2i-2} \zeta^{2i+1}, \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

где A — постоянный масштабный коэффициент, a_0 принимается равным единице, а другие постоянные a_{2i} , a_{-2i-2} вместе с C определяются как функции m последовательными приближениями с вычислением производных D , D^2 и т. д. от u , s путем подстановки в уравнение (72) (причем, как было упомянуто, принимается, что члены с R'_s и z равны нулю) и под условием исчезновения коэффициентов при каждой степени ζ . Большим преимуществом метода Хилла является быстрая сходимость процесса по m , численное значение которого (m) используется на этой стадии в теории. Масштабный коэффициент A также определяется видоизменением уравнения (72), в которое вводится величина κ . Величина a_e/A — средний параллакс, видоизмененный по сравнению с параллаксом, который имел бы место в соответствии с законом Кеплера [см. уравнение (6)] при отсутствии Солнца. Для геодезических целей выражение для A лучше всего использовать, как в [78], в виде

$$(1 + \beta) A = \sqrt[3]{\frac{\mu_E (1 + \mu_M/\mu_E)}{n^2}}. \quad (74)$$

Решение для промежуточной орбиты включает только две произвольные постоянные: t_0 (эпоха) и n (определяемое как среднее движение по долготе). Следующая стадия — полное решение уравнения (72) с членами с R'_s и z , равными нулю, что равносильно включению e , но с другой стороны равносильно удержанию нулевых значений для e^* , a/a^* и z . Основная часть этой стадии заключается в определении (решением бесконечного симметричного определителя) количества c_0 , где $(1-c_0)n$ представляет собой ту часть среднего движения перигея, которая зависит только от m . На последующих стадиях решения вычисляют изменения в решении уравнения (72) последовательным включением более высоких степеней малых параметров e^* , e , A/a^* и $\sin i/2$. Произвольные постоянные e и $\sin i/2$ определяются как коэффициенты основных периодических вариаций соответственно по долготе и в z ([76], том 53, стр. 69). Браун [76] довел решение до членов 6-го порядка, где порядком называется сумма (названная характеристикой) степеней e^* , e , A/a^* и $\sin i/2$ в произведении соответствующих членов. Цель вывода состояла в достижении точности $0'',01$. Окончательное выражение имеет около 900 периодических членов с числовыми коэффициентами. Браун ([76], том 59) вычисляет также влияния планет и влияния сжатия Земли и Луны.

Браун составил основанные на своем решении таблицы, которые были использованы для эфемерид Луны на период 1919—1951 гг. Ввиду небольших ошибок в таблицах, недостаточного числа членов и накопления ошибок округления эти эфемериды не подходили для геодезических целей. Для изучения движений Луны в течение коротких промежутков во время затмений 1945 и 1947 гг. Зундманом [79] и Хирвоненом [80] (ср. [5], стр. 128—146) были получены специальные численные решения. С появлением вычислительных машин уравнения Брауэра были запрограммированы для непосредственной машинной обработки, а дополнительные члены были выведены Эккертом [31, 77] в численном виде. Специальная эфемерида Луны [77] была составлена на 1952—1959 гг., а улучшенная эфемерида Луны, начиная с 1960 г., включается в регулярную эфемериду и обеспечивает точность в $0^s,001$ в прямом восхождении, $0'',01$ — в склонении и $0'',001$ — в параллаксе.

В § 4 и 5 были исследованы гравиметрические эффекты, вызывающие заметные влияния второго порядка. В этом параграфе будут исследованы влияния, представляющие наибольший геодезический интерес: влияния отклонения гравитационного поля Земли от гравитационного поля сплюснутого эллипсоида. Будут также исследованы численные решения для получения уточненных значений $\mu = kM$ и J_2 , поскольку наилучшие значения для этих параметров должны получаться одновременно с решением для меньших параметров.

Возмущающая функция и интегрирование

Гравиметрический потенциал Земли как сумма сферических гармоник может быть выражен в виде

$$U = \frac{\mu}{r} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_{nm} = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \times \right. \\ \times \left\{ J_n P_n(\sin \varphi) + \sum_{m=1}^n (J_{nm} \cos m\lambda + \right. \\ \left. + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right\} \Bigg], \quad (75)$$

где φ — геоцентрическая широта, отлицием которой от геодезической можно пренебречь при подсчете всех членов, кроме J_2 ; $P_n = P_{n0}$, а P_{nm} — обычные присоединенные функции Лежандра

$$P_{nm}(\sin \varphi) = \frac{\cos^m \varphi}{2^n \cdot n!} \sum_{t=0}^k \frac{(2n-2t)!}{(n-m-2t)!} \binom{n}{t} (-1)^t \sin^{n-m-2t} \varphi. \quad (76)$$

В (76) $k = (n-m)/2$ при четном $(n-m)$ и $k = (n-m-1)/2$ при нечетном $(n-m)$. В уравнении (75) широко используется наиболее употребительное обозначение для коэффициентов зональных гармоник J_n ,

введенное в [81] и принятое в [35, 38, 39, 40, 42, 59, 64]. Выражение для R_{nm} , приведенное к оскулирующим кеплеровским элементам [41], имеет вид

$$R_{nm} = \frac{a_e^n}{a^{n+1}} \sum_{p=0}^n F_{nmp}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{npq}(\cdot) S_{nmpq}(\omega, M, \Omega, \theta). \quad (77)$$

В этом выражении

$$F_{nmp}(i) = \sum_t \frac{(2n-2t)!}{t!(n-t)! 2^{2n-2t}} \sin^{n-m-2t} i \sum_s \binom{m}{s} \cos^s i \times \\ \times \sum_c \binom{n-m-2t+s}{c} \binom{m-s}{p-t-c} \frac{(-1)^{c-k}}{(n-m-2t)!}, \quad (78)$$

где t пробегает значения от 0 до меньшего из чисел p или k , s — от 0 до m , а c принимает все значения, приводящие к ненулевым значениям обоих биномиальных коэффициентов. Далее, в (77), при $q = 2p - n$,

$$G_{np(2p-n)}(c) = (1 - e^2)^{\frac{1}{2} - n} \sum_{d=0}^{p'-1} \binom{n-1}{2d+n-2p'} \times \\ \times \binom{2d+n-2p'}{d} \left(\frac{e}{2}\right)^{2d+n-2p'}, \quad (79)$$

где

$$p' = \begin{cases} p, & \text{если } p \leq \frac{n}{2}, \\ n-p, & \text{если } p \geq \frac{n}{2}, \end{cases}$$

а при $q \neq 2p - n$

$$G_{npq}(\cdot) = X_{(n-2p+q)}^{-(n+1); (n-2p)} \quad (80)$$

— коэффициенты Ганзена, разложенные по бесселевым и

гипергеометрическим функциям ([9], стр. 44—64), $G_{npq}(e)$ всегда имеет порядок $O(e^{|q|})$. Наконец,

$$S_{nmpq}(\omega, M, \Omega, \theta) = \left[\begin{matrix} -J_{nm} \\ K_{nm} \end{matrix} \right]_{(n-m) \text{ нечетное}}^{(n-m) \text{ четное}} \times \\ \times \cos \{ (n-2p)\omega + (n-2p+q)M + m(\Omega - \theta) \} - \\ - \left[\begin{matrix} K_{nm} \\ J_{nm} \end{matrix} \right]_{(n-m) \text{ нечетное}}^{(n-m) \text{ четное}} \cdot \sin \{ (n-2p)\omega + (n-2p+q)M + \\ + m(\Omega - \theta) \}, \quad (81)$$

где θ — гринвичское звездное время.

Обозначим производную от S_{nmpq} по ее аргументу через S'_{nmpq} , а интегралы от S_{nmpq} и S'_{nmpq} по времени, принимая при этом вековое изменение ω, M, Ω и θ , соответственно через $\overline{S}_{nmpq}$ и $\overline{S}'_{nmpq}$. Например,

$$\overline{S'_{nmpq}} = \frac{S_{nmpq}}{(n-2p)\dot{\omega} + (n-2p+q)\dot{n} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})}; \quad (82)$$

случай при четном n , $p=k$ и нулевых значениях q и m исключается.

В результате дифференцирования уравнения (77) по орбитальным элементам, подстановки производных в уравнения (29) и интегрирования по времени получим величину полного влияния первого порядка любого члена R_{nm} . Например, влияние на узел

$$\Delta \Omega_{nm} = a_e^n \mu \sum_{p, q} \frac{\frac{dF_{nmp}}{di} G_{npq} \overline{S}_{nmpq}}{na^{n+3} \sin i \sqrt{1-e^2}}. \quad (83)$$

При определении $\overline{S}_{nmpq}$ было принято, что ω, Ω и M изменяются секулярно. Пренебрегаемое, поскольку имеют вид гравитационные гармоники, влияние второго порядка несекулярных изменений этих элементов в случае спутников, достаточно высоких для их использования в гравиметрических целях, является наблюдаемым фактом. Величины ω и Ω определяются эмпирически при обработке наблюдений, как описано в § 2. При построе-

нии математической теории, имеющей точность порядка J_2^2 , величины $\dot{\omega}$ и $\dot{\Omega}$ выражаются как влияния J_2 первого порядка.

Вывод уравнений, аналогичных (77) — (83), приведенный Гровсом [82], отличается в основном тем, что в нем участвует более чем одна функция наклонности, подобные аргументы S_{nmpq} не объединяются в один член и упрощенная форма уравнения (79) не используется для определения долгопериодического члена G_{npq} . Мьюзен [52] получает члены R_{nm} в форме, удобной для их численного анализа с применением рядов Фурье в его теории движения спутника [50] ганзеновского типа.

Исследуя знаменатель выражения для $\overline{S'_{nmpq}}$ из уравнения (82), видим, что:

1) наибольшие возмущения имеют место при $m=0$, $n-2p+q=0$ (вековые и долгопериодические влияния зональных гармоник) и

2) член, содержащий $m \neq 0$, не приведет к влияниям с частотой, меньшей $m(\dot{\Omega}-\dot{\theta})$. Эти возмущения будут исследованы ниже.

Вековые и долгопериодические члены

Для основного векового или долгопериодического влияния зональной гармоники ($m=0$) возмущающая функция в уравнении (77) может быть упрощена до следующего выражения:

долгопериодическое

$$R_{n0} = -\mu J_n \frac{a_e^n}{a^{n+1}} F_{n0k}(i) G_{nk(2k-n)}(e) \times \\ \times \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ четное} \\ 2 \sin \omega, & \text{если } n \text{ нечетное} \end{cases} \quad (84)$$

Коэффициент 2 появляется потому, что уравнение (84) при нечетном n фактически является суммой двух равных членов: $p=k$ и $p=k+1$. В дополнение к основному члену $p=k$ при $n \geq 4$ будут иметь место другие долгопериодические влияния заметно меньшей величины, поскольку $G_{np(2p-n)}$ имеет порядок $e^{|2p-n|}$.

При вычислении частных производных из уравнения (84) и подстановке их в уравнения движения (29) J_n

при четном n приведет к возникновению вековых изменений в M , ω и Ω , но не будет влиять на a , e и i , а при нечетном n вызовет периодические вариации с частотой ω в e , i , M , ω и Ω . Влияния второго порядка для J_2 должны быть учтены, например, при помощи уравнений (58). Далее, как было указано Козаи [83], взаимодействия второго порядка между J_2 и J_n при нечетном n должны быть учтены при помощи уравнения (62) или другими средствами.

Вероятно, впервые движение спутника для определения гравитационного поля Земли применил в 1884 г. Гельмерт ([84], стр. 470), который по движению Луны, используя теорию Ганзена [71], получил $J_2 = 1084(\pm 12) \times 10^{-3}$. Тиссеран ([75], стр. 155—158) исследовал влияние J_3 на движение Луны и пришел к заключению, что оно пренебрегаемо мало.

Таблица 1

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗОНАЛЬНЫХ ГАРМОНИК ПО ДВИЖЕНИЯМ СПУТНИКОВ

Автор исследования	$J_2 \times 10^6$	$J_3 \times 10^7$	$J_4 \times 10^8$
Кинг-Хил [55]	$1082,78 \pm 0,15$		$-1,4 \pm 0,2$
О'Киф, Эккелс и Скуайрс [78]	$1082,49 \pm 0,06$	$-2,39 \pm 0,26$	$-1,70 \pm 0,06$
Козаи [85]	$1082,19 \pm 0,02$	$-2,29 \pm 0,02$	$-2,13 \pm 0,04$
Михилсен [86]	1082,66	-2,5	-1,72

Примечания: 1. В графе «Тип наблюдений» символом RI обозначены радиолокационные наблюдения, O — оптические наблюдения, КТ — кинотеодолитные.

2. В графе $J_3 \times 10^7$ в величине $-0,30$ исправлена арифметическая ошибка.

3. В графе «Продолжительность в днях» при наблюдениях Михилсена [86] — по две недели (или менее) каждая, разделенные промежутком в два-три

С 1957 г. влияние долгопериодических и вековых эффектов на орбиты близких спутников, которые (эффекты) возникают от возмущающей функции, определенной в уравнении (84), с целью получить улучшенные численные оценки величин J_n было предметом около 40 статей и докладов. В табл. 1 приведены опубликованные в последнее время результаты, полученные Кинг-Хилом [60], О'Кифом с сотрудниками [78], Козаи [85] и Михилсеном [86]. Другие сводки результатов приведены в [42, 43, 60, 87].

Кроме величин, приведенных в табл. 1, Михилсен [86] получил оценки величин $J_7(0,6 \cdot 10^{-6})$, J_8 и J_9 , которые, однако, мало надежны.

Результаты, полученные различными авторами, как обычно бывает в подобных случаях, расходятся больше, чем на соответствующие стандартные отклонения, опре-

$J_2 \times 10^6$	$J_4 \times 10^6$	Используемые движения	Тип наблюдений	Продолжительность в днях	h_T , км	Орбиты	
						e	i
	$0,9 \pm 0,8$	$\dot{\Omega}$	RI R, O KT	267 120 130	650 550 230	0,19 0,03 0,67	34° 50° 65°
$-0,30 \pm 0,53$		$\dot{\Omega}, \dot{\omega}$ $\Delta e, \Delta \omega,$ $\Delta \Omega$	Ri	300	650	0,19	34°
$-0,23 \pm 0,02$		$\dot{\Omega}, \dot{\omega}$	BN, RI	90	650	0,19	34°
		$\Delta e, \Delta \omega$	BN, RI	90	510	0,19	33°
		$\Delta \Omega, \Delta i$	BN, RI	50	550	0,03	50°
$+0,25$	0,73	$\dot{\Omega}, \dot{\omega}$	RI	≈ 900	650	0,19	34°
		Δe	O	75	290	0,03	51°
			O	75	280	0,03	65°

интерференционные наблюдения (с применением системы Минитрек). R—радионаблюдения. BN—наблюдения с камерой Бейкера—Нанна.

имеющаяся в [78].
для каждого о спутника были использованы две серии наблюдений, продолжительностью.

деленные по внутренней сходимости. Расхождения, вероятно, не являются следствием каких-либо недостатков в гравитационной теории: лунно-солнечные члены и члены второго порядка J_2 были использованы во всех случаях, а влияние зональных гармоник, высших J_6 , должно быть небольшим. Кроме того, во всех исследованиях вековые влияния сопротивления атмосферы исключались до определения величин J_n . В таблице перечислены лишь наиболее существенные данные о продолжительности наблюдений, орбитах и средствах наблюдений. Дополнительные данные, которые представляли бы интерес, но которые невозможно получить из опубликованных материалов без известного труда, это:

диапазон широт, в пределах которого были произведены наблюдения;

полное движение перигея относительно Солнца в течение периода наблюдений;

полное движение узла относительно Солнца для наблюдений, использующих отраженный свет.

Из причин погрешностей, более подробно рассмотренных в § 6, на результаты Кинг-Хила [60], возможно, повлиял ввиду сопротивления атмосферы и наблюдений посредством теодолитов высокий уровень шума от спутника 1957 β ($h_\pi = 230$ км); на результаты О'Кифа и других повлияло единообразие элементов орбит и систематические ошибки радиоинтерференционных измерений; на результаты Козаи — кратковременность периода наблюдений, которая могла привести к некоторой геометрической неопределенности в наблюдениях отраженного солнечного света, и, наконец, на результаты Михилсена — кратковременность периода наблюдений и высокий уровень шума при наблюдениях и от торможения при оптическом наблюдении спутников с низким перигеем.

Величина J_3 , кроме значений, приведенных в табл. 1, дана Козном и Андерлом [88] на основе доплеровских наблюдений спутника 1960 γ_1 (Transit 1 b): $J_3 = -2,3 \times 10^{-6}$. В дополнение к различиям в спецификациях спутников, орбитах и средствах наблюдения Козн и Андерл, кроме того, вычислили орбиту при помощи численного интегрирования в прямоугольных координатах, как было описано в § 3. Этот метод вычисления эффективно исключал всякую возможность пропуска членов порядка J_2^2 в аргументе ω , которую предположили Бреннер и

другие [89], ошибочно полагавшие, что аномалия промежуточной орбиты определяется как в уравнении (47).

Ньютон [258] недавно получил по орбитам спутников $1958\beta_2$, $1960\gamma_1$ и $1960\eta_2$ следующие данные: $J_3 = -(2,42 \pm \pm 0,10) \cdot 10^{-6}$; $J_5 = -(0,22 \pm 0,07) \cdot 10^{-6}$ и $J_7 = -(0,27 \pm \pm 0,07) \cdot 10^{-6}$.

Поскольку расхождения результатов, вероятно, вызваны различием методов обработки результатов наблюдений в такой же мере, как и неточностью исходных данных, трудно разумно согласовать значения, приведенные в табл. 1. Приемлемыми оценками могут служить значения $J_2 = (1082,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-6}$; $J_3 = -(2,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-6}$; $J_4 = -(1,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-6}$; $J_5 = -(0,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-6}$.

Кроме определения зональных гармоник, уместно сказать и об определении основного члена потенциала ($kM = \mu$), определяемого в основном по среднему движению и третьему закону Кеплера из уравнения (6). Необходимым для этого видоизменением уравнения (6) для близких спутников является уравнение (58) плюс члены, учитывающие торможение вследствие влияния атмосферы и высшие четные зональные гармоники.

Для Луны соответствующим уравнением будет (74). Если измерять период наблюдений в периодах спутников, то наблюдения спутника $1958\beta_2$ уже намного превосходят современные наблюдения Луны. Однако, помимо затруднений в устранении влияний торможения из среднего движения близких спутников, необходимый для получения kM линейный масштаб определяется относительным положением прослеживающих станций, точность которого (положения) зависит от точности связывающей их геодезической триангуляции. Таким образом, основной причиной, ограничивающей точность определения kM , является точность наземных данных. Независимое от указанного обстоятельства определение может быть получено, если выводить масштаб по измеренному расстоянию до спутника, а это делает наиболее подходящим объектом для определения kM Луну. Можно считать, что неопределенность в значениях $\beta = 0,00090768$ и $n = 2,6616997 \cdot 10^{-6}$ радиан/сек ([76], том 57, стр. 109) в уравнении (74) пренебрегаемо мала. Отношение μ_M/μ_E или, скорее, равная ему величина (пропорциональное смещение центра масс Земли относительно центра масс системы Земля — Луна) определяется по вариациям па-

раллакса при наблюдениях малой планеты Эрос в период ее максимального приближения к Земле. Последние определения таковы: Джеффрис [259] (с использованием данных Спенсера Джонса) — $1/81,291 \pm 0,027$; Рейб [90] — $\mu_M/\mu_E = 1/81,375 \pm 0,026$ и Делано [91] — $1/81,219 \pm 0,030$. Величина, полученная Рейбом, является более надежной, так как он для определения поправок в орбиту Эроса и Земли, в массы четырех внутренних планет и в равноденствие и экватор эпохи использовал данные за 19 лет. Величина Делано ограничивается определением поправок в орбиту Эроса и в среднее движение Земли в течение восьми месяцев в период максимального приближения Эроса к Земле в 1930—1931 гг. Наименее уверенной в уравнении (74) величиной является среднее расстояние A . До недавнего времени основным методом определения A был по существу метод триангуляции (наблюдение покрытий звезд Луной с пунктов одной и той же геодезической сети). Последние определения были произведены О'Кифом и Андерсеном [92] и Фишер [251]. В настоящее время более точным является радиолокационное измерение расстояния до Луны. Программа таких измерений была выполнена Япли с сотрудниками [93, 94, 95]. Их последний результат: $A = 384\,402 \pm 1,2$ км [95], откуда, используя значения μ_M/μ_E Рейба, получаем $kM = (3,986141 \pm 0,000040) \cdot 10^{14}$ м³/сек² и $3,986048 \times 10^{14}$ м³/сек² при использовании значения, данного Делано.

Суточные и короткопериодические члены

Первая оценка влияния тессеральной или секториальной гармоник на орбиту спутника была произведена О'Кифом и Батчлором [96], которые показали, что секториальная гармоника J_{22} , полученная Джеффрисом ([97], стр. 187), должна привести к легко наблюдаемому полусуточному колебанию круговой орбиты. Более общее исследование [41], в котором были использованы значения амплитуд, вычисленные по автоковариантному анализу наземных гравиметрических данных [98], показывает, что члены четного порядка, как, например, $nt = 22, 41, 42, 61$, должны привести к суточным и полусуточным колебаниям порядка ± 100 м в орбитах с большой полуосью, меньшей 10^4 км, тогда как члены нечетного порядка, как

например, $nm=31, 32$, должны вызвать сравнимые эффекты для орбит с эксцентриситетом 0,2. Кроме того, показано, что сумма влияний всех гравиметрических гармоник с частотой n или более высокой (за исключением влияний J_2) должна иметь порядок ± 50 м или меньше. Поэтому для оценки тессеральных и секториальных гармоник возмущающая функция (77) может быть выражена в виде:

$$R_{nm} = \frac{\mu a_e^n}{a^{n+1}} \sum_{p=1}^{n-1} F_{nmp}(i) G_{np(2p-n)}(\epsilon) \times \left. \begin{aligned} & \times \left[\left\{ \begin{array}{l} -J_{nm} \\ K_{nm} \end{array} \right\}_{n-m \text{ четное}}^{n-m} \cos \{(n-2p)\omega + m(\Omega - \theta)\} - \right. \\ & \left. - \left\{ \begin{array}{l} K_{nm} \\ J_{nm} \end{array} \right\}_{n-m \text{ нечетное}}^{n-m} \sin \{(n-2p)\omega + m(\Omega - \theta)\} \right] \end{aligned} \right\}, \quad (85)$$

где F_{nmp} и $G_{np(2p-n)}$ определяются соответственно уравнениями (78) и (79).

Полученные к настоящему времени значения тессеральных и секториальных гармоник по наблюдениям с камерами Бейкера — Нанна [99, 260] вероятно искажены в результате взаимодействия неоднородно распределенных наблюдений, а также вследствие ошибок исходных данных. Значения, основанные на радиоинтерференционных измерениях системой Минитрек [100, 261], искажены ошибками ориентировки антенн. Результаты, достаточно близкие к действительным значениям, получены до сих пор лишь для R_{22} и R_{41} Козаи [260] по данным 66 дней наблюдений трех спутников с камерами Бейкера — Нанна:

$$J_{22} = -0,60 \pm 0,19 \cdot 10^{-6}, \quad K_{22} = +2,24 \pm 0,19 \cdot 10^{-6};$$

$$J_{41} = +0,25 \pm 0,04 \cdot 10^{-6}, \quad K_{41} = -0,08 \pm 0,03 \cdot 10^{-6};$$

и Каулой [261] из 385 дней наблюдений одного спутника при помощи системы Минитрек

$$J_{22} = -0,38 \pm 0,59 \cdot 10^{-6}, \quad K_{22} = +1,64 \pm 0,58 \cdot 10^{-6};$$

$$J_{41} = -1,12 \pm 0,14 \cdot 10^{-6}, \quad K_{41} = +0,26 \pm 0,15 \cdot 10^{-6}.$$

Вариации орбит спутников можно рассматривать как стохастический временной ряд с добавлением дискретного спектра за счет гравитационных влияний и непрерывного спектра за счет торможения. Однако литература по исследованию временных рядов (например, [22, 101, 102]) здесь мало помогает, потому что для близких спутников преобладающим со статистической точки зрения свойством является неоднородное распределение наблюдений. Эта неоднородность вызвана в основном геометрическими ограничениями: на каждой данной станции наблюдения всегда будут производиться в интервалы времени, когда спутник находится в пределах нескольких градусов от значений углов $\Omega - \theta$ и $\omega + f$, соответствующих зениту станции. В случае оптических наблюдений, кроме того, имеют место ограничения вследствие их зависимости от освещения спутника Солнцем. Поскольку в уравнении (85) основным аргументом в случае четного n является $m(\Omega - \theta)$, а в случае нечетного $n - m(\Omega - \theta) \pm \pm \omega$, для любого периода наблюдений влияния гравиметрических членов четного порядка (а для коротких периодов наблюдений влияния членов нечетного порядка) при наблюдении с одной или нескольких станций трудно отделить друг от друга или от влияний местоположения станции, ориентировки и от ошибок определения времени. Кроме того, неоднородное распределение наблюдений увеличивает искажение вычисляемых R_{nm} за счет влияний более длинного периода, как, например, за счет торможения и лунно-солнечного притяжения, и увеличивает поглощение эффектов от R_{nm} параметрами опорной орбиты.

Разнообразные взаимодействия, влияющие на определение тессеральных и секториальных гармоник по данным орбит спутника, более подробно исследованы в [261], где предлагается:

1) использовать наблюдения в течение нескольких оборотов узла и перигея;

2) приписывать наблюдениям веса, обратно пропорциональные их плотности относительно $\Omega - \theta$;

3) использовать априорно взвешенные оценки параметров исходных данных и гравитационных коэффициентов в соответствии с уравнениями (137) и (138);

4) использовать опорные орбиты, определяемые по меньшей мере из 50 наблюдений;

5) учитывать вековые и долгопериодические ускорения по крайней мере 0,15 $\mathcal{W}$ параметрами ($\mathcal{W}$ — количество суток, покрываемое опорной орбитой). Физические причины, вызывающие эти рекомендации, дополнительно рассмотрены в § 7, а геометрические — в § 10.

Интересной возможностью, которую следует упомянуть в связи с тессеральными и секториальными гармониками, является резонанс, т. е. при возмущающей функции (77) и (81) условие

$$(n - 2p) \dot{\omega} + (n - 2p + q) n + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta}) = 0, \quad (86)$$

рассмотренное Гровсом [82] и Куком [103].

Из третьего закона Кеплера [см. уравнение (6)] следует

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{\frac{\mu}{n^2}} \approx \sqrt[3]{\mu} \left[\frac{m}{n - 2p + q} (\dot{\theta} - \dot{\Omega}) \right]^{-\frac{2}{3}} > \\ &> \sqrt[3]{\frac{\mu}{m^2 \dot{\theta}^2}}, \end{aligned} \quad (87)$$

откуда значения больших полуосей резонансных орбит будут: 42 200 км для $m=1$, 26 000 км для $m=2$, 20 300 км для $m=3$ и т. д. Эти условия, вероятно, будут осуществлены в связи с системами связи при помощи ИСЗ, для которых необходима орбита $\dot{\Omega} + \dot{\omega} + n = \dot{\theta}$, близкая к круговой. Лунно-солнечные влияния окажутся в этом случае небольшими даже при $a=42\,200$ км.

Приливные влияния

Исторически наиболее известные геофизические применения астрономических данных состояли в их использовании для изучения векового ускорения движения Луны, замедления вращения Земли и выведенного из этого рассеяния энергии в Земле. Вековое ускорение Луны было впервые обнаружено в XVII в., а его геофизическое объяснение (приливным трением) предложено в XVIII в., однако математическое определение этого ускорения было предметом полемики еще в XIX в. ([75], стр. 240—256). Само геофизическое объяснение нельзя считать

твёрдо установленным и в XX в. ([97], стр. 230—263), ([104], стр. 198—249).

Бликие спутники не могут помочь в решении проблемы приливного трения, однако искажение орбит спутников лунным и солнечным возмущениями (67) наводит на мысль, что они могут заметно возмущаться приливами, которые происходят на Земле, но которые плохо определены для большей части ее поверхности.

Примем обычное разделение приливов на приливы земной коры и морские приливы.

Потенциал, вызванный приливами земной коры, может быть представлен [105] в виде

$$R_T = K(r) R_s. \quad (88)$$

Здесь K на поверхности Земли — число Лява k , которое будем считать постоянным. Примем также, что в уравнении (67) существен только член с $P_2(S)$. Вследствие этих предположений R_T на поверхности Земли оказывается гармоникой второго порядка, которая поэтому экстраполируется пропорционально $(a_e/r)^3$. При подстановке $r = a_e$ в уравнение (67) и использовании уравнения (69) оказывается, что

$$R_T = \frac{k_{\perp}^* a_e^2}{r^{*3}} \left(\frac{a_e}{r} \right)^3 \sum_i F_i(\gamma, \gamma^*) \cos \{a_i(f + \omega) + b_i(f^* + \omega^*) + c_i \Delta \Omega\} \quad (89)$$

Для определения долгопериодических членов применим уравнения (7) и (8) для интегрирования по средней аномалии
долгопериодическое

$$R_T = \frac{k_{\perp}^* a_e^2}{r^{*3}} \left(\frac{a_e}{r} \right)^3 \sum_{i \neq l} F_i(\gamma, \gamma^*) \times \\ \times \sum_j G_j(e^*) \cos \{b_i \omega^* + (b_i + j) M^* + c_i \Delta \Omega\}, \quad (90)$$

где $a_e = 2$.

Так как R_T пропорционально r^{-3} , (а не r^2 как R_s), то долгопериодических членов, содержащих 2ω , которые наиболее ощутимы в R_s , здесь нет.

Для членов с $a_i = 0$

$$R_T \approx k (a_e/a)^5 R_s.$$

При типичных значениях $k=0,3$, $a=8,0 \cdot 10^6$ м и $a_e=6,37 \cdot 10^6$ м, $R_T \approx 0,1 R_s$.

Для морских приливов существенными становятся размеры океанических бассейнов. Приближение к резонансу может привести к более чем десятикратному возрастанию приливов относительно равновесного прилива (амплитуда которого менее метра).

Общий вид морских приливов представляется амфидромными системами [106]: линии равных фаз исходят из узлов, расположенных друг от друга на угол порядка 60° . Величину прилива в любой точке можно выразить через

$$\begin{aligned} \zeta(\varphi, \lambda, t) = \sum_i \zeta_i(\varphi, \lambda) \cos \{b_i(f^* + \omega^*) + c_i \Omega^* \pm \\ \pm \theta + d_i(\varphi, \lambda)\} = \sum_{i, n, m} \zeta_{inm} P_{nm}(\sin \varphi) \\ \cos \{b_i(f^* + \omega^*) + c_i \Omega^* \pm \theta + m\lambda + d_{inm}\}. \end{aligned} \quad (91)$$

Из формулы для потенциала поверхностного слоя коэффициент потенциала равен

$$J_{inm} = - \frac{4\pi k a_e^2}{(2n+1)\mu} \rho_w \zeta_{inm} \quad (92)$$

где k , как и раньше, — гравитационная постоянная, а ρ_w — плотность воды.

Ввиду сложности вида морских приливов вряд ли какое-нибудь ζ_{inm} превзойдет 1 м в нормированных гармониках, хотя полный прилив может быть довольно значителен. Приняв нормированное ζ_{i22} равным 1 м, получим J_{i22} , равное 10^{-8} , что на два порядка меньше чем J_{22} , упомянутое ранее. Поэтому, чтобы любой морской прилив ζ_{inm} имел ощутимое влияние, его аргумент, считая что уравнение (91) приведено к орбитальным элементам аналогично уравнению (77), должен приводить к частотам порядка 0,01 циклов в сутки.

Релятивистские влияния

Наибольшим релятивистским влиянием является вековое движение перигея ([107], стр. 217).

$$\dot{\omega} = \frac{3\mu}{c^2 a (1 - e^2)} n = \frac{3\mu^{1/2}}{c^2 a^{1/2} (1 - e^2)}, \quad (93)$$

где c — скорость света.

В табл. 2 сравниваются релятивистские влияния на спутники с эксцентриситетом 0,20 и наклонностью 0° с влияниями, ожидаемыми от зональных гармоник четного порядка и увеличенными до максимальных значений для экваториальных орбит. Зональные гармонические влияния были вычислены с использованием амплитуд по результатам автоковариационного анализа [98] по уравнениям (84) и (29).

Таблица 2

СРАВНЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ВЛИЯНИЯ И ВЫЧИСЛЕННОГО ВЛИЯНИЯ
ЗОНАЛЬНЫХ ГАРМОНИК НА ДВИЖЕНИЕ ПЕРИГЕЯ

Наклонность 0, эксцентриситет 0,2			
Большая полуось, км	Релятивистское $\dot{\omega}$, сек $^{-1}$	J_2 $\dot{\omega}$, сек $^{-1}$	J_4 $\dot{\omega}$, сек $^{-1}$
10^4	$8,66 \times 10^{-13}$	$9,10 \times 10^{-7}$	$1,76 \times 10^{-9}$
2×10^4	$1,54 \times 10^{-13}$	$8,02 \times 10^{-8}$	$3,89 \times 10^{-11}$
3×10^4	$5,50 \times 10^{-14}$	$1,94 \times 10^{-8}$	$4,18 \times 10^{-12}$
4×10^4	$2,69 \times 10^{-14}$	$7,04 \times 10^{-9}$	$8,6 \times 10^{-13}$

Продолжение табл. 2

Наклонность 0, эксцентриситет 0,2		
$\sigma \{J_6\}$ $\dot{\omega}$, сек $^{-1}$	$\sigma \{J_8\}$ $\dot{\omega}$, сек $^{-1}$	$\sigma \{J_{10}\}$ $\dot{\omega}$, сек $^{-1}$
$\pm 8,1 \times 10^{-10}$	$\pm 4,3 \times 10^{-10}$	$\pm 2,0 \times 10^{-10}$
$4,5 \times 10^{-12}$	$5,9 \times 10^{-13}$	$6,9 \times 10^{-14}$
$2,1 \times 10^{-13}$	$1,3 \times 10^{-14}$	$6,5 \times 10^{-16}$
$\pm 2,5 \times 10^{-14}$	$\pm 8,2 \times 10^{-16}$	$\pm 2,4 \times 10^{-17}$

Из данных табл. 2 видно, что релятивистское влияние можно не принимать во внимание при определении J_{10} или более низких зональных гармоник по близким спутникам и, наоборот, что аномальные вариации в гравитационном поле могут оказаться серьезной помехой наблюдениям релятивистского движения перигея для спутников с высотой менее 10^4 км. Более того, уравнение (93), как это уже было подтверждено орбитой Меркурия, не является следствием чисто релятивистского влияния, представляющего основной интерес. Влияния, представляющие интерес для исследователей релятивизма [108, 109, 110, 111], порядка в 10^{-2} раз меньше (влияние вращения Земли и ее скорости на орбите, релятивистская поправка к влиянию J_2 , разность между атомным и гравитационным временем, вековые изменения гравитационной постоянной и т. д.). Трудности в получении этих влияний из орбит слишком низких спутников заключаются в трудности выделения влияния торможения и земных гравитационных влияний, а для слишком высоких спутников — сложных влияний лунно-солнечных возмущений (67) высших порядков.

§ 7. НЕГРАВИТАЦИОННЫЕ ВЛИЯНИЯ

Полагая, что для достижения геодезических целей негравитационные влияния должны быть исключены или в возможно большей степени ослаблены, исследуем поочередно физическое влияние механического торможения атмосферой, электромагнитных влияний и давления радиации на орбиту близкого спутника. Выясним, в какой степени явления, вызывающие эти влияния, были выражены в экспериментальных или теоретических моделях и в какой степени измеренные вариации орбит остаются необъясненными и, наконец, обсудим значение этих результатов для точного описания орбит, необходимого для их геодезического применения.

Механическое торможение

На высотах спутников, используемых в геодезических целях, средний свободный пробег частиц воздуха по сравнению с диаметром спутника велик. Соображения, касающиеся переноса количества движения между

лекулами воздуха и спутником, приводят к уравнению для силы, действующей на спутник [112, 113, 114]

$$F_d = -m \frac{C_D}{2} \left(\frac{A}{m} \right) \rho(r) \dot{\mathbf{r}} |\dot{\mathbf{r}}|, \quad (94)$$

где A — площадь поперечного сечения спутника, ρ — плотность воздуха и C_D — коэффициент, зависящий от формы спутника и механизма отражения частиц воздуха. В случае зеркального упругого отражения от сферы $C_D=2,0$, для диффузного отражения $C_D=2,67$. Обычно используют какое-либо промежуточное значение. Таким образом, в уравнениях (16) и (17) $b(r)$ равно $(C_D/2) \times \times (A/m) \rho(r)$. Так же, как и в § 1—6 примем первый множитель m в уравнении (94) равным единице. Подстановка F_d в лагранжевы уравнения для ортогональных компонентов силы ([9], стр. 151), ([15], стр. 301) приводит [114, 115] к

$$\frac{dP}{dt} = -3C_D \left(\frac{A}{m} \right) a \int_0^\pi \sqrt{\frac{(1+e \cos E)^3}{1-e \cos E}} \rho(r) dE, \quad (95)$$

где период $P=2\pi/n$. Уравнение (95) является точным. Далее необходимо принять какое-либо правило для распределения плотности атмосферы при изменении высоты $\rho(r)$. Проще предположить также постоянство температуры и наличие гидростатического равновесия, которые приводят к

$$\rho = \rho_\pi e^{-(r-r_\pi)/H}, \quad (96)$$

где индекс π относится к перигею, а H порядка 100 км, обозначает масштабную высоту. До решения уравнения (95) относительно P и других элементов Кинг-Хил [115, 116] и Стерн [114, 117] вводят вращение атмосферы, которое наиболее просто выражается умножением силы (94) на коэффициент

$$(1 - r_\pi \dot{\theta} \cos i / |\dot{\mathbf{r}}_\pi|),$$

находящийся в интервале от 0,9 до 1,1. Затем интеграл оценивается разложением в степенной ряд по e , что наиболее удобно осуществляется в бесселевых функциях

первого рода с мнимым аргументом $J_n(a_e I \dot{H})$. Скорость убывания ρ в уравнении (96) такова, что для всех орбит, кроме фактически круговых, торможение происходит главным образом в окрестности перигея. Основные члены в результирующих уравнениях для определения эксцентриситета, радиуса перигея и периода таковы [116]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e}{e_0} &= \sqrt{1 - \frac{t}{t_L}} \left\{ 1 - \frac{e_0}{6} \left(1 - \frac{19}{3} e_0 \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 - \sqrt{1 - \frac{t}{t_L}} \right) - \dots \right\} \\ r_{\pi_0} - r_{\pi} &= \frac{H}{2} \left\{ \sqrt{1 - \frac{t}{t_L}} - 1 - \dots \right\} \\ \frac{P}{P_0} &= 1 - \frac{3e_0}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{t}{t_L}} \right) \times \\ &\quad \times \left\{ 1 + \frac{e_0}{12} \left(17 \sqrt{1 - \frac{t}{t_L}} - 3 \right) + \dots \right\} \end{aligned} \right\}, \quad (97)$$

где время существования спутника

$$t_L = - \frac{3e_0 P_0}{4\dot{P}_0} \left\{ 1 + \frac{7e_0}{6} + \frac{H}{2a_0 e_0} + \dots \right\}. \quad (98)$$

Также применима формула

$$\rho_{\pi} = - \frac{\dot{P}_m}{3AC_D} \sqrt{\frac{2e}{\pi a H}} \left[1 - 2e - \frac{H}{8ae} + \dots \right]. \quad (99)$$

Уравнения (97) указывают, что расстояние до перигея убывает намного медленнее эксцентриситета и периода. Это наводит на мысль о том, что для гравитационных исследований влияние сопротивления атмосферы может быть получено эмпирически по изменению среднего движения и по вычисленным (по этому изменению) малым влияниям второго порядка на другие

элементы при постоянном расстоянии до перигея. Этим соображением воспользовались О'Киф с сотрудниками [78], получившие

$$\left. \begin{aligned} \Delta e &\approx -\frac{2}{3}(1-e)\frac{\Delta n}{n_0} \\ \Delta \omega &= \frac{4-5\sin^2 i}{4(1-e^2)^2} \cdot \frac{7-e}{1+e} J_2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \Delta M \\ \Delta \Omega &= -\frac{\cos i}{2(1-e^2)} \cdot \frac{7-e}{1+e} J_2 \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \Delta M \end{aligned} \right\}, \quad (100)$$

где Δn может быть определено из уравнения (66) или из суммы таких членов для различных сегментов, для которых

$$\begin{aligned} \Delta M &= \int n n_2 t dt \approx \sum_i n_i n_{2i} \frac{\Delta t_i^2}{2} = \\ &= n_0 \sum_{i=1}^k n_{2,i} \Delta t_i \left(\frac{\Delta t_i}{2} + \sum_{i=j+1}^k \Delta t_j \right), \end{aligned} \quad (101)$$

где n_2 — величина, противоположная $\dot{P}/P$.

Брауэр и Хори [118], ([15], стр. 574—582) развили каноническую теорию торможения, в которой предполагается экспоненциальная зависимость плотности атмосферы от высоты вида (96) и которая принимает во внимание связь торможения со сжатием Земли (J_2). Ижак [119] получил выражения для короткопериодических возмущений, вызванных торможением экспоненциальной атмосферой, откуда при $e=0,10$ и $\rho_\pi = 1,9 \cdot 10^{-12}$ г/см³ получил колебания около векового изменения примерно в 0,6 км в большой полуоси, +0°,02 в средней аномалии и —0°,008 в аргументе перигея, причем почти все они происходят в пределах 30° от перигея.

Яккья [120] и Гровс [121] рассматривают влияние дополнительного члена в масштабной высоте

$$H = H_\pi + \beta(r - r_\pi). \quad (102)$$

Существующие модели атмосферы показывают, что β может доходить до 0,2. Относительная ошибка при определении $\dot{P}$ из уравнения (95) при постоянном H не пре-

восходит $\beta/2$ и лишь слегка изменяется с эксцентриситетом [120].

Вращение атмосферы [117, 122] вызывает небольшое уменьшение скорости убывания периода, среднего расстояния и эксцентриситета, а также постепенное убывание наклонности орбиты прямого движения (для орбиты с обратным движением имеет место перемена знаков) плюс вариация частоты 2ω в узле. Для спутника 1958 β_2 ($h_\pi = 650$ км) вычисленная скорость изменения наклонности составляет $-0'',004/\text{сутки}$ [117].

Влияние сплюснутости атмосферы [117, 123] вызывает колебания с частотой 2ω .

Электромагнитные влияния

Спутник движется в частично ионизированной среде и в магнитном поле и большую часть времени в поле излучения Солнца. Ожидаемые результирующие электромагнитные влияния обуславливаются следующими [113, 124] явлениями.

(а). Спутник бомбардируется электронами, движущимися с намного большей скоростью, и таким образом приобретает отрицательный заряд.

(b). Во время пребывания спутника в освещенной Солнцем зоне этот заряд может увеличиться вследствие возрастания числа электронов с высокими энергиями.

(с). Когда спутник находится в освещенной Солнцем зоне, этот заряд может уменьшиться вследствие фотоэмиссии электронов.

(d). Отрицательный заряд спутника вызывает электростатическое отклонение положительных ионов, движущихся медленнее спутника, вследствие чего в результате переноса количества движения спутник испытывает торможение.

(e). Притяжение отрицательно заряженным спутником положительных ионов вызывает возрастание числа столкновений и, следовательно, увеличение механического торможения.

(f). Более быстрое по сравнению с движением ионов движение спутника имеет следствием несимметричное распределение заряда, которое видоизменяет влияния (d) и (e).

(g). Движение спутника поперек геомагнитного поля индуцирует в спутнике электродвижущую силу, влияющую на распределение случайных электронов (a) и, следовательно, на распределение отрицательного заряда.

(h). Заряд спутника возрастает, если на нем установлен мощный радиопередатчик.

(i). Неоднородный вследствие влияний (f), (g) и (h) заряд вызывает электрический ток в спутнике, который, взаимодействуя с геомагнитным полем, вызывает дополнительное механическое торможение.

По оценкам Джастроу и Пирса [113] и Бирда и Джонсона [124] возросшее механическое торможение, вызванное причиной (e), намного более важно, чем чисто электростатическое торможение вследствие причины (d) или взаимодействия с магнитным полем (i) (кроме, возможно, спутников, с диаметром большим 50 м на высотах, превышающих 1200 км [124]). Величина полных электромагнитных влияний на торможение сравнительно с нейтральным механическим торможением зависит от величины потенциала спутника, вызванного причиной, указанной в (a), а также его изменениями, указанными в (b), (c), (f), (g) и (h). Джастроу и Пирс [113] приняли среднюю энергию электрона равной 1,5 эв и получили, что спутник может приобрести потенциал —30 в, и в этом случае торможение от заряда может оказаться ощутимым. Используя более современные сведения об атмосфере, Бирд и Джонсон [124] принимают среднюю энергию электрона в 0,1 эв, что с учетом влияния (g) приводит к заряду спутника в несколько десятых долей вольта, подтвержденному измерениями на ракетах. Подобный небольшой заряд свидетельствует о малой величине электромагнитных влияний сравнительно с флуктуациями нейтрального механического торможения, вызванного атмосферой.

Все электромагнитные влияния действуют так, что увеличивают вектор силы торможения в уравнении (94) и вследствие этого увеличивают величину влияний (97). Поэтому если характер влияния рассеяния кинетической энергии спутника устанавливают эмпирически, то электромагнитные влияния смешиваются с эффектом нейтрального торможения. К настоящему времени не наблюдается никаких орбитальных влияний, которые можно было бы приписать электромагнитным влияниям. Если по-

следние и объясняют часть расхождения данных наблюдений с выводами теории, то эта часть мала по сравнению с атмосферными вариациями, вызванными действием Солнца. Однако теория электромагнитных влияний все еще несовершенна и нельзя заведомо отрицать, что эти влияния могут иметь значение для спутников, представляющих геодезический интерес, с высотами перигеев более 1200 км. В недавно опубликованном обширном обзоре Чопра [279] выражено сомнение по поводу многих выводов Джастроу и Пирса [113] и Бирда и Джонсона [124] и при отрицании большинства выводов относительно плотности воздуха, изложенных несколько ниже, электромагнитные влияния для высот, превышающих примерно 300 км, считаются важнее механического торможения.

Давление излучения

Поток энергии S , падающий на поверхность под углом θ к нормали, вызывает давление, нормальное к поверхности и равное ([125], стр. 616).

$$P_n = (1 + \kappa) \frac{Sn}{c} \cos \theta, \quad (103)$$

где c — скорость света, а коэффициент $(1 + \kappa)$ изменяется от единицы (полное поглощение) до двух (полное зеркальное отражение).

Поэтому сила, действующая на тело, определяется векторным интегрированием уравнения (103) по освещенной поверхности. Давление солнечной радиации является известной величиной (вблизи Земли S равно $1,4 \cdot 10^6$ эрг/см² в секунду [133]), если не считать неопределенности коэффициента отражения κ для некоторых спутников. Давление солнечной радиации было впервые успешно использовано для объяснения долгопериодических расхождений порядка 2 км в орбите спутника 1958β₂ [126, 127] и, как с тех пор было достаточно подтверждено большим спутником Echo [128, 129, 130], включает зеркальное отражение.

Мьюзен [131] исследовал долгопериодические влияния давления солнечной радиации, пренебрегая влиянием тени Земли. Эти долгопериодические влияния состоят из шести членов по числу вариаций каждого орбитального

элемента, причем аргументы этих шести членов содержат в себе все возможные комбинации вида

$$\text{Arg} = \omega + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \Omega + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} (f^* + \omega^*). \quad (104)$$

Комбинация

$$\omega + \Omega - (f' + \omega')$$

вызывает 890-суточный период в спутнике 1958 β_2 и объясняет большую часть 2-км возмущения. Мьюзен, кроме того, исследовал случай резонансного спутника, перигей которого следует за Солнцем.

Достаточно разработанная теория влияния давления излучения должна включать короткопериодические члены, так как существуют долгопериодические вариации ориентирования орбиты относительно тени Земли [132]. Эти вариации существенны, потому что они вызывают долгопериодические вариации большой полуоси или энергии орбиты. Для случая перигеев, расположенных выше 1000 км, результирующие ускорения превосходят ускорения, вызванные торможением, и являются предметом обширных исследований орбиты спутника 1960 $_{11}$ [262, 263].

Имеет место также давление и земного излучения. В среднем 36% полной инсоляции отражается или рассеивается, а 64% поглощается и после перераспределения по широте излучается вновь [133]. Отраженная часть (36%) в основном направлена противоположно непосредственному солнечному излучению, тогда как вновь излученная часть (64%) в основном направлена противоположно главному гравитационному члену и поэтому сомнительно, чтобы давление земного излучения могло быть когда-либо установлено в орбите спутников.

Наблюдаемые вариации и теоретические модели атмосферы

Как уже было указано, электромагнитные влияния на орбиты еще не удалось отделить от механических, тогда как давление излучения является известной величиной. Поэтому более глубокое изучение орбитальных

вариаций ограничивается данными о механическом торможении, зависящем от плотности $\rho(r)$ в уравнении (94).

За три года (1957—1960 гг.) по наблюдениям спутников было составлено описание атмосферы до 700 км (предел, установленный высотой перигея спутника 1958 β_2 в 650 км). Сводка результатов многих опубликованных исследований дана в недавних работах [134, 135, 136, 137, 138, 140, 264, 265].

Основные характеристики вариаций плотности атмосферы для зоны 300—700 км, выведенные по орбитам и изложенные в этих работах, таковы:

(a). Плотность в полночь для широт менее 50° составляет в среднем $4 \cdot 10^{-14}$ г/см³ на высоте 300 км и убывает примерно до $5 \cdot 10^{-17}$ г/см³ на высоте 700 км.

(b). Плотность незначительно убывает от полуночи до рассвета, а затем быстро возрастает с максимумом около двух часов после полудня, равным примерно 6×10^{-14} г/см³ на высоте 300 км и уменьшенным примерно до $6 \cdot 10^{-16}$ г/см³ на высоте 700 км.

(c). Различают вариацию плотности, тесно связанную с флуктуациями потока солнечной энергии на длинах волн порядка 10—20 см, в которой (в вариации) часто играет важную роль 27-суточный период солнечного вращения. Эти вариации намного более выражены на больших высотах и на дневной стороне атмосферы; отношение максимальной плотности к минимальной составляет здесь примерно 2 : 1.

(d). Во время магнитных бурь отмечены краткие возрастания плотности.

(e). С 1958 по 1960 г. происходило убывание средней плотности атмосферы, сильнее выраженное на больших высотах и на дневной стороне атмосферы, совпадавшее с убыванием солнечной активности 11-летнего цикла [134, 136].

(f). Вариация плотности с изменением широты невелика [136].

(g). Существуют полугодовые вариации плотности с минимумом в июне — июле — августе (примерно 0,6 максимума на высоте 300 км) [138] и с менее выраженным минимумом в январе, связанным с параметром K_p магнитной активности [265].

(h). Отмечены неправильные флуктуации $\dot{P}$ относительно модели, учитывающей пункты (a), (b), (c) и (e),

среднеквадратическое значение которых находится в пределах $0,5-1,0 \cdot 10^{-7}$ и которые для спутников с высотами перигеев 500—700 км содержат компоненты с периодом в несколько суток [134].

Яккя для описания вариаций (a), (b), (c) и (e) предложил [134] эмпирическую модель вида

$$\rho \sqrt{H} = f_0(h) F_{20} \left[1 + f_1(h) \cos^n \frac{\psi'}{2} \right], \quad (105)$$

где $f_0(h)$, $f_1(h)$ — экспоненциальные функции высоты, F_{20} пропорционально интенсивности потока энергии на длине волны в 20 см, а ψ' — угловое расстояние от максимума суточной кривой, который, как было указано в пункте (b), отстает от Солнца на 30° или 2 часа. Аналогичная формула была получена Пристером и другими [265], а также Петцольдом [138].

Недавно запущенный спутник Echo 1960₁ добавил к указанным выше результатам новые сведения: плотность составляет примерно 10^{-18} г/см³ на высоте 1500 км. Исследование орбиты спутника 1960₁ усложняется малостью эксцентриситета, влияниями давления излучения, убыванием массы вследствие потери газа и вероятно значительными электромагнитными влияниями, так что полученное значение плотности не является надежным [130, 262, 263, 265].

Большинство приведенных выше выводов относится к вариациям в атмосфере с частотой менее 0,25 циклов в сутки, так как наблюдения, на которых они основаны, сглажены применением величин $\bar{P}$, осредненных на периоды порядка двух суток. В автоковариационном анализе [261] данных Яккя для спутника 1958 β_2 в течение 462 дней [134] в формуле

$$\sigma_f^2 \{ \dot{P} \} = D \left(\bar{P} \right)^2 e^{-qf} \text{ циклов/сутки} \quad (106)$$

приведено в качестве вполне согласованной оценки спектральной плотности ускорения $D=0,6$ и $q=19,2$ для $0,022 < f < 0,216$ циклов/сутки, где $\bar{P}$ — среднее ускорение, которое для 92-дневных периодов колебалось в пределах от 2,0 до $5,4 \cdot 10^{-7}$. Для частот более 0,216 циклов/сутки в качестве надежного максимума может быть принято

0,0035 $\dot{P}^2/j$ циклов/сутки. В другом статистическом исследовании торможения, выполненном Мо [139], приняты случайные флуктуации плотности от одного периода спутника к другому (за исключением 27-дневного синусоидального колебания), что значительно увеличивает высокочастотную часть спектральной плотности по сравнению с уравнением (106).

Для распространения области применения модели атмосферы на высоты более 700 км, вывода оценок вариаций при изменениях широты и долготы и для получения физической оценки короткопериодических флуктуаций плотности атмосферы необходимо обратиться к теории [135, 140, 264].

Зона, представляющая интерес, делится на две части:

1 — термосфера (примерно от 100 до 600 км), характеризующаяся сильным нагревом, вызванным поглощением мягких солнечных рентгеновских лучей и ультрафиолетового излучения (плюс, возможно, других солнечных излучений), которые разлагают молекулы кислорода и ионизируют азот и кислород;

2 — экзосфера (выше 600 км), характеризующаяся наличием атомов и молекул, проникающих из термосферы, которые либо покидают Землю, либо возвращаются в термосферу в большем числе случаев без столкновений.

Кроме указанных процессов диссоциации и ионизации под действием излучения, существенными в термосфере являются процессы диффузии и теплопроводности. В результате диффузии более тяжелые составные части термосферы располагаются ниже, так что выше 250 км основным компонентом оказывается атомарный кислород, а примерно выше 1600 км — атомарный водород или гелий. Теплопроводность обеспечивает перенос тепла из зоны интенсивного поглощения энергии (ниже 200 км), необходимый для «закипания» атмосферы, приводящего к тесной связи плотности атмосферы и солнечной активности на высотах 500—700 км. Приняв во внимание солнечный нагрев атмосферы ниже 140 км, диффузное разделение компонентов, гидростатическое равновесие и теплопроводность, Джастроу и Кайль [135] экстраполируют модель атмосферы на высоты, превышающие 700 км. Для дневного максимума водородной атмосферы плотность около $5 \cdot 10^{-21}$ г/см³ достигается в модели на высоте примерно 2100 км, для ночного минимума водо-

родной атмосферы плотность $7 \cdot 10^{-21}$ г/см³ достигается на высоте 1400 км. Наибольшее теоретическое затруднение состоит в том, что в таких моделях плотность от полуночи до рассвета убывает быстро, а не медленно, как это следует из наблюдений за движением спутников [см. выше пункты (а) и (b)]. Механизм нагрева может иметь гидромагнитную природу или может объясняться электромагнитными влияниями на спутник.

Наличие большого числа заряженных частиц делает учет влияния геомагнитного поля существенным для определения широтной и, возможно, долготной вариаций плотности атмосферы, особенно вследствие отклонения заряженных частиц солнечного происхождения в зоны полярных сияний в окрестности магнитных полюсов. Необходимо отметить, что была зарегистрирована лишь небольшая вариация плотности с изменением широты [см. пункт (f)] — главным образом вследствие отсутствия спутника, имеющего наклонность более 51° и высоту перигея более 300 км.

Ввиду трудности получения удовлетворительного теоретического объяснения распределения плотности атмосферы очень мало было сделано по изучению ожидаемых короткопериодических возмущений движения ИСЗ. Спектральная плотность (106) и факт отставания дневного хода плотности от Солнца лишь на 2 часа, см. пункт (b), указывают, что спектр вариаций распространяется от периодов в несколько суток до периодов, меньше одного часа. Аналогичное разнообразие в спектре обнаруживается и при ионосферных наблюдениях [14]. Однако на больших высотах, представляющих интерес для геодезических спутников, вовсе не обязательно, чтобы нейтральная атмосфера имела бы те же флуктуации плотности, что и плазма, вызывающая флуктуации радиосигналов.

Влияние атмосферы на точность определения орбит

Существует два обстоятельства, вследствие которых неучет влияния атмосферы может исказить геодезические выводы из данных наблюдений орбит.

(1). Наличие вариаций плотности атмосферы, вращающихся с твердой Землей и поэтому приводящих к спект-

ру колебаний орбит, аналогичному спектру геодезических влияний.

(2). Уровень «шума», который искажает или даже заглушает геодезические влияния и зависит от числа и распределения использованных наблюдений.

Предположение о существовании основного искажения типа (1) из-за влияния геомагнитного поля основывается главным образом на теоретических соображениях. Наблюдения могли бы подтвердить наличие долгопериодического воздействия геомагнитного влияния — колебания с аргументом 2ω , вызванного вариацией плотности с изменением широты. Однако исследование подобной вариации по экспериментальным данным (Паркин [123]) обнаружило влияние, противоположное по знаку. Если доказательства наличия долгопериодического влияния столь ненадежны, то можно без опасения принять, что это влияние на уровнях суточной или полусуточной частот пренебрегаемо мало.

Для шума торможения частоты ниже примерно $h/2W$ будут поглощаться параметрами торможения опорной орбиты (h — число параметров торможения; W — продолжительность, охватываемая опорной орбитой). Для частот выше этого критического уровня (т. е. выше $h/2W$), если спектр (106) содержит все частоты, среднее квадратическое влияние на среднюю аномалию окажется равным

$$\sigma \{M, d\} = \pm \frac{1}{2\pi P^2} \left[\int_{h/2W}^{\infty} \frac{\sigma_f^2 \{\dot{P}\}}{f^4} df \right]^{1/2} \approx$$

$$\approx \pm \frac{0,015 \dot{P} e^{-4,8h/W}}{P^2 \left(\frac{h}{2W} \right)^2}, \quad (107)$$

где M выражено в радианах, а P — в сутках.

«Показатель искажения» [261] вследствие торможения при определении коэффициента в выражении для вариации с ожидаемой среднеквадратической амплитудой $\sigma \{C_x\}$ и аргументом $A_x(t)$ (например, гравитационный член) для последовательности наблюдений с индексом i будет равен

$$C(C_x, D) = \frac{\sqrt{\int_{h/2W}^{\infty} \sigma_f^2 \{ \dot{p} \} \left(\sum_i \cos 2\pi f t_i \cos A_x t_i \right)^2 \frac{df}{f^4}}}{2\pi P^2 \frac{\partial(M + \omega + \Omega)}{\partial(C_x \cos A_x t_i)} \sigma \{ C_x \} \sum_i \cos^2 A_x t_i]}. \quad (108)$$

Для неискаженного определения коэффициента C_x этот показатель искажения должен быть мал по сравнению с единицей. Из всех способов его уменьшения для данной орбиты и данной системы наблюдений единственный надежный способ состоит в увеличении длительности наблюдений (иначе говоря, числа наблюдений). Увеличение h или уменьшение W увеличивает поглощение некоторой части влияния C_x параметрами опорной орбиты*.

* После написания настоящего обзора автору стало известно об исследованиях [252], которые охватывают большую часть материала, изложенного в § 6 и 7.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ И АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ



В предыдущей главе орбиты спутников и действующие на них влияния рассматривались без подробного описания способа наблюдений и систем координат, в которых даны орбиты и результаты наблюдений. Рассмотрим более обстоятельно основные системы координат — инерциальную, геодезическую и инструментальную, связь между ними, их точные определения и изменения их во времени. Эти системы и связь между ними будут затем использованы при математической обработке наблюдений. Наконец, эта «геометрия» в сочетании со статистикой орбитальных вариаций и инструментальных погрешностей поможет оценить влияние этих погрешностей на искомые результаты.

§ 8. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Основные определения и обозначения

Общие системы обозначений даны Вейсом [1], Каулой [41] и Хенриксеном [142]. В последующем изложении примем систему [41] с небольшими видоизменениями.

Пусть, как и в гл. I, $\mathbf{r}$ — радиус вектор с началом в центре масс Земли без указания применяемых осей координат. Для других начал координат (не геоцентрических) применим индексы: $\mathbf{r}_T$ — топоцентрическая система с началом в некоторой точке на земной поверхности; $\mathbf{r}_S$ — система с началом координат в спутнике; $\mathbf{r}_D$ — система, начало которой совпадает с началом геодезиче-

ской системы координат при известном смещении ее относительно центра масс Земли (в отличие от геодезической системы, расположенной неопределенно относительно этого центра). Для систем $\mathbf{r}$, относящихся к определенным направлениям координатных осей, применим различные символы. Некоторые из этих систем координат таковы (все они правые): $\mathbf{x}$ (инерциальная система) с осями, одна из которых ($x=x_1$) направлена к точке весеннего равноденствия, а другая ($z=x_3$) направлена к северному полюсу; $\mathbf{q}$ (орбитальная система) с осью q_1 , направленной к перигею, и осью q_3 , нормальной к плоскости орбиты; $\mathbf{u}$ (геодезическая система) с осью $u=u_1$, направленной к точке пересечения гринвичского меридиана с экватором, и осью $w=u_3$, идущей по направлению к северному полюсу; $\mathbf{l}$ (местная система или система станции) с горизонтальной осью l_2 , направленной к северу вдоль местного меридиана, и осью l_3 , направленной к местному зениту; система $\mathbf{a}$ с осью a_3 , идущей вдоль прямой станция — спутник, и осью a_1 , перпендикулярной к a_3 и лежащей в плоскости, содержащей местный вертикал; система $\mathbf{p}$ с осью p_3 , направленной вдоль прямой станция — спутник, и осью p_1 , перпендикулярной к p_3 и лежащей в плоскости, содержащей меридиан спутника; система $\mathbf{b}$ с осью b_3 , идущей вдоль оси инструмента, и осью b_1 , перпендикулярной к b_3 и расположенной в плоскости местного меридиана.

Дальнейшие уточнения этих систем, рассматриваемые ниже, обозначаются чертой сверху (чтобы показать исключение периодических вариаций) и выписыванием аргумента, чтобы указать эпоху [например, $\bar{\mathbf{x}}(t_0)$].

Для матриц вращения будем применять символ $\mathbf{R}_i(\theta)$, где i — ось, около которой происходит вращение, а θ — угол вращения, причем положительным вращением называется вращение против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси вращения по направлению к началу координат. Элементы r_{lm} матрицы $\mathbf{R}_i(\theta)$ таковы*.

$$\left. \begin{aligned} j &\equiv i \pmod{3} + 1, & k &\equiv j \pmod{3} + 1 \\ r_{ii} &= 1; & r_{ij} &= r_{ji} = r_{ik} = r_{ki} = 0 \\ r_{jj} &= r_{kk} = +\cos \theta & r_{jk} &= +\sin \theta, & r_{kj} &= -\sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

* $a \equiv b \pmod{m}$ означает, что разность двух целых чисел a и b делится без остатка на натуральное число m . Примеры: $63 \equiv 0 \pmod{3}$; $7 \equiv -1 \pmod{8}$. — *Прим. перев.*

Применяя все эти правила, получим, например, для топоцентрических местных координат спутника относительно станции с геодезическими координатами u_0 и местным вертикалом, направленным на станцию φ, λ ,

$$l_T = R_3\left(\frac{\pi}{2}\right) R_2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) R_3(\lambda) [R_3(\theta) R_3(-\Omega) \times \\ \times R_1(-i) R_3(-\omega) q - u_0] = R_{lu} [R_{uq} q - u_0], \quad (110)$$

а для топоцентрических инструментальных координат спутника с направлением оси камеры вдоль (α_b, δ_b)

$$b_T = R_2\left(\delta_b - \frac{\pi}{2}\right) R_3(\alpha_b - \pi) [R_3(-\Omega) R_1(-i) \times \\ \times R_3(-\omega) q - R_3(-\theta) u_0] = R_{bx} [R_{xq} q - R_3(-\theta) u_0], \quad (111)$$

где

$$q = \begin{Bmatrix} r \cos f \\ r \sin f \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a (\cos E - e) \\ a \sqrt{1 - e^2} \sin E \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (112)$$

Вторые равенства в уравнениях (110) и (111) представляют собой другое возможное сокращенное обозначение для матриц вращения. В астрономии матрица вращения R_{xq} обычно выражается иначе, а именно через коэффициенты вида $\gamma = \sin i/2$, умноженные на тригонометрические функции от Ω и ω , как, например, упомянутые в § 4 функции Мьюзена ориентации плоскости орбиты [50].

Необходимо подчеркнуть, что в уравнении (110) (φ, λ) определяют направление и не обязательно связаны с положением, которое определяется по u_0 . Разумеется, u_0 может быть выражено в геодезических координатах (φ, λ, h) , однако в главах II—IV (φ, λ) следует понимать как направляющие углы (например, астрономический вертикал инструмента или «электрический» вертикал радиоинтерференционной системы) даже если, как иногда бывает, в наблюдения вводятся произвольные поправки с тем, чтобы отнести их к оси (φ, λ) , численно соответствующей геодезическим координатам станции в некоторой системе исходных дат.

В векторных уравнениях, подобных уравнениям (110) и (111), параметры ориентирования (φ, λ) или (α, δ) ,

а также время θ обычно известны из наблюдений, производящихся отдельно от наблюдений спутника, и притом с намного большей степенью точности, чем параметры орбит. Поэтому для практических целей дифференциал «локального» вектора может быть выражен в виде

$$d\mathbf{l}_T = \mathbf{R}_{lu} [\mathbf{R}_3(\theta)] d\mathbf{x} - d\mathbf{u}_0. \quad (113)$$

Тогда

$$d\mathbf{x} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{B}_{xq}}{\partial \Omega} \mathbf{q} \left| \frac{\partial \mathbf{R}_{xq}}{\partial i} \mathbf{q} \left| \frac{\partial \mathbf{R}_{xq}}{\partial \omega} \mathbf{q} \right| \mathbf{R}_{xq} \right\} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} \frac{d\Omega}{di} \\ \frac{di}{d\omega} \\ \frac{d\omega}{dq} \end{Bmatrix} = C_{xq} \begin{Bmatrix} \frac{d\Omega}{di} \\ \frac{di}{d\omega} \\ \frac{d\omega}{dq} \end{Bmatrix}, \quad (114)$$

где, например,

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{xq}}{\partial \Omega} = \frac{\partial \mathbf{R}_3(-\Omega)}{\partial \Omega} \mathbf{R}_1(-i) \mathbf{R}_3(-\omega) =$$

$$= \begin{Bmatrix} -\sin \Omega & -\cos \Omega & 0 \\ +\cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \mathbf{R}_1(-i) \mathbf{R}_3(-\omega) \quad (115)$$

и

$$d\mathbf{q} = d \left\{ \begin{array}{c} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1-e^2} \sin E \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \cos E - e, \\ \sqrt{1-e^2} \sin E, \\ 0 \end{array} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{c} -a \sin E / (1 - e \cos E), \\ a\sqrt{1-e^2} \cos E / (1 - e \cos E), \\ 0 \end{array} \right\}, \quad (116)$$

$$\left. \begin{array}{c} -a[1 + \sin^2 E / (1 - e \cos E)] \\ a\sqrt{1-e^2} \sin E \left(\frac{\cos E}{1 - e \cos E} - \frac{e}{1 - e^2} \right) \\ 0 \end{array} \right\} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} da \\ dM \\ de \end{Bmatrix} = C_{qe} de$$

Более простая форма уравнения (114), предложенная Эккертом и Брауэром [143], ([15], стр. 238), получается при использовании дифференциальных вращений (ψ_1, ψ_2, ψ_3) соответственно около осей x, y, z взамен $d\Omega, di, d\omega$:

$$dx = \left\{ \begin{array}{ccc|c} 0 & z & -y & \\ -z & 0 & x & \\ y & -x & 0 & \end{array} \right\} R_{xq} \left\{ \begin{array}{c} \psi \\ dq \end{array} \right\}. \quad (117)$$

Время и точное определение координат

Объяснение различных систем отсчета времени и их соотношений приводится Клеменсом [144, 145], Данжоном ([146], стр. 113—128), Вейсом [11], Райсом [147], Габбардом [266], а также в каждом выпуске *American Ephemeris and Nautical Almanac*.

Применения различных систем отсчета времени в космической геодезии приведены ниже.

Эфемеридное время (ЕТ), определяемое средней частотой обращения Земли вокруг Солнца на 1900,0, используется, как указано в гл. I, для вычисления всех орбит.

Всемирное время (УТ) определяется частотой вращения Земли.

Мгновенная частота вращения около мгновенной оси (УТ₀) определяется из наблюдения частоты вращения неподвижных звезд относительно некоторого местного вертикала обсерватории.

Мгновенная частота вращения около средней оси относительно земной коры (УТ₁) определяется осреднением примерно за шесть лет [148] и необходима для правильного соотнесения наблюдаемых направлений к равноденствию.

Средняя частота вращения около средней оси (УТ₂), определяемая вычитанием из УТ₁ известных сезонных вариаций с амплитудой 0,03, содержит вековые и неправильные вариации относительно ЕТ.

Атомное время (АТ), определяемое частотой колебания атома, например цезия, является наиболее точным стандартом частоты на протяжении до нескольких лет. Время А.1, даваемое службами времени, как, например, службой времени Морской обсерватории США [149], по существу совпадает с ЕТ со сдвигом долготы, соответствующим наименьшему возможному отлнчию от УТ.

Существенным требованием является соотношение между временем и системами координат для различных используемых данных: для орбиты спутника, вычисленной в эфемеридном времени и отнесенной либо к фиксированному на некоторую эпоху в границах области применения эфемериды осям, либо к вращающимся с постоянной скоростью осям; и для наблюдений, моменты которых определяются по сигналам, отнесенным к А.1 (или, практически, к ЕТ), а направления отнесены либо к осям, жестко связанным с Землей, либо к осям, определяемым звездным каталогом, на какую-либо стандартную эпоху (например, 1950,0). Для выражения необходимых соотношений Вейс ([1], стр. 97—100) принимает следующие системы координат (все геоцентрические), причем он употребляет прописные буквы, а также с соответствующим видоизменением обозначения, данные на стр. 85 и 86.

$\mathbf{X} = \overline{\mathbf{u}}(t)$ с осями: u_3 , направленной к среднему северному полюсу, и u_1 — к пересечению среднего экватора и среднего гринвичского меридиана (вновь подчеркиваем: это направление, а не координата), соответствующего UT2;

$\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{u}}(t)$ с осями: u_3 , направленной к среднему северному полюсу, и u_1 — к пересечению среднего экватора и мгновенного гринвичского меридиана, соответствующего UT1;

$\mathbf{Z} = \mathbf{x}(t)$ с осями: x_3 , направленной к мгновенному направлению относительно небесной сферы средней (относительно Земли) полярной оси, x_1 — к мгновенному весеннему равноденствию;

$\tilde{\mathbf{Z}} = \overline{\mathbf{x}}(t)$ — на тот же момент времени ось x_3 направлена вдоль среднего (с вековым изменением) направления средней полярной оси; x_1 — к среднему (с вековым изменением) весеннему равноденствию;

$\mathbf{W} = \overline{\mathbf{x}}(t_0)$ — на определенную эпоху ось x_3 направлена вдоль среднего направления средней полярной оси, x_1 — к среднему весеннему равноденствию.

Для записи поворотов при переходе от одной из этих систем в другую имеем

$$\left. \begin{aligned} \overline{\mathbf{u}}(t) &= \mathbf{R}_2(x) \mathbf{R}_1(y) \overline{\mathbf{u}}(\tilde{t}) \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{R}_3(-\theta) \overline{\mathbf{u}}(t) \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{R}_3(-\Delta\mu) \mathbf{R}_2(\Delta\nu) \mathbf{R}_1(-\Delta\varepsilon) \overline{\mathbf{x}}(t) \\ \overline{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{R}_3(-\omega) \mathbf{R}_2'(\nu) \mathbf{R}_3(-x) \overline{\mathbf{x}}(t_0) \end{aligned} \right\}, \quad (118)$$

где x , y — смещения (относительно земной коры) мгновенного северного полюса от среднего соответственно по направлениям на Гринвич и на $90^\circ W$ ([148], стр. 349); θ — мгновенное или видимое гринвичское звездное время; $\Delta\mu$, $\Delta\nu$, $\Delta\epsilon$ — нутации соответственно в прямом восхождении, склонении и наклонности, $(\chi + \omega)$ — прецессия в прямом восхождении до членов первого порядка; χ определяется как компонента в плоскости среднего экватора на момент t_0 , а ω — как компонента в плоскости среднего экватора на момент t ; ν — прецессия в склонении. Величины x , y , $\Delta\mu$, $\Delta\nu$, $\Delta\epsilon$ так малы, что в уравнениях (118) вместо косинусов этих величин может быть подставлена единица, вместо синусов — аргументы, и нули — вместо произведений синусов. См. также ([146], стр. 79—128).

Вейс ([1], стр. 102—105) выводит также преобразования между геодезическими системами u и u_0 не только для переноса, но также и для небольших расхождений в ориентировке и масштабе. Рассмотрение последних расхождений представляется здесь ненужным, поскольку для наблюдений в космической геодезии наземное геодезическое обоснование используется только для вывода поправок за переход к различным станциям прослеживания. Ориентировка обычно определяется по звездам, причем единственное затруднение состоит в получении самолета, подходящего для обеспечения ориентировки радиоинтерференционной системы.

В 1903 г. системы ET и UT были тождественны, в настоящее же время ET ушло на 34 сек вперед относительно UT. Эфемеридное время может ежегодно опережать UT до 1,5 сек (или на $5 \cdot 10^{-8}$), поэтому расхождение легко улавливается в среднем движении Луны, однако оно не станет геодезически существенным, пока линейные измерения в космической геодезии не достигнут необходимой точности.

Основная трудность, возникающая в связи с определением систем координат, состоит в том, что прецессия и нутация изменяют вековое влияние J_2 , исследованное Козаи [66] и рассмотренное в § 4. Смитсоновская астрофизическая обсерватория поэтому приняла решение относить наклонность и аргумент перигея к истинному экватору момента наблюдения и измерять долготу узла от начальной точки, смещенной от среднего равноденствия в момент наблюдения на величину, равную прецессии

в прямом восхождении с 1950,0 [150]. Другие возможные системы координат рассмотрены Херриком [151]. Трудности измерительного характера рассматриваются в § 11.

§ 9. УРАВНЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ НАБЛЮДЕНИЙ

Каждое наблюдение может быть выражено функцией одного из векторов § 8. Например, для η , ξ при измерениях на фотопластинках ([152], стр. 281) с фокусным расстоянием камеры f [41] имеем

$$\begin{Bmatrix} \eta \\ \xi \end{Bmatrix}_{\text{выч}} = b_{\text{выч}} = \begin{Bmatrix} \frac{f}{b_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{b_3} & 0 \end{Bmatrix} \mathbf{b}_T = N_{bb} b_T, \quad (119)$$

а для уравнения погрешностей, используя (111), получим

$$b_{\text{набл}} + db_{\text{набл}} = b_{\text{выч}} + db_{\text{выч}} = b_{\text{выч}} + N'_{bb} \mathbf{R}_{bx} [d\mathbf{x} - \mathbf{R}_3(-\theta) d\mathbf{u}_0], \quad (120)$$

где

$$N'_{bb} = \begin{Bmatrix} \frac{f}{b_3} & 0 & -\frac{fb_1}{b_3^2} \\ 0 & \frac{f}{b_3} & -\frac{fb_2}{b_3^2} \end{Bmatrix} \approx N_{bb}. \quad (121)$$

Уравнение (120) является по существу уравнением погрешностей при одновременных наблюдениях космического тела с двух или более точек, обработка которых (наблюдений) была детально разработана Ваясяля [153, 154], Куккамьяки [155], Брауном [156, 157, 267] и Вейсом ([1], стр. 115—135). Уравнение (120) отличается от известных как в астрометрии ([152], стр. 288—291, 404—411), так и в фотограмметрии тем, что в нем не встречаются параметры пластинки, зависимости или параметры ориентировки и масштаба. Любая ошибка в ориентировке (или в отсчете времени) будет учтена в члене $db_{\text{набл}}$ уравнения (120), большая часть которого должна быть вызвана несовершенствами изображения тела и мерцанием.

Поскольку космическое тело в нормальном случае весьма близко к оси камеры, то могут быть составлены уравнения (119) — (122), относящиеся к вектору $\mathbf{p}$ вместо вектора $\mathbf{b}$.

Если наблюдения не одновременны, то уравнение (120) относится к спутнику на орбите, а $d\mathbf{x}$ должен быть выражен через дифференциалы всех параметров, вносящих погрешности в определение орбиты: шести постоянных интегрирования, параметров гравитационного поля, плотности атмосферы, коэффициента формы и отношения площадь/масса спутника. Из уравнений (114) и (116) можно определить $\mathbf{C}_{xe}$

$$\mathbf{C}_{xe} = \mathbf{C}_{xq} \left\{ \begin{matrix} I \\ \mathbf{C}_{qe} \end{matrix} \right\} \quad (122)$$

и тогда

$$d\mathbf{x} = \mathbf{C}_{xe} d\mathbf{e}, \quad (123)$$

где $d\mathbf{e}$ — вектор, включающий дифференциальные поправки к шести оскулирующим элементам.

Далее следует выразить $d\mathbf{e}$ через постоянные интегрирования, которыми обычно являются элементы промежуточной орбиты на данную эпоху, и через другие параметры, воздействующие на орбиту посредством уравнения, подобного

$$d\mathbf{e} = \mathbf{J} d\mathbf{e}_0' + \mathbf{C}_{eq} \left\{ \begin{matrix} \vdots \\ dJ_{nm} \\ dK_{nm} \\ \vdots \end{matrix} \right\} + \mathbf{C}_{ep} \left\{ \begin{matrix} \vdots \\ dn_{2i} \\ \vdots \end{matrix} \right\}. \quad (124)$$

В уравнении (124) $\mathbf{J}$ — сумма единичной матрицы и элемента $\partial M / \partial a_0' = -3n(t-t_0)/2a_0'$ из уравнения (6), если $(t-t_0)$ имеет порядок одних суток; для $(t-t_0)$, равно- го нескольким суткам, в эту сумму должно быть добавлено девять дополнительных членов

$$\partial \{ \Omega, \omega, M \} / \partial \{ i_0', a_0', e_0' \}$$

с тем, чтобы учесть вековые изменения, вызванные наличием члена с J_2 из уравнения (58) [41]; $\mathbf{C}_{eq}$ — матрица изменений оскулирующих элементов, вызванных изменениями коэффициентов гравитационных гармоник, полученная применением возмущающей функции R_{nm} из уравне-

ния (77) в уравнениях (29) и интегрированием, как в уравнении (83); C_{ep} — это $6 \cdot k$ -я матрица (порядка $6k$) изменений оскулирующих элементов в момент наблюдения относительно ускорений n_{2i} для $i=1, \dots, k$ сегментов орбиты от t_0 до момента наблюдения (вместо n_{2i} можно использовать коэффициенты разложения n в степенной ряд).

Величина $\partial M / \partial n_{2i}$ вычисляется из уравнения (101), тогда $\partial e / \partial n_{2i}$, $\partial \omega / \partial n_{2i}$, $\partial \Omega / \partial n_{2i}$ вычисляются из уравнения (100), а $\partial a / \partial n_{2i}$ — из уравнений (66) и (6). Учет изменения наклонности вследствие торможения вызовет появление дополнительных параметров атмосферного вращения или поперечного ветра. Подстановка уравнения (124) в (123) и уравнения (123) в (120) дает полное уравнение погрешностей.

Процесс, аналогичный процедуре получения уравнений (123) и (124), может быть проведен для орбиты, численно проинтегрированной в прямоугольных координатах, с разложением квадратных матриц

$$\partial \{x_i, \dot{x}_i\} / \partial \{x_{i-1}, \dot{x}_{i-1}\}$$

6-го порядка в ряды Тейлора. Для того чтобы ряд Тейлора можно было ограничить членами порядка x , интервал $(t_i - t_{i-1})$ должен быть порядка 5 мин.

Если наблюдаемым небесным телом является Луна, то $db_{\text{набл}}$ в левой части уравнения (120) включает поправку центра Луны относительно фактически наблюдаемого края Луны. Математическая часть геодезического использования фотоснимков Луны была разработана Марковицем [158, 159], Поттером [160] и Вейсом [1]. В качестве уравниваемых наблюдений первые два применяют (α, δ) , а не (η, ξ) . Другой возможный метод использования Луны, метод покрытий и солнечных затмений (когда Луна оказывается на пути лучей Солнца или звезды), может обрабатываться аналогично, приняв световой луч за ось $b_{z,i}$ или линию, проходящую через центр Луны, за ось $p_{z,t}$. В работах Бонсдорфа [161], Ламберта [162], О'Кифа и Андерсона [92] и Хенриксена [163] обработка была произведена с применением фундаментальной плоскости Бесселя ([5], стр. 14—22), ([132], стр. 368—403), что эквивалентно выбору геоцентрической системы координат p с осью p_z , направленной на звезду,

а не на Луну. В способах О.Кифа и Андерсона [92] и Хенриксена [163] покрытия наблюдаются в течение короткого интервала времени со станций, расположенных так, что поправка к радиусу Луны считается одинаковой для обеих станций. Это обстоятельство приводит к геометрически ненадежному определению вдоль p_3 , не считая ненадежности вдоль x_3 , вызванной малой наклоном орбиты Луны. Поэтому для одной станции принимается $du=0$, а для второй — $dl_3=0$, с тем чтобы получить по существу уравнение для разностей широт и долгот.

Наконец, последняя возможность применения фотографического метода состоит в размещении камеры на спутнике и съемке расположенных на Земле (и определенных геодезически) пунктов. Наиболее точные результаты могут быть получены при перекрывающихся снимках. Эта проблема, по существу относящаяся к стереотриангуляции, была весьма широко разработана Шмидом [164] и Брауном [156]. Результатом уравнивания стереотриангуляции является последовательность положений спутника на геодезической поверхности относимости (u_0) с соответствующей матрицей ковариаций, которые используются как наблюдения в уравнениях, аналогичных уравнению (120). См. работу [41], в которой также приведены уравнения для наблюдений с применением теодолитов.

Уравнение погрешностей относительно расстояния сравнительно несложно, поскольку оно может быть записано через инерциальные координаты [41, 142]

$$\begin{aligned} |x_T|_{\text{набл}} + d |x_T|_{\text{набл}} &= |x_T|_{\text{выч}} + \frac{1}{|x_T|} x_T \times \\ &\times [dx - R_3(-\theta) du_0]. \end{aligned} \quad (125)$$

Для случая наблюдений скорости изменения дальности уравнение погрешностей становится более сложным ввиду влияния вращения Земли:

$$\begin{aligned} |\dot{x}_T|_{\text{набл}} + d |\dot{x}_T|_{\text{набл}} &= |\dot{x}_T|_{\text{выч}} + \frac{1}{|x_T|} x_T \left[d\dot{x} - \right. \\ &\left. - \frac{\partial R_3(-\theta)}{\partial \theta} du_0 \dot{\theta} \right] + \left\{ \frac{dx - R_3(-\theta) du_0}{|x_T|} - \right. \end{aligned}$$

$$- \mathbf{x}_T \frac{\mathbf{x}_T (d\mathbf{x} - \mathbf{R}_3(-\dot{\theta}) d\mathbf{u}_0)}{|\mathbf{x}_T|^3} \Big\} \dot{\mathbf{x}}_T, \quad (126)$$

где $\dot{\theta}$ — частота вращения Земли. Члены в скобках невелики (второго порядка). Поэтому указанные наблюдения не чувствительны к du_3 и необходимо принять, что возле экватора $du_3=0$, а в остальных областях $dl_3=0$.

Для определения $d\dot{\mathbf{x}}$ через поправки к элементам орбиты $d\mathbf{e}$ имеет место уравнение

$$d\dot{\mathbf{x}} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{R}_{xq}}{\partial \Omega} \dot{\mathbf{q}} \left| \frac{\partial \mathbf{R}_{xq}}{\partial i} \dot{\mathbf{q}} \left| \frac{\partial \mathbf{R}_{xq}}{\partial \omega} \dot{\mathbf{q}} \right| \mathbf{R}_{xq} \mathbf{C}_{qe} \right\} d\mathbf{e}, \quad (127)$$

где

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} -\sin f \\ e + \cos f \\ 0 \end{pmatrix} \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} = \begin{pmatrix} -\sin E \\ \sqrt{1-e^2} \cos E \\ 0 \end{pmatrix} \frac{na}{1-e \cos E} \quad (128)$$

и

$$\mathbf{C}_{qe} = \begin{pmatrix} \frac{\sin E}{2a} (1 - e \cos E), \\ -\frac{\sqrt{1-e^2}}{2a} \cos E (1 - e \cos E), \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e - \cos E, & -\frac{1}{2} \sin 2E \\ -\sqrt{1-e^2} \sin E, & \frac{\cos E}{\sqrt{1-e^2}} (\cos E - e) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{na}{(1-e \cos E)^2}, & 0 & 0 \\ 0 & \frac{na}{(1-e \cos E)^3}, & \frac{na \sin E}{(1-e \cos E)^3} \\ 0 & 0 & \frac{na}{(1-e \cos E)^3} \end{pmatrix}. \quad (129)$$

Уравнения (111) и (115) определяют $\mathbf{R}_{xq}$ с производными. Теория, касающаяся скорости изменения расстоя-

ния, была наиболее разработана (в связи с доплеровским прослеживанием) Гайером и Уэйффенбаком [165, 166, 167], которые применили центральный угол между станцией и спутником, а не x_T . См. также ([5], стр. 315—320), [168] и [169].

Для случая радиоинтерференционных измерений направляющих косинусов относительно базиса с азимутом A , отсчитываемых по часовой стрелке от точки севера, имеет место [41]

$$l_{\text{набл}} + dl_{\text{набл}} = N_{II} R_3 \left(\frac{\pi}{2} \right) R_2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) R_3(\lambda) u_T + \\ + N'_{II} R_3 \left(\frac{\pi}{2} \right) R_2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) R_3(\lambda) [R_3(\theta) dx - du_0], \quad (130)$$

где

$$N'_{II} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin A}{p_3} - \frac{l_1^2 \sin A + l_1 l_2 \cos A}{p_3^3}, \\ \frac{\cos A}{p_3} - \frac{l_1 l_2 \sin A + l_2^2 \cos A}{p_3^3}, \\ - \frac{l_3 (l_1 \sin A + l_2 \cos A)}{p_3^3} \end{array} \right\}, \quad (131)$$

$$N_{II} = \left\{ \frac{\sin A}{p_3}, \quad \frac{\cos A}{p_3}, \quad 0 \right\}. \quad (132)$$

Кан [170] исследует интерференционные наблюдения, рассматривая конус, являющийся геометрическим местом точек с измеренным направляющим косинусом $l_{\text{набл}}$.

Общий порядок обработки измерений разработан также Гровсом и Дейвисом [171].

Измерения дальности, доплеровские и интерференционные, обычно производят с применением электронных средств (следовательно, непрерывно), так что при полном использовании данных количество последних оказывается значительным. В идеале оценка всех шести элементов орбиты должна получаться при каждом прохождении спутника [167], однако подобные определения для некоторых элементов будут столь неуверенными, что предположение о линейности поправок, принимаемое в способе наименьших квадратов, окажется ошибочным.

Автор в другой работе [41] предлагает интегрировать по сегментам прохождений. Однако при назначении надлежащих весов каждому прохождению необходимо обращать пристальное внимание на статистическую сторону дела. Этот вопрос рассматривается в следующем параграфе.

§ 10. ОЦЕНКА КОНФИГУРАЦИИ

Все дифференциальные поправки § 9 (например, $db_{\text{набл.}}$, du_0 , dx или de'_0 , dJ_{nm} , dK_{nm} , dn_{2i}), относящиеся к некоторой последовательности уравнений погрешностей и условных уравнений, могут быть сведены в два обобщенных вектора: y — поправки к измерениям и z — поправки к параметрам. Существенное отличие измерений от параметров состоит в том, что для измерений оценки дисперсии и ковариаций (в отличие от параметров) могут быть выведены по данным, не зависимым от данных, включаемых в уравнения погрешностей. При введении указанных векторов последовательность уравнений погрешностей и условных уравнений может быть выражена в матричной форме

$$Cy + Mz = f, \quad (133)$$

где элементы матриц C и M — коэффициенты дифференциальных поправок в уравнениях, а элементы матрицы f — разности измеренных и вычисленных величин.

Подставим оценки дисперсии и ковариаций в ковариационную матрицу W и введем обобщенное условие способа наименьших квадратов

$$y^T W^{-1} y = \min. \quad (134)$$

Решение (133) и (134) для общего случая относительно y и z и их матриц ковариаций приведены в [172], [173] и [267]. В большинстве проблем, включающих наблюдение спутников, для более простого специального случая C заменяется единичной матрицей

$$z = (M^T W^{-1} M)^{-1} M^T W^{-1} f. \quad (135)$$

Матрица ковариаций уравненных параметров имеет вид

$$V_0 = (M^T W^{-1} M)^{-1} \frac{f^T W^{-1} f - z^T M^T W^{-1} f}{n - m}, \quad (136)$$

где n — число уравнений, а m — число параметров.

Если желательно учесть первоначальные оценки некоторых из величин z_i , основанные на измерениях, не включаемых в уравнивание и выражаемых матрицей ковариаций V_i , то решение принимает вид [261]

$$z = (M^T W^{-1} M + V_i^{-1})^{-1} M^T W^{-1} f. \quad (137)$$

Для тех z_i , для которых нет первоначальных оценок, соответствующие столбцы и строки в V_i^{-1} составлены из нулей. Матрица ковариаций уравненных параметров имеет вид

$$V = (M^T W^{-1} M + V_i^{-1})^{-1} \frac{f^T W^{-1} f - z^T M^T W^{-1} f}{n - m + r}, \quad (138)$$

где r — число величин z_i с учтенными первоначальными оценками.

Для оценки определенной конфигурации местоположений станций, орбитальных спецификаций, частоты, продолжительности, типа и неуверенности наблюдений желательно оценить некоторые величины, входящие в V_0 , и отыскать конфигурацию, которая бы минимизировала эти величины в пределах, накладываемых технологическими возможностями, экономическими факторами и т. д. В матрицах V_0 из уравнений (136) и (138) для исправления величины W используют фактические невязки f . Другие дефекты в W , как, например, неучет ковариаций, остаются неисправленными. При предварительной оценке приходится принять, что W верно, причем V_0 оказывается в этом случае равным

$$(M^T W^{-1} M + V_i^{-1})^{-1}.$$

Здесь W должно включать дисперсию и ковариацию, вызванные всеми явлениями, которые влияют на измерения и которые не учтены исходной моделью, или поправки к параметрам z . «Трудной» частью W , пренебрежение которой вызывает занижение большинства оценок точности в способе наименьших квадратов, являются недиагональные элементы, выражающие ковариацию. Ковариация может быть ощутимой в большом числе наблюдений ввиду систематических ошибок, подобных ошибке регистрации времени. Ковариация может быть ощутимой также вследствие пренебрежения гравитационными влия-

ниями и торможением. Если исходить из уравнения (107), то вызванная торможением ковариация в средней аномалии за промежуток времени Δt окажется равной

$$\text{Cov} \{ \text{торможение}, \Delta t \} = \frac{1}{16 \pi^2 p^4} \times \int_{\frac{h}{2W}}^{\infty} \frac{\sigma_f^2 \{ \dot{p} \}}{f^4} \cos 2\pi f \Delta t df. \quad (139)$$

Понятно поэтому, что в выполненных выводах матриц ковариаций были учтены только инструментальные ошибки [268], либо они были выполнены для частных конфигураций одновременных наблюдений [157, 187]

Браун [157] принял:

- (1) погрешность измерения пластинок в $\pm 2 \mu$;
- (2) фокусное расстояние 600 мм;
- (3) наличие пяти станций в североамериканской системе координат (NAD) от Алеутских островов до южной Калифорнии;
- (4) наличие одной станции на Гавайских островах и одной станции на о. Мидуэй;
- (5) высоту спутника около 1800 км;
- (6) три группы, по девять вспышек в каждой, на протяжении дуги около 48° ;
- (7a) нулевую неопределенность в NAD;
- (7b) стандартное отклонение по каждой координате в ± 6 м с нулевой ковариацией в координатах в системе NAD.

В предположении (7a) Браун получил для каждой координаты в районах атолла Мидуэй и Гавайских островов неопределенность менее ± 6 м и менее ± 8 м — в предположении (7b).

Однако при качественном и частично численном исследовании [1, 169, 174, 175, 176] для трансокеанских связей между различными геодезическими системами с точностью порядка ± 10 м обычно предпочитают применение методов интерполяции орбит. Основная причина заключается здесь в желательности наблюдений спутника на возможно более близких расстояниях, чтобы ограничить падение точности, происходящее с возрастанием дальности. Минимальная высота перигея, необхо-

димая для ограничения влияния торможения до пренебрегаемого уровня (принимая A/m около $0,05 \text{ см}^2/\text{г}$), обычно полагается равной 700—1000 км. Другие обычно принимаемые спецификации таковы: наклонность 55—70° (для обеспечения наблюдений на большинстве представляющих интерес территорий), эксцентриситет менее 0,05 (для постоянного удержания спутника в пределах дальности точных наблюдений), погрешность регистрации моментов времени в пределах $\pm 0,001$. Ньютон [177], рассматривая геодезическое использование доплеровских измерений, предлагает высоту перигея порядка 1500 км.

Спецификация орбит спутников для исследования гравитационного поля мало изучена. Высота перигея порядка 700—1000 км желательна также по соображениям, связанным с торможением, однако предпочтителен больший эксцентриситет — порядка 0,2, достаточный, чтобы обеспечить хорошо определенное направление на перигей, но не столь большой, чтобы потребовалась большая полуось, сильно ослабляющая влияния высших гармоник. Оптимальная наклонность для некоторого члена может быть выведена по влиянию ее коэффициента $F(i)$ из уравнений (77) и (78) в уравнениях возмущения (29), однако для общего исследования можно рекомендовать только разнообразие спецификаций.

РАКЕТЫ И ИСКУССТВЕННЫЕ СПУТНИКИ И ИХ НАБЛЮДЕНИЕ



§ 11. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Некоторые характеристики спутников и ракет

Некоторые характеристики, наиболее вероятные для спутников, меньших 100 см в диаметре и не превышающих 100 кг по весу, которые, вероятно, будут доступны для геодезических целей [3, 174, 178, 253], таковы.

1. Средняя мощность, обеспечиваемая при использовании солнечной энергии, ~ 25 вт. Основная трудность поддержания этого уровня вызывается порчей солнечных батарей в результате солнечной и корпускулярной радиаций, микрометеоритов и т. д., хотя опыт со спутником 1958 β_2 указывает, что эта порча происходит медленно.

2. Полезная емкость аккумуляторов 10^6 вт·сек. Термин «полезная» подразумевает, что для обеспечения длительной работы используется только небольшой процент емкости батареи и что при заряде имеют место потери энергии порядка 15% и т. д.

3. Емкости с эффективностью 0,35 должны быть способны разрядить 1500 вт·сек за 0,001 сек.

4. Стабильность частоты 10^{-8} в сутки, или $2 \cdot 10^{-10}$ в течение минуты.

5. Индикация положения — в пределах одного градуса при помощи датчика горизонта или датчика магнитного поля.

6. Возможность замедления собственного вращения до величины, меньшей одного оборота в 40 мин.

7. Автоматическое, солнечное или командное управление переключателями.

8. Отношение площади к массе меньше $0,08 \text{ см}^2/\text{г}$.

Приведенные значения указывают лишь порядок соответствующих величин, так как фактические спецификации могут очень быстро устареть.

Ограничения на спецификацию орбит в отношении наклонности могут быть вызваны политическими причинами, а также соображениями безопасности для окрестностей станции запуска. Применение орбиты с обратным движением вместо орбиты с прямым движением может уменьшить полезную нагрузку на величину до 10%.

Некоторые спецификации спутников, которые были использованы для геодезических целей или которые представляют в этом смысле потенциальный интерес (косвенно в случае спутника Echo I) приведены в табл. 3.

Сравнительно недорогими, имеющими потенциальное значение для геодезических целей, являются зондирующие ракеты, запускаемые с баллонов на высоте 20—30 км, как, например, ракета Locki-II Rockoon США, способная поднять 4 кг полезного груза на высоту около 120 км ([179], стр. 149—153) или японская ракета Sigma, предназначенная для подъема 2,5 кг полезного груза на высоту около 100 км ([179], стр. 283—286). В произведенных до настоящего времени испытаниях фотографирования световых вспышек на ракетах [195] использовались ракеты, запущенные с Земли, для которых обеспечивался лучший контроль регистрации времени и траекторий.

Регистрация времени

Точность $\pm 10 \text{ м}$ в положении спутника на орбите требует точности регистрации времени $\pm 0,001$ или более высокой. Достижение подобной точности требует применения сконструированной в последнее время техники определения и передачи времени, а также соответствующего оборудования [149, 180, 253, 282].

Начиная с 1960 г. контроль сигналов времени в основном осуществляется системой примерно из десяти цезиевых генераторов, применяемой Морской обсерваторией США и другими национальными службами времени. Эти генераторы контролируют передачи сигналов времени на очень низкой частоте (VLF) станций NBA (зона Панамского канала, 18 кгц) и GBR (Англия,

СПЕЦИФИКАЦИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

Название	Обозначение	Дата запуска	Радиопрослеживание		Максимум отношения площади/масса $A/m, \text{см}^2/\text{г}$	Высота перигея $h_{\text{п}}, \text{км}$	Эксцентриситет e	Наклонность i
			частота, 10^8 гц	дата окончания наблюдений				
Спутник II*	1957 β	1957 Ноябрь 3	20, 40	Ноябрь 10, 1957	0,07	230	0,07	65°
Vanguard I	1958 β_2	1958 Март 17	108		0,14	650	0,19	34°
Vanguard II	1959 α_1	1959 Февраль 17	108	Март 16, 1959	0,21	560	0,16	33°
Vanguard III	1959 η	Сентябрь 18	108	Декабрь 12, 1959	0,27	510	0,19	33°
Explorer VII	1959 ζ_1	Октябрь 19	108	Декабрь 5, 1959	0,11	550	0,03	50°
Tiros I	1960 β_2	1960 Апрель 1	108		0,07	690	0,00	48°

Transit IB	1960 _γ	Апрель 13	0		0,14	290	0,03	51°
	1960 _{γ₂}	Апрель 13	54, 324; 162, 216	Июнь 19, 1960 Июль 12, 1960	0,06	370	0,03	51°
Спутник IV	1960 _{ε₁}	Май 15	20	Июль 2, 1960	0,02	280	0,03	65°
Transit IIA	1960 _{ζ₁}	Июнь 22	54,324; 162,216		0,07	630	0,03	67°
NRL Radiation	1960 _{η₂}	Июнь 22	108	Апрель 18, 1961	0,12	610	0,03	67°
Echo I	1960 _{ι₁}	Август 12	108	Декабрь, 1960	100,0	1450	0,02	47°
	1960 _{ι₂}	Август 12	0		0,05	1530	0,01	47°
Courier IB	1960 _{ν₁}	Октябрь 4	108		0,06	810	0,02	28°
Tiros II	1960 _π	Ноябрь 23 1961	108		0,07	620	0,01	48°
Explorer XI	1961 _ν	Апрель 27	108		0,20	490	0,10	29°
Transit IVA	1961 _{ζ₁}	Июнь 20	54, 324, 162, 216		0,12	880	0,01	67°
Tiros III	1961 _{ρ₁}	Июль 12	108		0,07	730	0,01	48°

* Прекратил существование 14 апреля 1958 г.

16 кгц), а также передачи на высокой частоте (HF) станций MSF (Англия), WWV (США) и WWVH (Гавайские острова). Вероятные ошибки сигналов станции VLF, контролируемых в Вашингтоне, составляют $\pm 0,4$ мсек или меньше, а станций HF — меньше $\pm 1,0$ мсек. Кроме того, эти станции координированы с тем, чтобы передавать одну и ту же стандартную частоту со стабильностью 10^{-10} . Ожидается, что другие национальные службы времени вскоре присоединятся к этой системе [149].

Описанное выше АТ сравнивается с ЕТ посредством наблюдений орбиты Луны лунными камерами Марковица [159]. Вариации УТ относительно АТ наблюдаются так часто, как позволяет погода, фотографическими зенит-телескопами (PZT) и астролябиями Данжона. Оба прибора характеризуются вероятными ошибками примерно в $\pm 0,^{\circ}06$ по широте и $\pm 0,^s005$ по времени (оценки по внутренней сходимости, не включающие влияния ошибок звездного каталога, см. § 11) для наблюдений в течение одной ночи ([148], стр. 334—340). Поправки, вычисляемые по этим наблюдениям, публикуются не позже чем через несколько месяцев национальными службами времени и с запозданием на год или около этого — в *Bulletin Horaire*.

На расстояниях примерно до 8000 км время должно определяться по сигналам VLF с ошибкой около 0,5 мсек [149]. Для сохранения этой точности в пределах суток необходима стандартная частота с устойчивостью лучшей, чем 10^{-8} . Кварцевые часы, которые недавно были применены при прослеживании спутников, имеют стабильность лучшую, чем 10^{-9} [180]. В системах регистрации времени имеются другие технические трудности, такие как, например, точность делителей частоты и задержки сигналов в приемнике. Вероятно, точность регистрации времени при любом оптическом измерении ограничивается оптической и механической частями — работой затвора камеры или газоразрядной лампы.

Ориентирование

Любой вид одновременных наблюдений, включающих измерения направлений (т. е. все виды наблюдений, кроме наблюдений дальности и скорости ее изменения),

зависит от точности привязки результатов к инерциальной системе координат. Привязка осуществляется при помощи звезд — непосредственно (в случае фотографических наблюдений) фотографированием звезд на тех же пластинках, что и изображения спутника, либо косвенно с использованием обычных астрономических положений звезд при употреблении теодолитов и прослеживанием самолетов, оборудованных лампами-вспышками в случае радиоинтерференционных наблюдений. Таким образом, эти методы, в свою очередь, зависят от точности звездных каталогов. Плотность звезд, требуемая для фотографий (или для точного определения астрономических широт), составляет единицу на квадрат $2^\circ \times 2^\circ$, или около 10 тыс. звезд (при равномерном покрытии всей небесной сферы). Фундаментальные каталоги не обеспечивают достаточной плотности и потому необходимо обращаться к генеральным каталогам.

Наилучшими имеющимися каталогами для широт севернее 30° ю. ш. являются каталоги *Yale Zone Catalogue*, *Zweiter Katalog der Astronomischen Gesellschaft* (AGK2), а для широт южнее 30° ю. ш. — каталог Королевской обсерватории в Кейптауне (Южная Африка). Йельский каталог и каталог AGK2 основаны на наблюдениях (произведенных в основном в 20-х и 30-х годах) с собственными движениями, зависящими от наблюдений, выполненных начиная с середины XIX в. Для эпохи 1960 г. их ошибки по каждой координате имеют порядок от $\pm 0,2$ до $\pm 0,4$ ([181], стр. 225). Южнее 30° ю. ш. ошибки будут больше вследствие отсутствия наблюдений XIX в. В этих ошибках ощутимы систематические вариации, вызванные плохим определением положений опорных звезд и случайными погрешностями из-за собственного движения.

В настоящее время готовится каталог AGK3R — фундаментальный каталог более чем 20 тыс. звезд для широт севернее 2° ю. ш., которые наблюдались меридианными кругами (образуя систему для каталога AGK3). Ожидаемая средняя ошибка каталога AGK3R составляет $\pm 0,03$ по каждой координате и $\pm 0,008$ в год (в собственном движении). Аналогичная работа, равно как и составление новых фотографических каталогов, ведется сейчас и для южного полушария. Таким образом, к концу 60-х годов будут получены положения звезд с погрешностью $\pm 0,15$ при плотности порядка одной звезды

на квадрат $1^\circ \times 1^\circ$. Рассмотрение соответствующих проблем см. в [181], а исследование точности, необходимой для геодезии, — в [187].

§ 12. ТЕХНИКА ОПТИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ

Освещенность и ее ослабление

Свет с длиной волны λ рассеивается в атмосфере молекулами газа пропорционально λ^{-4} и водяным паром — вне зависимости от длины волны. Коэффициент пропорциональности передачи света (T) от источника, находящегося на высоте h^* , при зенитном расстоянии z по отношению к наблюдателю, находящемуся на высоте h_0 ,

$$T = \exp \left\{ -\sec z \int_{h_0}^{h^*} (\beta_m \rho_m(h) + \beta_w \rho_w(h)) dh \right\} = e^{-\tau \sec z}. \quad (140)$$

Молекулярное рассеяние света $\beta_m \rho_m(h)$ достаточно точно выражается формулой

$$0,00114 \lambda^{-4} e^{-0,126h},$$

если h выражено в километрах, а λ — в микронах [182], в то время как влияние водяных паров $\beta_w \rho_w(h)$ грубо оценивается выражением, данным в [182]

$$0,145 e^{-0,65h}.$$

Для источника света вне атмосферы и для наблюдателя на уровне моря τ может быть принята равной $(0,0090 \lambda^{-4} + 0,223)$.

Солнечный свет — единственное средство освещения, до настоящего времени широко используемое при наблюдениях спутников. Применив уравнение (140) к уравнениям, данным Зеркером и другими [183], для потока S_R , принятого на расстоянии r и под углом σ относительно Солнца от диффузно отражающей сферы радиуса b и альbedo κ , при исходном потоке S_I получим соотношение

$$\frac{S_R}{S_I} = \frac{2\kappa b^2}{3\pi r^2} [\sin \sigma + (\pi - \sigma) \cos \sigma] e^{-\tau(\lambda) \sec z}. \quad (141)$$

Для зеркально отражающей сферы

$$\frac{S_R}{S_I} = \frac{\chi b^2}{4r^2} e^{-\tau(\lambda) \sec z}. \quad (142)$$

Для солнечного освещения вблизи Земли S_I примерно составляет $1,2 \cdot 10^5$ люмен/ m^2 , а λ — около 0,52 μ , что приводит к τ (0,52, ∞ , 0), равному 0,348. Для потока S в люмен/ m^2 соответствующая звездная величина равна

$$-2,5 (\lg S + 5,65).$$

Многие оценки яркости были получены по спутникам, освещенным Солнцем (см. табл. 1), однако спутники, представляющие геодезический интерес (с достаточно высоким перигеем и достаточно малым отношением площади к массе), систематически прослеживались только камерами Бейкера—Нанна Смитсоновской астрофизической обсерватории. При благоприятном сочетании широты и прямого восхождения перигея с долготой узла на этой обсерватории получают до 200 наблюдений в течение 20-дневного периода наблюдений спутников Vanguard ($h \approx 600$ км, $i \approx 33^\circ$, $e \approx 0,18$) [99], однако эти наблюдения относятся менее чем к половине орбиты. Вейс [1] рассматривает геометрические условия возможности наблюдений.

Для обеспечения периодически более ярких отражений были предложены методы гранения поверхности спутников или разбивки ее на секторы [184, 185].

Прослеживание с применением прожекторов было первоначально предложено О'Кифом и самым тщательным образом исследовано Хофманом [184]. В этом случае является обязательным наличие на спутнике возвратно-отражающих призм, посылающих свет в противоположном направлении, которые в настоящее время могут быть изготовлены с углом рассеяния всего лишь в $2''$. Установка на спутнике восьми таких призм из вещества с показателем преломления 1,7 (по четыре вдоль двух «параллелей», под углом 55° к оси) обеспечит отражение по меньшей мере 72% света при поворотах спутника даже на 45° относительно наблюдателя. Для источника с силой света I световой поток S_R от возвратно-

отражающей призмы с эффективностью κ , дисперсией ψ и площадью A будет

$$\frac{S_R}{I} = \frac{4\kappa A}{\pi r^4 \psi^2} e^{-2\tau \sec z}. \quad (143)$$

С учетом дифракции, вращения спутника, неточной наводки, потери света в стекле призмы, абберации и т. д. κ составляет около 0,4. Абберация, вызванная движением спутника, в сочетании с резким падением силы света при удалении от центральной оси прожектора (это удаление составляет $e^{-4 \cdot 10^{-4} \theta^2}$ при угле θ) заставляет пренебречь рассеянием света в атмосфере. При силе света $I = 1,2 \cdot 10^9$ свечей (два стандартных прожектора), $z = 45^\circ$, $r = 2000$ км, $\lambda = 0,52$ м и камере с апертурой в 500 мм уравнение (143) дает для площади призмы на спутнике (для каждого прожектора) величину 100 см². Подобный метод может быть вполне осуществимым, при этом основная трудность будет заключаться, вероятно, в точном определении положения спутника и направлении на него света.

При источнике света на спутнике с силой света I полученный от него поток S_R равен

$$\frac{S_R}{I} = \frac{1}{r^2} e^{-2\tau \sec z}. \quad (144)$$

Эджертон разработал надежные ксеноновые разрядные лампы. Спецификации ламп, представляющиеся выполнимыми, таковы: световая отдача около 35 лм/вт, длительность вспышек около 1 мсек, срок службы — порядка миллиона вспышек [186]. Как указано в § 11, можно обеспечить 1500 вт·сек для каждой вспышки. Если принять, что $\lambda = 0,52$ м и вспышки должны быть зафиксированы на одном полушарии, то плотность световой энергии составит около $(8300/r^2) \exp(-0,348 \sec z)$ лм-сек/м². Уитней и Вейс [174] получили, по существу, те же данные для эффективности вспышек при меньшем коэффициенте поглощения τ и требовании видимости вспышек на всей сфере.

Если принять, что 0,6 орбиты спутника освещается Солнцем и что 0,6 орбиты видно станциям, расположенным в темноте, то скорость накопления энергии (см. § 11) позволит производить по одной вспышке с энергией в

1500 *вт·сек* через каждые 3 *мин*, а запас энергии может обеспечить 200 таких вспышек.

Уравнение (144) применимо также к пиротехническим вспышкам, сила света которых может достигать в максимуме около 20 млн. свечей, в основном в близкой инфракрасной части спектра (1,0 μ) при эффективной (до половины максимума) длительности в 3—5 *мсек* [157, 187].

Рефракция и абберация

Для обеспечения наблюдения возможно большей части орбиты спутника и достижения оптимальной геометрической конфигурации для одновременных наблюдений необходимо производить эти наблюдения на каждой станции на всех зенитных расстояниях до максимального значения, при котором получаются точные результаты. Единственное ограничение точности в этом случае будет ставить рефракция, исследование которой со специальным приложением к спутникам, ракетам и т. п. было осуществлено Вейсом [1], Вайсяля [153, 154] и Брауном [267, 269]. Поправка δz , которую необходимо прибавить к измеренному зенитному расстоянию z_0 , в наиболее сжатой форме выражается интегралом, взятым вдоль пути луча от наблюдаемого тела s до наблюдателя O

$$\delta z = - \int_s^0 \frac{ds}{R} = \int_s^0 \frac{n \nabla \mu}{\mu} ds, \quad (145)$$

где R — радиус кривизны пути луча; μ — коэффициент рефракции; $\mathbf{n}$ — единичный вектор, нормальный к пути луча. Уравнение (145) может быть выведено либо из закона преломления Снеллиуса, либо принимая $\int \mu ds$ за

интеграл действия согласно уравнению (45) и применяя принцип Гамильтона (который известен в оптике, как принцип Ферма). Для зенитных расстояний менее 45° достаточно предположить плоскую модель Земли и экспоненциальное убывание $(\mu - 1)$ с высотой, однако для больших зенитных расстояний формулы для вычисления этого интеграла становятся сложными ввиду необходимости использования сферической модели Земли и выражения зависимости μ и $\nabla \mu$ от s . При решении

последней проблемы помимо экспоненциального убывания с высотой применялось численное интегрирование с использованием значений μ , основанных на метеорологических измерениях, и выражение интеграла в форме $\sum a_i \operatorname{tg}^{2i+1} z_0$, где a_i определяются из наблюдений.

Наибольший интерес в космической геодезии представляет разность рефракций для космического тела и соответствующего звездного фона. Вейс [1] получил

$$\Delta \delta z = -435'', 0 \frac{\operatorname{tg} z_0}{\cos z_0 r} (1 - e^{-0,1385 \cos z_0 r}), \quad (146)$$

что достаточно для $z < 45^\circ$. Для $z > 45^\circ$ Вейс [1] и Браун [267] приводят дополнительные члены.

Более трудно поддающийся учету вид рефракции представляют собой неправильные мерцания, которые не осредняются, что обычно имеет место при длительных экспозициях звезд и кратковременных вспышках. Мерцания были исследованы Неттлбладом [270] и, кроме того, рассмотрены Брауном [187], которые нашли, что величина мерцаний примерно пропорциональна $\sqrt{\sec z}$ и может изменяться от одной ночи к другой на один порядок; эти мерцания обладают характеристической длиной волны порядка 2—4 см. Влияние мерцаний должно убывать с возрастанием апертуры. Экспериментально определенное влияние углового мерцания для апертур больших 100 мм выражается формулой

$$\sigma \{ \alpha \} = \pm \frac{k}{a} \sqrt{\sec z} \left. \vphantom{\frac{k}{a} \sqrt{\sec z}} \right\}, \quad (147)$$

$$0,05 < k < 0,30$$

где α дано в радианах, а a — в микронах.

Помимо обычной годовой и суточной звездной аберраций существует аберрационное влияние, равное v/c , вызванное компонентом скорости спутника относительно Земли, перпендикулярным к линии визирования, величиной порядка двух секунд дуги (см. Вейс [1]). При вычислении смещения луча прожектора относительно зрительной трубы этот угол должен быть удвоен, чтобы учесть изменение направления как посылаемого, так и отраженного света.

Теодолиты

Для прослеживания самолетов и ракет разработаны довольно сложные кинотеодолиты с фоторегистрацией, подобные Askania и Contraves [3]. Хотя и утверждается, что точность определения положения по одному кадру составляет $\pm 20''$, теодолиты, видимо, не обеспечивают геодезической точности при прослеживании спутников, так как в дополнение к трудности регистрации времени, присущей камерам, они требуют введения полной рефракционной поправки согласно уравнению (145), что влечет за собой вычисление μ_0 по наблюдениям температуры, влажности и т. п. по уравнению (157).

Фотографические камеры

Для фильма с заданной чувствительностью эмульсии E_x , разрешающей способностью, характеризуемой диаметром «пятна» a_x , при камере с апертурой a и фокусным расстоянием f , в момент фотографирования тела, обладающего угловой скоростью движения относительно камеры ω и выдержкой Δt , необходимый световой поток S_R составляет

$$S_R = \frac{\pi a_x^2 + 4a_x f \omega \Delta t}{\pi a^2 \Delta t} E_x. \quad (148)$$

Здесь E_x в типичных случаях составляет $0,004 \text{ лм} \cdot \text{сек}/\text{м}^2$ ($= \text{ASA } 250$), чтобы обеспечить достаточный контраст с фоном фильма, а a_x изменяется в пределах от 18 до 30 μ . Для прослеживающей камеры второй член в числителе уравнения (148) становится равным нулю. Для закрепленной камеры при фотографировании движущегося, постоянно освещенного тела первый член в числителе становится пренебрегаемо малым.

Конструкция камеры Бейкера — Нанна (прослеживающая камера с оптической системой шмидтовского типа) подробно описана в [188, 189]. Она может прослеживать как спутники, так и звезды (а также другие объекты), имеет апертуру 500 мм, фокусное расстояние 500 мм и дает изображения диаметром 20—30 μ . Камера имеет сферическую фокальную поверхность и использует 56-мм фильм. Точность измерительной системы камера—

фильм — пластинка (с использованием компаратора Манна) составляет для изображений звезд $\pm 1-2''$ ($\pm 2,5-5 \mu$) [190]. Эта точность не была проверена в отношении изображения спутников, так как камеры не применялись для одновременных наблюдений. По предварительной оценке она составляет $6''$ [191]. Точность регистрации времени в дополнение к факторам, описанным в § 11, зависит от одновременности фотографирования показаний вторичных часов, освещаемых газоразрядной лампой, и момента прохождения затвором центральной точки кадра. Предполагается, что моменты, определяемые с применением сигналов времени высокой частоты, заслуживают доверия в пределах 10 мсек , а некоторые — в пределах 2 мсек [192]. Применение сигналов времени весьма низкой частоты должно привести к некоторому повышению точности.

Система из 12 камер Бейкера — Нанна, используемая астрофизической обсерваторией Смитсоновского института, обеспечивает в среднем 1200 успешных наблюдений в месяц [271]. Эти наблюдения публикуются в серии «Специальные отчеты по исследованиям в космических науках» (*Research in Space Sciences, Special Reports*) сначала в предварительном, а затем в окончательном виде.

Марковиц [193] разработал и сконструировал камеру, которая одновременно прослеживает спутник и звезды получением изображения спутника при помощи вращающейся стеклянной пластинки толщиной 13 мм . Апертура камеры 178 мм , фокусное расстояние 1015 мм . Точность измерения положений $\pm 5''$, а точность регистрации времени $\pm 0,002$.

Если изображение спутника получается в форме вспышек, а не непрерывно, то преимущества прослеживающих камер [188, 193] утрачиваются, так как в этом случае будет сказываться влияние любых неправильностей в прослеживании. В подобных случаях следует производить стационарные наблюдения, а время должно измеряться либо по одновременным радиосигналам, либо при помощи фотоэлементов [174].

Для наблюдений спутников разработано несколько систем с закрепленными камерами: баллистические камеры [157, 187, 194] с апертурой 117 мм и фокусным расстоянием 304 мм ; модифицированные аэрофотока-

меры [195] с апертурой 203 мм и фокусным расстоянием 1015 мм; особо сконструированная камера [196] с апертурой 145 мм и фокусным расстоянием 910 мм. Все эти камеры обладают мобильностью, а также тем преимуществом по сравнению с камерами Бейкера—Нанна, что в них применяются стеклянные пластинки, а не пленка. Будучи закрепленными и имея небольшую апертуру, они обладают недостатком, состоящим в необходимости более сильного источника света. По этой причине, равно как и для ослабления влияния мерцаний и увеличения угловой точности, предложена баллистическая камера больших размеров с апертурой 300 мм и фокусным расстоянием 1200 мм [187]. Точность регистрации времени баллистическими камерами и модифицированными аэрокамерами имеет порядок $\pm 0^s,010$, что достаточно для ориентировки по звездам и для одновременного наблюдения сигнальных ракет или вспышек со спутника. Камера Хьюита [196], в которой показания часов регистрируются на снимке при освещении лампой-вспышкой, характеризуется точностью регистрации момента прохождения дисковым затвором фотоэлектрического элемента в $\pm 0^s,001$.

Точность измерения пластин баллистических камер при наблюдении изображений световых ракет, как это вполне подтверждено одновременными наблюдениями в геометрически избыточных сетях, составляет $\pm 3\mu$ (стандартное отклонение) [157, 187, 197].

Было высказано несколько предложений относительно одновременных наблюдений вспышек ракет на звездном фоне [153, 155, 157], [187, 195, 198, 199]. Фактически произведенные испытания по этим предложениям включают наблюдения:

(1) световых сигналов на воздушном шаре на высоте 15—20 км; наблюдения велись при помощи телескопов с фокусными расстояниями в 689 и 1031 мм в Хельсинки и Турку (расстояние между станциями 153 км); вычисленная средняя квадратическая ошибка направления $\pm 2''$ [154];

(2) осветительных ракет на высоте более 700 км; наблюдения велись при помощи трех баллистических камер, расположенных на Бермудских островах и на восточном побережье США; для Бермудских островов была вычислена средняя квадратическая ошибка положения ± 18 м [197].

В общем, при неодновременных наблюдениях, упомянутых в § 10, камеры могут обеспечить точность определения положений в ± 10 м, равно как и более подробную гравиметрическую информацию, если только ошибка регистрации времени сведена к $\pm 0^s,001$, например путем передачи радиосигналов со спутника, передаваемых одновременно со вспышкой. Другая возможность состоит в управлении вспышками при помощи тщательно контролируемых часов на спутнике. Значительными возможностями по чувствительности и точности обладает фотоэлектрическое прослеживание [272], при котором регистрируется момент прохождения щели светом спутника или звезды.

Спутниковая фотограмметрия

Можно ожидать, что, подобно происшедшему изменению в обычном применении геодезического и фотограмметрического методов, впоследствии к фотограмметрии перейдут многие задачи спутниковой геодезии. До сих пор этот предмет мало рассматривался в опубликованных работах [200, 201]. Ниже приведены некоторые существенные предпосылки для развития подобной фотограмметрии:

1. Камера с высокой геометрической точностью.
2. Широкоугольная съемка для ограничения числа стереоскопических моделей, осуществляющих связь между точками существующего геодезического обоснования. Сочетание пунктов 1 и 2 обязательно вызовет низкую разрешающую способность, в связи с чем необходим следующий пункт.
3. Средства для точной привязки к геодезическому обоснованию фотографий с низкой разрешающей способностью.

Кроме того, пункт 1 подразумевает условия 4 и 5:

4. Высокостабильный фильм.
5. Восстановление фильма.

Для более жесткого контроля фотограмметрических измерений, кроме того, требуется соблюдение условия 6:

6. Ориентировка в пределах $5''$ при помощи звездной камеры, синхронизированной с наземной камерой в пределах около $0,^s01$.

7. Точно вычисленная орбита с наземным прослеживанием.

Соображения скорости и освещенности дополнительно требуют условия 8:

8. Компенсация сдвига изображения.

При разработке фотограмметрического спутника значительная польза может быть получена от привлечения данных разработки космической астрономической обсерватории [202], так как в последнем случае возникают аналогичные проблемы стабилизации, ориентировки, устойчивости размеров при температурных изменениях и т. д., но в более острой форме.

§ 13. РАДИОТЕХНИКА

Результат любого радиоизмерения (применительно к спутникам) зависит от соотношения фазы принятого сигнала и фазы опорного сигнала (стандарта) той же или почти той же частоты. В интерференционных измерениях используется разность фаз сигналов одного и того же источника, полученных в один и тот же момент двумя различными антеннами на поверхности Земли

$$\Delta_s \Phi = \frac{\omega}{c} (r_1 - r_2), \quad (149)$$

где ω — частота (*радиан/сек*), относительно которой подсчитывается разность фаз, а c — скорость света.

При измерениях на основе эффекта Допплера используется разность скоростей изменения фазы принятого сигнала и опорного сигнала на наземной станции

$$\Delta \omega = \Delta \dot{\Phi} = \frac{\omega}{c} \dot{r}. \quad (150)$$

При измерении дальности используют изменения фазы сигнала от момента его передачи с наземной станции на ответчик или отражатель до момента его вторичного приема

$$\Delta_t \Phi = 2 \frac{\omega}{c} r. \quad (151)$$

Индекс t в уравнении (151) означает, что это — временная разность фаз в отличие от пространственной разности фаз $\Delta_s \Phi$ уравнения (149).

Аберрация влияет на уравнения (149) — (151) тем, что положение спутника или ракеты, а также их скорости

меняются в течение промежутка времени распространения сигнала. Для того чтобы эти уравнения соответствовали моменту ухода сигнала со спутника или ракеты, в них должны быть введены небольшие поправки.

Уравнения (149) — (151) подразумевают постоянство c , которое имеет место только в вакууме. Поэтому необходим учет влияния среды, через которую проходит сигнал.

Влияние среды на распространение радиосигналов

Фактические изменения фаз, происходящие при прохождении сигналов через атмосферу, таковы:

$$\Delta_s \Phi = \frac{\omega}{c} \{ (\int \mu ds)_1 - (\int \mu ds)_2 \}; \quad (152)$$

$$\Delta \omega = \frac{\omega}{c} \cdot \frac{d}{dt} (\int \mu ds); \quad (153)$$

$$\Delta_t \Phi = \frac{\omega}{c} \{ (\int \mu ds)_{\text{вверх}} + (\int \mu ds)_{\text{вниз}} \}, \quad (154)$$

где μ — коэффициент преломления, а интегралы взяты по пути распространения сигнала.

Изменение разности фаз $\delta \Delta \Phi$ интерференционной системы с базисом длиной Δx вследствие поворота $\delta \psi$ фронта волны, исходящей из источника, при его приходе к наземным станциям равно

$$\delta \Delta \Phi = \frac{\omega}{c} \Delta x \sin \psi \delta \psi, \quad (155)$$

где ψ — угол между базисом и возвращающимся лучом. Математическое выражение для $\delta \psi$ противоположно уравнению (145).

Радиоинтерференционным измерениям по сравнению с оптическими присущи дополнительные трудности, заключающиеся в том, что как коэффициент преломления в окрестности источника, так и горизонтальные градиенты этого коэффициента могут оказывать ощутимое влияние. Наиболее детальное теоретическое исследование «клинового компонента», вызванного горизонтальными градиентами, в связи с радиоастрономией, было выпол-

нено в [273]. Применение к сигналам со спутников рассматривается в [203] и [204].

При дифференцировании по времени доплеровского уравнения (153) должно учитываться изменение верхнего предела интегрирования вследствие движения источника. В результате, применяя принцип Ферма и принимая изотропию μ [205],

$$\Delta\omega = \frac{\omega}{c} \left(\mu_s \mathbf{t}_s \dot{\mathbf{r}} + \int \frac{\partial \mu}{\partial t} ds \right), \quad (156)$$

где $\mathbf{t}_s$ — единичный вектор, касательный к лучу у источника.

Обычно влияния рефракции в первом члене уравнения (156) будут большими, чем влияния второго члена, в котором влияния нерегулярностей сглаживаются в результате интегрирования.

Для интегрирования второго члена в уравнении (156) или интегрирования в обоих случаях в уравнении для расстояния (154) (соответствующие интегралы имеют разности только высших порядков) имеется также возможность использовать принятые значения μ или $\partial\mu/\partial t$ и интегрировать численно, графически либо аналитически, раскладывая $\int \mu ds$ или $\int (\partial\mu/\partial t) ds$ по отрицательным степеням ω (или f), как это сделано Гайером и Уэйффенбаком [165, 166] и Дейвисоном [206]. Эффективность каждого из этих методов зависит в конечном счете от одного или немногих параметров, влияние которых может быть исключено применением кратных частот. Осуществимость этих методов зависит от физической природы коэффициента преломления μ , который разделяется на две части.

1. Коэффициент преломления тропосферы, который уже известен в геодезии по его влиянию на радиогеодезические измерения [207] и определяется стандартными формулами, подобно формуле, принятой Международным геодезическим и геофизическим союзом [274]

$$(\mu - 1) 10^6 = \frac{103,49}{T} (p - e) + \frac{86,26}{T} \left(1 + \frac{5748}{T} \right) e, \quad (157)$$

где давление воздуха p и давление водяных паров e выражены в миллиметрах ртутного столба, а T — в градусах Кельвина.

Бин [208] рассматривает формулы для экстраполирования $\mu(h)$ по заданным значениям μ_0 на поверхности Земли и, по данным восьмилетних наблюдений на территории США, выводит различные правила для зон 0—1 и 1—9 км. На высоте 9 км величина $(\mu-1)$ составляет в среднем $105 \cdot 10^{-6}$ и изменяется в пределах только $8 \cdot 10^{-6}$. Над высотой 9 км величина $(\mu-1)$ с погрешностью, не большей $\pm 15\%$, может быть представлена уравнением

$$\mu - 1 = 105 \cdot 10^{-6} e^{-0,142(h-9)}, \quad h \geq 9 \text{ км.} \quad (158)$$

2. Коэффициент преломления ионосферы, зависящий от электронной концентрации [141],

$$\mu = \sqrt{1 - \frac{4\pi N e^2}{\epsilon_0 m \omega^2}} = \sqrt{1 - 3,18 \cdot 10^9 \frac{N}{\omega^2}}. \quad (159)$$

Здесь N — электронная концентрация, выраженная в см^{-3} , e и m соответственно означают заряд и массу электрона, а ϵ_0 — диэлектрическую проницаемость воздуха. Если частота выражена в герцах ($f = 2\pi\omega$) и превышает или равна 10^8 гц, а N выражено в числе электронов на кубический метр, то

$$\mu = 1 - \frac{40N}{f^2} = 1 - 1,6 \cdot 10^3 \frac{N}{\omega^2}. \quad (160)$$

Электронная концентрация N — функция интенсивности ионизирующей радиации, плотности атмосферы и ее химического состава, причем все указанные аргументы определяют скорость образования свободных электронов, а последние два определяют скорость их уничтожения в результате рекомбинации. Если принять коэффициенты для скорости обоих этих процессов постоянными, равновесие между этими процессами установленным, ионизирующую радиацию считать следствием воздействия Солнца, а изменение плотности атмосферы представить экспоненциальным законом как в уравнении (96), то электронная концентрация может быть представлена моделью Чэпмена [141]

$$N = N_{\max} \frac{\exp \frac{1}{2} [1 - z - e^{-z} \sec \chi]}{\sqrt{\cos \chi}}, \quad (161)$$

где $z = (h - h_0)/H$, h_0 — высота, соответствующая $N_{\max}$, а χ — зенитное расстояние Солнца. Но вычислять угол χ неудобно, коэффициенты ионизации и рекомбинации известны не точно; кроме того, на интенсивность радиации воздействует геомагнитное поле, так что обычно для обработки наблюдений применяют эмпирическую модель, которая соответствует формуле

$$N = N_{\max}(h_0, \varphi, \lambda, t) \exp \frac{1}{2} (1 - z - e^{-z}). \quad (162)$$

Время t в уравнении (162) выражает время суток, года и фазы 11-летнего и 27-дневного солнечных циклов. $N_{\max}$ определяется подстановкой $\mu = 0$ в уравнение (160) при одновременном использовании наблюдаемой $f_{\max}$ (высшая частота колебаний, отраженных ионосферой), причем h_0 определяется по временной задержке этого сигнала. На основе этих ионосферных наблюдений ежемесячно предсказываемые значения $f_{\max}$ и h_0 для аргументов (φ, λ) , времени суток и фазы 11-летнего цикла солнечных пятен публикуются в *Основных прогнозах распространения радиоволн (Basic Radio Propagation Predictions)* Национального бюро стандартов и в изданиях аналогичных служб примерно 12 других стран.

Модель Чэпмена, см. уравнение (162), показывает, что большая часть содержания электронов, существенного для спутников на геодезически полезных высотах, окажется в окрестности и над высотой h_0 . Содержание электронов ниже h_0 (240—440 км) хорошо изучено зондированием ионосферы. Можно ожидать, что отклонения от простой модели будут даже большими над h_0 и поэтому желательно проведение дальнейших наблюдений. С появлением спутников и более мощных радиолокационных устройств с весьма высокой (VHF) и ультравысокой (UHF) частотами разнообразные экспериментальные результаты были получены для таких явлений, как вращение плоскости поляризации сигналов, отраженных от спутников или Луны, различия доплеровских смещений двух частот в соответствии с уравнением (156), смещения частоты при рассеивании ультракоротких колебаний и т. д. Однако большинство подобных измерений либо ограничено по объему, либо их интерпретация неуверенна. Основные свойства ионосферы выше $2h_0$ описаны в специальной литературе [141, 209], а результаты наблю-

дений при помощи новой техники (выше h_0) — во многих материалах (например, в докладах, включенных в отчеты симпозиумов последнего времени [210, 211]). Эти свойства таковы:

1. Осредненный по всему миру и по времени суточный максимум $N_{\max}$ в экваториальном и умеренных поясах составляет $2 \cdot 10^{12}$ электрон/ m^3 при $h_0 = 400$ км.

2. С учетом 11-летнего цикла солнечных пятен имеют место вариации годовых средних значений суточного максимума $N_{\max}$ от $1 \cdot 10^{12}$ до $3 \cdot 10^{12}$ электрон/ m^3 .

3. Имеются неправильные сезонные вариации $N_{\max}$, в основном отрицательно соотнесенные с широтой Солнца.

4. Средние суточные вариации в $N_{\max}$ и h_0 в экваториальном и умеренных поясах составляют соответственно от (примерно) $2 \cdot 10^{12}$ электрон/ m^3 в два часа пополудни и 400 км от 12 часов до двух часов пополудни, до (примерно) $2,5 \cdot 10^{11}$ электрон/ m^3 в пять часов утра и 240 км от часу до пяти утра. В полярных районах $N_{\max}$ остается примерно на уровне $2 \cdot 10^{11}$ электрон/ m^3 на высоте 400 км.

5. Магнитные бури могут вызвать падение $N_{\max}$ на один порядок и возрастание h_0 .

6. Сезонные вариации в полной электронной концентрации в умеренных поясах для раннего послеполуденного времени имеют порядок $3 \cdot 10^{17}$ электрон/ m^3 летом и $6 \cdot 10^{17}$ электрон/ m^3 зимой.

7. Нерегулярные вариации электронов от суток к суткам имеют порядок 20—30 %.

8. Регулярные суточные вариации полной электронной концентрации возрастают от минимальных непосредственно перед рассветом до максимальных (примерно втрое больших) в раннее послеполуденное время.

9. Отношение содержания электронов над h_0 к содержанию их ниже h_0 по результатам различных исследований находится в пределах от 1,5 до 5.

10. Для того чтобы измеренная вплоть до высот в окрестности 1000 км электронная концентрация могла быть аппроксимирована уравнением (162) модели Чэпмена, необходима масштабная высота H порядка 100 км.

11. По всей ионосфере могут встречаться отличающиеся по электронной концентрации до одного порядка «облака», имеющие вертикальную протяженность до 1 км (нижний предел) и быстро движущиеся.

При высоте спутника в 1000 км и частоте передачи

в 10^8 гц пункты 1 и 10 указывают на рефракционные влияния при интерференционных и доплеровских измерениях порядка 1:1000, а пункт 6 указывает на рефракционное влияние того же порядка в измерениях расстояний. Пункты 5, 7 и 11 означают, что вариации относительно любой модели представляют собой большую долю полных влияний. Поэтому геодезическая точность требует либо кратных частот более чем 10^8 гц, либо единых частот, больших 10^9 гц. (Другая возможность [206] состоит в получении исправленного за показатель преломления расстояния на одной несущей частоте сочетанием одновременно импульсной и непрерывной работы.)

Ионосфера, кроме того, вызывает затухание радиосигналов. Это затухание пропорционально $1/f^2$ и пренебрегаемо мало для частот, больших 10^8 гц (которые бывают необходимы по рефракционным соображениям).

Интерференционные системы

Система Минитрек [185, 212, 253, 280] имеет три пары антенн, расположенных соответственно на расстояниях в 500, 64, 12 футов друг от друга вдоль линии север — юг, и две пары антенн — на расстояниях в 500 и 64 фута друг от друга вдоль линии восток — запад, что обеспечивает прием в пределах 100° с севера на юг и 10° — с востока на запад. Сигналы от спутника, принятые на одну пару антенн, смешиваются с сигналами от местного генератора и образуют сигнал звуковой частоты, который сравнивается с опорным сигналом для измерения разности фаз с точностью 0,001 цикла, что при рабочей частоте 108 Мгц эквивалентно геометрической угловой точности в $4''$. Разность фаз регистрируется как в аналоговой, так и цифровой форме с указанием моментов времени с точностью около $0,^s001$. Система калибруется прослеживанием самолета, который подает световые сигналы, фотографируемые на фоне звезд. Эта калибровка обеспечивает не только ориентировку относительно инерциальной системы, упомянутой в § 11, но также и поправки за ошибки установки и несовершенства антенн и других элементов системы. При получении сглаженного решения для направляющих косинусов l , m относительно обоих базисов на момент времени, соответствующий целой секунде, ближайшей ко времени на ме-

ридиане системы, эти поправки выражаются как полиномиальные коэффициенты. После этого в направляющие косинусы вводится рефракционная поправка

$$l_{\text{попр}} = l_{\text{набл}} - \delta l = l_{\text{набл}} + \sin \phi \delta \psi \approx l_{\text{набл}} (1 + \mu_0 - \mu_s), \quad (163)$$

где μ_s определяется по прогнозам распространения радиоволн [см. уравнения (162) и (160)], а μ_0 — по уравнению (157).

Поскольку ощутимая часть ионосферного рефракционного влияния зависит от электронной концентрации вдоль одной кривой — орбиты спутника — сглаженное решение действует так, что уменьшает влияния неправильных флуктуаций в этом влиянии.

Инструментальная точность системы Минитрек при частоте 108 *Мгц* и базисе 500 футов оценивается величиной $\pm 20''$, заметную часть которой составляет медленно меняющаяся ошибка в ориентировке, о чем свидетельствуют изменения последней от одной калибровки к последующей [280]. Спутники, передающие сигналы, наблюдаются в среднем шесть раз в сутки сетью из 13 станций, работающих в настоящее время не на частоте 108 *Мгц*, а на частоте 136 *Мгц*.

Более простая система, Марк II Минитрек [213], снабжена только одной парой антенн на расстоянии 1000 футов друг от друга и предназначена только для обнаружения, а не для измерительных целей. Калибровка этой системы была выполнена по радиозвездам [214], но оказалась недостаточной. Станции Марк II Минитрек работали примерно на шести островах Тихого океана.

Другими интерференционными системами являются системы Ацуза и Микролок [215].

Допплеровские системы

Система Транзит [166, 178, 216] ведет передачи на четырех частотах: 54 и 324 *Мгц*, задаваемых одним кварцевым генератором, и 162 и 216 *Мгц*, задаваемых другим кварцевым генератором, причем стабильность частоты каждого генератора лучше, чем 10^{-9} за 15 мин. После приема сигналов наземной станцией они смешиваются с сигналами эталонной частоты и образуются результирующие сигналы разностной частоты. Результирующий сигнал подается один раз каждые 2 сек в пересчетное

устройство, которое выдает частоту на цифровой счетчик. Эта частота, кроме того, регистрируется вместе с марками времени на ленте выходного устройства. Работа пересчетного устройства контролируется одной эталонной частотой, стабильной в пределах 10^{-9} за 15 мин, причем обеспечиваются импульсы, контролирующие ввод сигналов в пересчетное устройство, циклы счета (1 Мгц) и работу часов, дающих марки времени. Эталонная частота сравнивается с сигналами служб стандартного времени.

Две принятые частоты ($i=1; 2$) используются для исключения параметра $\alpha(t)$ из одной пары уравнений, как в (156),

$$\Delta f_i(t) = \frac{f_i}{c} |\mathbf{r}_T| + \frac{\alpha(t)}{f_i}. \quad (164)$$

Все данные прохождения затем используются для вычисления орбиты (или для вычисления координат станции при фиксированной орбите). При этих вычислениях поправка к стандартной частоте на спутнике включается в каждом прохождении как отдельное неизвестное. Лучшее, но более сложное решение проблемы стандартной частоты состояло бы в помещении на спутнике ответчика, так что в этом случае сигнал, принятый со спутника, управлялся бы тем же стандартом частоты, что и наземная эталонная частота.

Другой доплеровской системой является система Доплок [275].

Дальномерные системы

Система Секор [217] является системой с непрерывной модуляцией. Наземная станция излучает сигнал на несущей частоте 421,2 Мгц, модулированный четырьмя частотами (f_1, f_1-f_2, f_1-f_3 и $f_1-f_2+f_4$), такими, что $f_1=c/2^9$ м (около 586 кгц), $f_2=2^{-4} f_1$, $f_3=2^{-8} f_1$, $f_4=2^{-11} f_1$. Ответчик спутника ретранслирует сигнал на несущей частоте 448,8 Мгц, модулированный теми же четырьмя частотами модуляций, и сигнал на несущей частоте 224,4 Мгц, модулированный только частотой f_1 . Разрешенный от неоднозначности сдвиг фаз получают измерением сдвигов фаз на всех четырех модулирующих частотах, принятых со

спутника, относительно стандартных частот, действующих также на наземный приемник. Точность измерения разности фаз в 0,001 цикла эквивалентна 10^{-3} ($c/2^9$) м расстояния или точности 0,5 м. Расхождение между сдвигами фаз, полученное на несущих частотах 224,4 и 448,8 МГц, используется для вывода исправленного расстояния r (и между прочим для оценки полной электронной концентрации между наземной станцией и спутником), принимая, что уравнение (160) использовано в уравнении (154),

$$(\int \mu ds)_{\text{верх}} + (\int \mu ds)_{\text{вниз}} = 2 \left\{ r + \Delta r_{\text{тр}} - \frac{40}{f^2} (\int N ds)_{\text{вниз}} \right\}, \quad (165)$$

где тропосферное влияние $\Delta r_{\text{тр}}$ в соответствии с уравнениями (157) и (158) имеет порядок 3 м. В системе Секор, как и в системах Минитрек и Транзит, предусмотрено частое сопоставление исправленных результатов и моментов времени, а также контроль частоты и абсолютного времени по сигналам VLF службы времени.

Геодезическая система Секор из четырех наземных станций должна войти в эксплуатацию в 1961 г.

Мэррей [175], Лис и другие [176] исследуют возможность применения импульсной дальномерной системы вместо фазовой, а Девисон [206] — применение дальномерной системы, сочетающей оба метода. Видимо, импульсные системы могут обеспечить ту же точность и максимальную дальность действия при данной средней мощности, но требуют более тяжелого оборудования, чтобы удовлетворить требованию намного более высокого максимума мощности.

Дальномерные системы не так чувствительны к стабильности частоты, как доплеровские системы, но результаты измерения ими намного больше зависят от точности определения скорости света в вакууме, нынешнее принятое значение которой составляет $299\,792,5 \pm 0,4$ км/сек [274].

Радиопрослеживающие системы, по-видимому, не имеют существенных ограничений. Все ионосферные влияния второго порядка, которые здесь не учитывались, незначительны (см. [176, 206]). Таким образом, к факторам, влияющим на выбор радиопрослеживающей системы, следует отнести только стоимость и технические трудности. По сравнению с оптическими системами радиосисте-

мы обладают преимуществами работы в любую погоду и в дневное время и требуют меньшей мощности на спутнике, чем световые вспышки сравнимой дальности действия (например, для системы Секор при максимальной дальности действия 6000 км, 0,2 Вт запасной и 27 Вт эксплуатационной мощности).

В настоящее время разрабатывается стационарная система Мистрем [187, 276] для получения существенно повышенной точности измерения дальности, направлений и скорости изменения дальности.



§ 14. ТОПОГРАФИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ ЛУННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Основная трудность в технике наблюдений Луны возникает при соотнесении точек поверхности Луны, которые используются при наблюдениях, к центру ее масс, координаты которого входят в уравнения движения Луны. Ошибка в положении наблюдаемых точек выражается в уравнениях (119)—(121) через $\varepsilon(b_1, b_2)$ и имеет заметное влияние на координаты станции наблюдателя. Поэтому желательно как можно более точно зафиксировать на карте Луны формы ее топографии и, что более важно, свести к минимуму систематические ошибки с тем, чтобы точность полученных геодезических положений могла бы быть существенно повышена повторными наблюдениями с использованием различных топографических форм.

Представляющая с этой точки зрения интерес зона включает топографические формы, которые могут попасть на край Луны в ее некотором либрационном положении (зона шириной около 18° селенографической долготы на каждом крае Луны). Порядок соответствующих погрешностей в опубликованных материалах (карты Хайна [218] и профили Веймера [219]) оценивается величиной $0,2—0'',3$, что эквивалентно $400—500$ м в положении. Погрешность улучшенных материалов Уаттса [220, 221], которые должны выйти в свет в конце 1961 г., оценивается средней квадратической ошибкой примерно $0'',07$. Улучшение было достигнуто не только более тщательными измерениями и постановкой контроля, но также и

уменьшением интервала между профилями: для обеспечения всего района либраций по широте и долготе было использовано 503 профиля (см. [5], стр. 59—78).

§ 15. МЕТОДЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СОЛНЕЧНЫХ ЗАТМЕНИЙ

Солнечные затмения с 1944 по 1954 г. широко изучались и наблюдались для геодезических целей как фотографическими, так и фотоэлектрическими методами. Большая часть наблюдений, однако, оказалась неудачной из-за плохой погоды и затруднений, вызванных работой аппаратуры. Наиболее удачными оказались работы по геодезической связи Золотого Берега * и Бразилии в 1947 г. [222], ненадежность которой оценивается величиной ± 94 м, включая ошибку, вызванную использованием карт Луны Хайна [218]. Исчерпывающее изложение методов использования солнечных затмений дано в ([5], стр. 147—242).

§ 16. МЕТОДЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПОКРЫТИЯ ЗВЕЗД

Фотоэлектрические наблюдения покрытий звезд Луной, разработанные О'Кифом, Хенриксеном и другими [92, 163, 223, 224] и ([5], стр. 243—267), широко применяются с 1950 г. При этом используется кассегрёновский телескоп с фокусным расстоянием 480 см и апертурой 30 см. Покрытие звезды Луной — весьма четкое явление. Основная трудность регистрации момента этого явления заключается в малой величине отношения сигнал—шум для света от звезды и света, рассеянного от близлежащей светлой части Луны. Используемый для преодоления этой трудности метод заключается в применении диафрагмы, ограничивающей поле зрения для лучей, падающих на фотоячейку, до 10", а также ряда диафрагм, размещенных в трубе телескопа. Малое поле зрения, в свою очередь, вызывает необходимость в точных зеркалах и в тонко выполненной направляющей системе. Фотоячейкой является фотоумножитель RCAIP21 чувствительностью в 10^{-14} лм при 25°C. Покрытия звезд до 9-й величины наблюдаются с точностью регистрации времени в 0^s,01.

* Ныне республика Гана. — Прим. перев.

Влияние ошибок, вносимых лунной топографией, уменьшается применением метода, упомянутого в § 9, при котором покрытие наблюдается с двух точек, выбираемых так, что луч света от звезды загораживается одной и той же точкой лунной поверхности. Этот метод является эффективным, потому что изменения лунного профиля, описанные в § 14, довольно незначительны, т. е. имеет место высокая степень корреляции в отклонениях лунной поверхности от сферической. При вычислении положений точек на одной и той же линии необходимо учитывать рефракцию.

Точность определения взаимного положения точек методом покрытий, определяемая по внутренней сходимости ряда измерений, примерно ± 200 м. В настоящее время уравниваются результаты наблюдений с точек, образующих сеть (более чем из 48 пар) в районе Тихого океана [163].

§ 17. ЛУННЫЕ ФОТОГРАФИЧЕСКИЕ КАМЕРЫ

Лунные камеры Марковица [159], ([5], стр. 243—267), используемые с 1952 г., были установлены на 20 обсерваториях. Они могут быть присоединены к отражательным телескопам с апертурой 20 см или более и с фокусным расстоянием 2—6 м. Изображение Луны перехватывается фильтром (плоско-параллельной пластинкой толщиной 1,8 мм) с коэффициентом передачи 0,001. Скорость, с которой меняется наклон пластинки, такова, что изображение Луны оказывается неподвижным относительно изображений звезд. Эпоха наблюдения определяется по параллельности пластины-фильтра и неподвижной пластины. Время экспозиции составляет 10—20 сек. Погрешность регистрации момента времени исключается поворотом камеры.

При измерении фотопластинки используется около 10 звезд и 30 точек на краях Луны. Вероятная ошибка наблюдений в течение ночи составляет около $\pm 0'',15$ по каждой координате. Поскольку, как правило, наблюдения удается выполнить в течение 100 ночей в год, то наиболее существенными оказываются систематические ошибки. Эти ошибки вызваны телескопами и работой механизмов измерительных пластин. Телескопы калибруются сравнением наблюдений одного и того же звездного

участка, а систематическая ошибка работы моторов оценивается величиной около 0,1 μ . Погрешность годового цикла наблюдений Марковиц [158] оценивает величиной около $\pm 0,002$.

§ 18. РАДИОЛОКАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

С 1950 г. непрерывно увеличивающаяся программа радиолокационного изучения Луны выполняется в нескольких местах. В исследованиях Япли с коллегами [93, 94, 95] особое значение уделялось точности определения расстояния до Луны в течение многих месяцев с использованием 50-футового рефлектора Морской исследовательской лаборатории при длинах волн 10 и 21 см. Точность определения момента приема отраженного импульса составляет $\pm 2 \cdot 10^{-6}$ сек, а неопределенность определения расстояния при наблюдениях за одну ночь по внутренней сходимости $\pm 0,3$ км. Однако природа отражений от Луны, включая протяжение отражающего участка, все еще неизвестна. Более того, в расхождениях измеренных расстояний до Луны относительно расстояний, соответствующих орбитальной теории, имеет место месячная периодическая вариация с амплитудой около 4 км, которую приписывают влиянию неправильностей в форме Луны. Опубликованный в самое последнее время результат определения расстояния Земля — Луна, учитывающий поправку ± 1 км за радиус Луны, равен $384402 \pm 1,2$ км [95].

Глава V

СОВМЕСТНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДАННЫХ КОСМИЧЕСКОЙ И НАЗЕМНОЙ ГЕОДЕЗИИ



§ 19. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ

Соотношения между различными системами координат таковы [1, 39]:

$$\left. \begin{array}{lll}
 \text{Геодезическая} & \text{Прямоугольная} & \text{Сферическая} \\
 (\nu + h) \cos \varphi_g \cos \lambda & = x & = r \cos \varphi \cos \lambda = \\
 (\nu + h) \cos \varphi_g \sin \lambda & = y & = r \cos \varphi \sin \lambda = \\
 [(1 - e^2) \nu + h] \sin \varphi_g & = z & = r \sin \varphi = \\
 \\
 \text{Эллипсоидальная} & & \\
 = \sqrt{\rho^2 + c^2} \sqrt{1 - e^2} \cos \lambda; & & \\
 = \sqrt{\rho^2 + c^2} \sqrt{1 - e^2} \sin \lambda; & & \\
 = \rho \sigma, & &
 \end{array} \right\} (166)$$

где радиус кривизны в первом вертикале $\nu = \frac{a_e}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_g}}$;
 e — эксцентриситет и a_e — экваториальный радиус.

Если для параметра формы в эллипсоидальных координатах сделан удобный с астрономической точки зрения выбор $c = a_e \sqrt{J_2}$ (§ 4, [38], [39]), то соотношение с геодезическими координатами усложняется тем, что последние относятся не к гравитационной эквипотенциальной поверхности, а к поверхности равного потенциала силы тяжести, т. е. необходимо принимать во внимание потенциал, возникающий вследствие вращения Земли. Наиболее удобными промежуточными данными оказыва-

ются параметры гравитационного поля $\mu = kM$ и величины J_{2n} . Ламберт [225, 226], Кук [227] и Коэн [277] вывели необходимые формулы для внешнего потенциала вращающегося эллипсоида. Основными являются члены:

$$\left. \begin{aligned} kM &= a_e^2 g_e \left[1 + \frac{3}{2} m - f - \frac{15}{4} mf + O(f^3) \right] \\ J_2 &= \frac{2}{3} f \left(1 - \frac{1}{2} f \right) - \frac{1}{3} m \left(1 - \frac{3}{2} m - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{7} f \right) + O(f^3) \\ J_4 &= -\frac{4}{35} f (7f - 5m) + O(f^3) \\ J_6 &= O(f^3) \end{aligned} \right\}, \quad (167)$$

где g_e — ускорение силы тяжести на экваторе; m — отношение центробежной силы на экваторе к g_e , т. е.

$$m = \dot{\theta}^2 a_e / g_e,$$

а сжатие

$$f = 1 - \sqrt{1 - e^2}.$$

Несколько дополнительных формул, относящихся к вращающемуся эллипсоиду и его внешнему полю, приводятся Ламбертом [225], Коэном [277], Куком [227] (его обозначение m отличается от принятого в данной работе) и Хирвоненом [228], который определяет внешнее поле через компоненты ускорения, а не потенциала.

Отклонения от вращающейся эллипсоидальной модели, определяемой уравнением (167), выраженные через ускорение силы тяжести $\Delta g(A_{nm}, B_{nm})$ или через высоты геоида (C_{nm}, D_{nm}) , имеют вид

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} J_{nm} \\ K_{nm} \end{matrix} \right\} &= \frac{-a_e^2}{kM(n-1)} \left\{ \begin{matrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{matrix} \right\} + O(f^3) = \\ &= \frac{-a_e g_e}{kM} \left\{ \begin{matrix} C_{nm} \\ D_{nm} \end{matrix} \right\} + O(f^3). \end{aligned} \quad (168)$$

Удобно выразить гравитационное поле через нормированные гармоники, потому что тогда коэффициенты

одного и того же порядка n можно непосредственно сравнивать друг с другом и, кроме того, при $n < 25$ и при $\bar{A}_{nm}$ и $\bar{B}_{nm}$, выраженных в миллигалах, они имеют порядок $O(1)$ [98]:

$$\left\{ \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \right\} = \frac{(n+m)!}{\sqrt{(n+m)!(2n+1) \kappa_m}} \left\{ \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \right\}, \quad (169)$$

где $\kappa_0 = 1, \kappa_m = 2$, при $m \neq 0$.

Уточнения определения терминов при сравнении космических и наземных измерений гравитационного поля были рассмотрены Куком [278].

§ 20. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

Сравнение гравитационных величин J_{nm} , K_{nm} , выведенных по данным о движениях спутников, с соответствующими величинами, полученными по данным наземных гравиметрических работ, усложнено различием методов решения статистической проблемы определения коэффициентов гармоник для всей Земли по наблюдениям, покрывающим лишь ее небольшую часть. Указанная проблема возникает потому, что вариации с большой длиной волны, выраженные гармониками низкого порядка, представляют весьма малую часть полной гравиметрической аномалии Δg , измеренной на земной поверхности: 39 членов порядков $n=2-5$ учитывают по произведенной оценке менее 8% полной аномальной дисперсии $\sigma^2 \{ \Delta g \}$ [98]. Далее на распределение наблюдений влияет топография, которая коррелирована (степень корреляции находится под вопросом) с гравиметрическими аномалиями. Таким образом, имеет место как высокий уровень шума, так и смещение, которое необходимо устранить. Все методы обработки совпадают в том, что для оценки средних аномалий на ограниченных участках производится исправление гравиметрических аномалий за корреляцию с топографией. Они совпадают также и в том, что обрабатываемой функцией является не g (измеренная величина), а Δg (уклонение измеренной величины от величины, соответствующей эллипсоидальной модели). Не говоря о выводе средних аномалий для ограниченных участков, обработку можно характеризовать следующими двумя противоположными методами.

1. По вычисленным аномалиям на тех участках, где они выведены, по принципу наименьших квадратов вычисляют гравитационные коэффициенты A_{nm} , B_{nm} . Участки, не обеспеченные измерениями, не принимают во внимание.

2. Вычисленные гравиметрические аномалии экстраполируют из участков, обеспеченных измерениями, на участки без измерений до точек, где они (аномалии) могут быть практически приняты равными нулю или считаться функцией топографии (применяя статистическую корреляцию либо предположив наличие изостатической компенсации, Бауссус [229] исследует сочетание этих возможностей). Коэффициенты A_{nm} , B_{nm} в этом случае оказываются просто результатом преобразования пространственного представления, получаемого численным интегрированием.

Из основных исследований можно заключить, что Джеффрис [97], Хейсканен и Утила [230] и Жонголович (для порядков 2 и 3) [231] склоняются к первому методу, тогда как Каула [98], Утила [232] и Жонголович (для порядков 4—8) [231] склоняются ко второму методу. Первый из этих методов приводит к бóльшим коэффициентам и обычно приводит к бóльшим амплитудам в районах с наименьшим числом измерений. Как указано в работе [98], при недостаточной информации вероятнейшие оценки небольших отклонений от модели, предусматривающей равновесие, должны иметь меньшую амплитуду, чем истинные отклонения. Однако результаты вычислений по второму методу либо с применением статистической корреляции, либо в предположении изостатической компенсации должны характеризоваться даже еще меньшей амплитудой, чем вероятнейшие результаты, так как процедура экстраполяции «шаг за шагом» молчаливо предполагает, что вероятностное соотношение гравиметрических аномалий на расстоянии s друг от друга может быть выражено в виде $\exp(-P_{ijs})$. Нет физических причин для того, чтобы корреляция гравиметрических аномалий выражалась в таком виде, и фактически величина гармоник низкого порядка, выведенная по орбитам спутников и по автоковариационному анализу, указывает, что подобное правило экстраполяции, если его параметры определять по данным на коротких расстояниях порядка 1° , должно привести к ощутимому преуменьшению для расстояний, превышающих 10° . При использовании одной

только топографии это преуменьшение оказывается даже еще большим.

Сравнение вычислений по космическим и наземным данным приведено в табл. 4 с добавлением порядка соответствующих величин, вычисленного на основе автоковариационного анализа наземных данных [98], и коэффициентов, основанных на предположении полной изостатической компенсации на глубине 30 км.

Для сравнения определений κM по космическим и наземным данным нужна наземная оценка масштаба. Здесь имеется меньше сомнений в отношении данных, поскольку одно из опубликованных определений основано на гораздо большем числе данных, чем другие, а именно определение Фишер [233], которая использовала астрономо-геодезические высоты, покрывающие 19% Земли (считая в единицах квадратов $10 \times 10^\circ$): $a_e = 6.378\,166$ м. Предполагая, что $\sigma\{a_e\} = \pm 21$ м и используя значение $g_e = (978,0307 \pm 0,000027)$ гал, получим $\kappa M = (3,986036 \pm 0,000027) \cdot 10^{14}$ м³/сек². Это не согласуется с данными по спутникам (см. § 6), полученными с использованием соотношения μ_M/μ_E по Рейбу, но согласуется с этими данными при соотношении Делано.

Всеобъемлющего определения геоида, основанного исключительно на наземных данных, путем сочетания астрономо-геодезических данных с гравиметрическими произведено не было; однако автор в работе [234] с целью определения параметров эллипсоида, сдвигов исходных дат, а также 76 возможных гравитационных коэффициентов вплоть до $nm = 88$, рассмотрел совместно все астрономо-геодезические данные из [233] с гравиметрическими данными [98] и [231], а также вековые и долгопериодические составляющие в движении спутников 1957 β [60] и 1958 β_2 [78]. При этом было использовано обобщение принципа наименьших квадратов, учитывающее корреляционные связи, причем дисперсии и ковариации гравиметрических и астрономо-геодезических измерений были взяты по автоковариационному анализу из [98], а дисперсии движений спутников — из [60] и [78]. Полученная сумма квадратов $y^T W^{-1} y$ оказалась на 44% большей, чем предвычисленная в предположении нормально распределенных ошибок, однако этот результат, учитывая приближенность определения W , нельзя считать чересчур обескураживающим.

Таблица 4

СРАВНЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ, ВЫЧИСЛЕННЫХ ПО КОСМИЧЕСКИМ И НАЗЕМНЫМ ДАННЫМ

Источник	g_e см/сек ²	$J_2 \times 10^6$	$J_3 \times 10^8$	$J_4 \times 10^6$	$J_5 \times 10^8$	$J_{22} \times 10^6$	$K_{31} \times 10^6$
Данные по спутникам (см. § 6)		$1082,3 \pm 0,2$	$-2,3 \pm 0,1$	$-1,8 \pm 0,2$	$-0,3 \pm 0,2$	-0,5	+2,0
Джеффрис [97]	978,038	$1093,2 \pm 5,0$				$-4,2 \pm 1,5$	
Хейсканен и Утила [230]	978,037	1090,6				-3,4	+0,7
Жонголович [231]	978,044	$1095,0 \pm 4,3$	-4,3	-3,0	-0,7	-5,7	+1,6
Каула [98]	978,031	1087,0	$-0,2 \pm 1,3$	$-3,0 \pm 0,9$	$+1,7 \pm 0,6$	$-0,5 \pm 0,7$	$+0,4 \pm 0,7$
Утила [232]			-0,7	-2,2	+0,7		
Величина, ожидаемая по автоковариационному анализу			± 3	± 2	± 1	± 1	± 1
Топография и полная изостазия			+0,20	-0,33	+0,69	+0,17	+0,02

Примечание. В g_e включена абсолютная поправка к Потсдамской системе, равная $-0,013$ см/сек².

Основные результаты после увеличения стандартных уклонений в соответствии с полученной $y^T W^{-1} y$ таковы: экваториальный радиус $6\,378\,163 \pm 21$ м; сжатие $1/298,24 \pm 0,01$; сила тяжести на экваторе $978\,030,7 \pm \pm 1,2$ *мгал* (включая поправку в Потсдамскую систему за абсолютное значение g , равную $-12,9$ *мгал*); сдвиги исходных данных (с трехмерными стандартными уклонениями) для системы американского континента (± 35 м), системы Европа—Африка—Сибирь—Индия (± 38 м) и системы Япония—Корея—Манчжурия (± 68 м); 76 коэффициентов в выражении поля силы тяжести через сферические гармоники вплоть до $nm=88$ со средним стандартным уклонением около $\pm 0,7$ *мгал* для 68 коэффициентов с $m \neq 0$; высоты геоида по всему миру со стандартными уклонениями от ± 10 до ± 22 м.

**ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ВЫВОДЫ
ИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ
СПУТНИКОВ**



Как можно увидеть из сравнения первой и последней строк табл. 4, гравитационные коэффициенты, выведенные по движениям спутников, существенно больше ожидаемых, в предположении преобладания изостатической компенсации для более крупных форм, что, таким образом, скорее подкрепляет выводы Джеффриса [97] по наземным данным, чем выводы Хейсканена и Венинг-Мейнеса [235]. Более точное значение J_2 , полученное по данным о движении спутников, позволяет включить в последнюю строку табл. 4 значение J_2 , потому что, как указали О'Киф [94, 236] и Хенриксен [227], теперь получено точное значение полярного момента инерции

$$\frac{J_2}{H} = \frac{(C - A)/Ma_e^2}{(C - A)/C} = \frac{C}{Ma_e^2}, \quad (170)$$

где C и A — моменты инерции относительно полярной и экваториальной осей.

Исходя из теории вращающейся жидкости ([97], стр. 151) имеем

$$\frac{C}{Ma_e^2} = \frac{2}{3} \left[1 - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5m}{2f} \left(1 - \frac{3}{2} m \right) - 1} \right] + \\ + O(f)^2. \quad (171)$$

Значение $H=1/305,3$ выводится по $\mu_M/\mu_E=1/81,375$ [90] и по скорости прецессии земной оси ([97], стр. 152); использование этого значения с $J_2=1,0823 \cdot 10^{-3}$ и $m=1/288,4$ приводит к $f=1/300,3$. Если включить члены второго порядка, то f становится равным $1/299,8$ [236], откуда по уравнению (167) получают «гидростатическое» J_2 , равное $1,0711 \cdot 10^{-3}$, и J_4 , равное $-2,95 \cdot 10^{-6}$, которое вычитают из вычисленного по наблюдениям значения J_4 , приведенного в табл. 4, до сравнения с изостатическим значением J_4 в последней строке этой же таблицы.

Разность ΔJ_2 между измеренным $J_2=1,0823 \cdot 10^{-3}$ и гидростатическим $J_2=1,0711 \cdot 10^{-3}$ эквивалентна запаздыванию в 10 миллионов лет в текущем изменении фигуры Земли в соответствии с замедляющимся вращением (при нынешнем замедлении в $5 \cdot 10^{-22} \text{ сек}^{-2}$, вычисленном Мунком и Мак-Доналдом [238]). Однако Бауссус [229] предполагает, что ΔJ_2 может быть объяснено учетом термического, равно как и механического равновесия жидкости при широтной вариации температуры.

Влияние вращения Земли на фигуру Земли может быть также выражено через числа Лява: k (отношение потенциала сдвига массы U_{2G} к потенциалу вращения U_{2R}) и h (отношение фактического подъема поверхности к подъему жидкости с нулевой плотностью, полученной в результате вращения U_{2R}) ([104], стр. 24—28), [239]

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{U_{2G}}{U_{2R}} = \frac{3J_2}{a_e^3 \dot{\theta}^2} \approx \frac{2f}{m} - 1; \\ h &= \frac{2a_e f P_2/3}{U_{2R}/g_0} \approx \frac{2g_e f}{a_e \dot{\theta}^2} = \frac{2f}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (172)$$

Отношение $k/h \approx 1 - m/2f = 0,48$, полученное из уравнения (172), имеет примерно то же значение, что и k/h , выведенное из различных теоретических моделей упругой Земли [239]; это согласие, видимо, не означает почти ничего, кроме как участия одних и тех же частей Земли в явлениях, вызванных обоими влияниями.

В большинстве исследований [236, 238, 240] относительно возможных источников больших ΔJ_2 и J_3 , определенных по движениям спутников, делается вывод о невозможности их объяснения вариациями, связанными с земной корой (тот же вывод применим и к J_{22} и K_{22} , полученным по движениям спутников). Необходимые анома-

лии плотности должны иметь место в мантии. Данные термической истории и гутенберговского слоя низких скоростей мощностью 100 км непосредственно под корой заставляют предполагать, что аномалии плотности присущи довольно большим глубинам в мантии. Высокая степень корреляции долгопериодических форм поля силы тяжести с геомагнитным полем и глубинами ядра, полученными по сейсмологическим данным, которая была отмечена Фогелем [241], предполагает даже, что источник аномалий расположен в ядре или близко к нему. Однако аномалии плотности, которые были бы необходимы в ядре для объяснения измеренного поля силы тяжести, на несколько порядков превышают аномалии, необходимые для конвекции, чтобы поддерживать геомагнитный источник энергии [242]. Более того, если аномалии плотности расположены глубоко, то в соответствующих аномалиях силы тяжести должно наблюдаться резкое падение амплитуды при возрастании n (эквивалентно убыванию длины волны). Например, если принять распределение аномалий плотности, характеризуемое величинами равного порядка $\sigma_n^2 \{ \Delta \rho \}$ на поверхности с глубиной 1000 км, то $\Sigma_n \sigma_n^2 \{ \Delta g \}$ для $n=3-6$ окажется примерно в шесть раз больше, чем для $n=9-12$. Для глубины 500 км отношение будет незначительно превышать 2,0. При вычислении этих сумм по автоковариациям силы тяжести [98] отношение оказывается равным около 1,7, причем отличие этого значения от значения для глубины 500 км вполне может быть объяснено вариациями в коре.

Аномалии плотности наиболее тесно связаны с реологическими свойствами, которые действуют в направлении уменьшения аномалий. Использование значения вязкости, равного 10^{22} пуаз, вычисленного по последнему поднятию в соответствии с теориями Вининг-Мейнеса [235] пластической переподгонки коры [236] и конвекционного потока в мантии [243], приводит к неоправданно большой скорости «податливости» Земли. Для реального существования измеренных ΔJ_2 , J_3 и т. д. вещество мантии должно обладать существенно большей жесткостью. Простейший вывод состоит в том, что аномалии плотности в их нынешнем виде существовали все время с тех пор, когда образовалась мантия. Однако этот вывод трудно примирить с лабораторными измерениями текучести горных пород [244] или с палеомагнитными и

палеоклиматическими свидетельствами блуждания полюсов ([104], стр. 250—285), [238]. Мунк и Мак-Доналд [238] предполагают, что свидетельством влияния движения полюсов на земную кору был бы тот факт, что коэффициенты гравиметрических аномалий A_{nm} , B_{nm} для нечетных m систематически меньше, чем для четных m . Это не подтверждается 72 (нормированными) коэффициентами порядка 3—8 в [234], для которых средняя квадратическая величина $\sigma \{ \overline{A_{nm}} \overline{B_{nm}} \}$ составляет $\pm 0,81$ *мгал* для четных m и $\pm 0,98$ *мгал* для нечетных m .

Вариации силы тяжести, выведенные по движениям спутников, являются существенными индикаторами некоторых нынешних и прошлых свойств внутренних частей Земли, особенно в том, что они приводят к необходимости определенных минимумов в напряжениях при сдвигах в мантии. Однако самое большее, к чему они приводят в настоящее время, состоит в подтверждении оценки Джеффриса, в соответствии с которой эти усилия равны, по меньшей мере, $1,5 \cdot 10^8$ *дин* ([97], стр. 210). Дальнейший вклад в понимание строения внутренних частей Земли и его эволюции зависит от решения того, что может быть сведено в две проблемы [245]: (1) проблемы реологических уравнений состояния, выражающих механические свойства горных пород в зависимости от температур, давлений и периодов времени, превышающих значения, достижимые в лаборатории; (2) проблемы математической теории непрерывного поля, достаточной для выражения соотношений, характеризующих энергетический баланс и поведение вещества в глубинах Земли в геологическом масштабе времени и различающей существенное от несущественного и вероятное от неправдоподобного.

ЛИТЕРАТУРА

1. Veis G. Geodetic uses of artificial satellites. *Smithsonian Inst. Astrophys. Obs. Contrib. to Astrophys.*, 1960, 3, 95—161. (Готовится русский перевод.)
2. Whitten C. A. and Drummond K. H. Contemporary Geodesy. Am., Geophys. Un. Geophys. Monograph., (eds.) 4, 1959, 95 pp.
3. Thomas P. D. Use of near-earth satellite orbits for geodetic information. *U.S. Coast and Geodetic Surv. Tech. Bull.* 1960, 11, 36 pp.
4. Woollard G. P. Geodesy. *Nat. Acad. Sci. Science in Space*, 1960, 3, 4—13.
5. Berroth A. and Hofmann W. Kosmische Geodäsie. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1960. (Есть русский перевод: Беррот А., Хофманн В. Космическая геодезия. М., Изд-во иностр. лит., 1963.)
6. Goldstein H. Classical Mechanics. Addison—Wesley, Reading, Massachusetts, 1950. (Есть русский перевод: Гольдстейн Г. Классическая механика. М., ГИТТЛ, 1957.)
7. Corben H. C. and Stehle, P. Classical Mechanics. Wiley, New York, 1950.
8. Synge J. L. Classical dynamics. In «Handbuch der Physik» (S. Flügge, ed.) Vol. 3, Part 1, pp. 1—225. Springer, Berlin, 1960. (Есть русский перевод: Синг Дж. Л. Классическая динамика. М. Физматгиз, 1963.)
9. Plummer H. C. An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy. 1918. Republished by Dover Publ., New York, 1960.
10. Smart W. M. Celestial Mechanics. Longmans, Green, London, 1953. (Есть русский перевод: Сمارт У. Небесная механика. М., «Мир», 1965.)
11. Moulton F. R. An Introduction to Celestial Mechanics. Macmillan, New York, 1914. (Есть русский перевод: Мултон Ф. Введение в небесную механику. М., «Мир», 1964.)
12. Herget P. The Computation of Orbits. Privately published; Cincinnati, Ohio, 1948.

13. Bowden G. E. and Ellis J., eds. *Notes of the Summer Inst. in Dyn. Ast.* Yale Univ. Yale Univ. Obs., New Haven, Connecticut, 1959.
14. Baker R. M. L., Jr. and Makemson M. W. *An Introduction to Astrodynamics*. Academic Press, New York, 1960.
15. Brouwer D. and Clemence G. M. *Methods of Celestial Mechanics*. Academic Press, New York, 1961. (Есть русский перевод: Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. М., «Мир», 1964.)
16. Krause H. G. L. Die säkularen und periodischen Störungen der Bahn eines künstlichen Satelliten. *Proc. 7th Int. Astronaut. Cong.*, Rome, 1956.
17. von Zeipel H. Recherches sur le mouvement des petites planètes. *Arkiv Mat., Astron., Fysik*, 1916, **11**, 1—158.
18. Garfinkel B. Variation of Elements. *Notes Summer Inst. Dyn. Ast.* Yale Univ. 1960, 263—291. Yale Univ. Obs., New Haven, Connecticut, 1961.
19. Brown E. W. *An Introductory Treatise on the Lunar Theory*, (1896). Republished by Dover Publ., New York, 1960.
20. Kovalevsky J. Influence des termes du second ordre sur la théorie du mouvement d'un satellite artificiel. *Proc. 1st Int. Space Sci. Symposium, Nice*, 1960, pp. 458—465. (North Holland Publ., Amsterdam). (ПЖАстр., 1962, 6A117.)
21. Veis G. and Moore C. H. Smithsonian Astrophys. Obs. Differential Orbit Improvement Program. *Jet Prop. Lab. Seminar Proc.: Tracking Programs and Orbit Determination*, 1960, 165—184.
22. Blackman R. B. and Tukey J. W. *The Measurement of Power Spectra*. Dover Publ., New York, 1959.
23. Kozai Y. The motion of a close earth satellite. *Ast. J.* 1959, **64** 367—377. (ПЖАстр., 1960, № 10, 9840.)
24. Scarborough J. B. *Numerical Mathematical Analysis*. Johns Hopkins, Baltimore, Maryland, 1955.
25. Willers F. A. *Practical Analysis, Graphical and Numerical Methods*. 1928. Republished by Dover Publ., New York, 1948.
26. Vienop E. and Brady J. L. The Themis Code: an astronomical numerical integration program for the IBM-704. *Univ. California Rad. Lab. Rep. 5242*, 1958.
27. Smith V. S., Bruijnes H. R. and Sherman N. W. The satellite code: a numerical satellite integration program for the IBM-704. *Univ. California Rad. Lab. Rep. 5462*, 1959.
28. Brouwer D. On the accumulation of errors in numerical integration. *Ast. J.*, 1937, **46**, 149—153.
29. Musen P. Special perturbations of the vectorial elements. *Ast. J.*, 1954, **59**, 262—267. (ПЖАстр., 1955, № 6, 2258.)
30. Thomas L. H. Numerical integration of ordinary differential equations at an interval which may be compared with some periods in the defining functions. *Ast. J.*, 1958, **63**, 459—460.
31. Eckert W. J. Improvement by numerical methods of Brown's expressions for the coordinates of the moon. *Ast. J.*, 1958, **63**, 415—418. (ПЖАстр., 1959, № 10, 7816.)
32. Porter J. G. A comparative study of perturbation methods. *Ast. J.*, 1958, **63**, 405—406. (ПЖАстр., 1959, № 10, 7798.)
33. Baker R. M. L., Jr., Westrom G. B., Hilton C. G., Geisten R. H., Arsenault J. L. and Browne E. J. Efficient

precision orbit computation techniques. *Am. Rocket. Soc. J.*, 1960, 30, 740—747. (ПЖАстр., 1961, 3A133.)

34. Pines S., Payne M. and Wolfe H. Comparison of special perturbations methods in celestial mechanics. *Aero. Res. Lab. Tech. Rep.*, 1960, 60—281, 48 pp. (См. также ПЖАстр., 1963, 4.51.137.)

35. Garfinkel B. The orbit of a satellite of an oblate planet. *Ast. J.*, 1959, 64, 353—367. (ПЖАстр., 1960, № 11, 11032.)

36. Krause H. G. L. Säkularstörungen einer Aussenstationsbahn. In «Probleme aus der Astronautischen Grundlagenforschung» (H. H. Kölle, ed.), pp. 162—173. Ges. für Weltraumforschung, Stuttgart, 1952.

37. Spitzer L. Perturbations of a satellite orbit. *J. Brit. Interplanetary Soc.*, 1950, 9, 131—137.

38. Vinti J. P. New method of solution for unretarded satellite orbits. *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 1959, B, 62, 105—116. (ПЖАстр., 1961, 2A131.)

39. Izsak I. G. A theory of satellite motion about an oblate planet. I. A second-order solution of Vinti's dynamical problem. *Smithsonian. Inst. Astr. Phys. Obs. Spec. Rep.*, 1960, 52, 54 pp. (ПЖАстр., 1962, 6A107.)

40. Brouwer D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. *Ast. J.*, 1959, 64, 378—397. (ПЖАстр., 1960, № 11, 11031.)

41. Kaula W. M. Analysis of gravitational and geometric aspects of geodetic utilization of satellites. *Geophys. J.*, 1961, 5, 104—133; *Nat. Aero. and Space Admin. Tech. Note D-572*, 39 pp. (ПЖГеод., 1962, 4Г168.)

42. Cook A. H. Report on the determination of the earth's gravitational potential from observations of artificial satellites. *Int. Assoc. Geod., XII Gen. Ass. IUGG, Helsinki*, 1960, 30 pp. (ПЖГеод., 1964, 9.52.72.)

43. Hergenhahn G. Die Bestimmung der Erdgestalt mit Hilfe künstlicher Satelliten. *Z. für Vermessungswesen*, 1960, 85, 342—350, 363—371. (ПЖГеод., 1961, 4Г207.)

44. Garfinkel B. On the motion of the satellite of an oblate planet. *Ast. J.*, 1958, 63, 88—96. (ПЖАстр., 1959, № 3, 1778.)

45. Sterne T. E. The gravitational orbit of a satellite of an oblate planet. *Ast. J.*, 1968, 63, 28—40. (ПЖАстр., 1959, № 2, 912.)

46. Vinti J. P. Theory of an accurate intermediary orbit for satellite astronomy. *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 1961, B 65, 169—202 (ПЖАстр., 1962, 5A89.)

47. Vinti J. P. Theory of the orbit of an artificial satellite with use of spheroidal coordinates. *Ast. J.*, 1960, 65, 353—354. (ПЖАстр., 1961, 7A72.)

48. Brouwer D. The motion of a particle with negligible mass under the gravitational attraction of a spheroid. *Ast. J.*, 1946, 51, 223—231.

49. Brouwer D. Outline of general theories of the Hill-Brown and Delaunay types for orbits of artificial satellites. *Ast. J.*, 1958, 63, 433—438. (ПЖАстр., 1959, № 10, 7822.)

50. Musen P. Application of Hansen's theory to the motion of an artificial satellite in the gravitational field of the earth. *J. Geophys. Res.*, 1959, 64, 2271—2279. (ПЖАстр., 1961, 2A132.)

51. Musen P. A modified Hansen's theory as applied to the motion of artificial satellites. *Nat. Aero. and Space Admin. Tech. Note*, 1960, D-492, 39 pp. (См. также РЖАстр., 1963, 9.51.103.)
52. Musen P. On the motion of satellite in an asymmetrical gravitational field. *J. Geophys. Res.*, 1960, **65**, 2703—2792. (РЖАстр., 1961, 4A177.)
53. Bryant R. W. Interim definitive orbits determined at the NASA computing center. *Jet. Prop. Lab. Seminar Proc.: Tracking Programs and Orbit Determination*, 1960, 108—113.
54. Bryant R. W. NASA computing center predictions. *Jet Prop. Lab. Seminar Proc.: Tracking Programs and Orbit Determination*, 1960, 114—118.
55. Siry J. W. The Vanguard orbit determination program. *Ann. Int. Geophys. Yr.*, 1960, **12**, 91—104.
56. Musen P. The theory of artificial satellites in terms of orbital true longitude. *J. Geophys. Res.*, 1961, **66**, 403—409. (РЖАстр., 1961, 10A82.)
57. King-Hele D. G. The effect of the earth's oblateness on the orbit of a near satellite. *Proc. Roy. Soc. (London)*, 1958 **A 247**. N 1248, 49—72. (РЖАстр., 1959, № 6, 4272.)
58. Brenner J. L. and Latta G. E. The theory of satellite orbits, based on a new coordinate system. *Proc. Roy. Soc. (London)*, 1960, A258, 470—485. (РЖАстр., 1961, 8A86.)
59. Merson R. H. The motion of a satellite in an axisymmetric gravitational field. *Geophys. J.*, 1961, **4**, 17—52.
60. King-Hele D. G. The earth's gravitational potential, deduced from the orbits of artificial satellites, *Geophys. J.*, 1961, **4**, 3—16. (См. также РЖГеод., 1963, 3.52.230.)
61. Жонголо в и ч И Д. Некоторые формулы, относящиеся к движению материальной точки в поле тяготения уровня эллипсоида вращения. Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1960, **7**, 521—536 (РЖАстр., 1960, № 9, 8678.)
62. Bailie A. and Bryant R. Osculating elements derived from the modified Hansen theory for the motion of an artificial satellite. *Ast. J.*, 1960, **65**, 451—453, 482. (РЖАстр., 1961, 4A176.)
63. Message P. J. On Mr. King-Hele's theory of the effect of earth's oblateness on the orbit of a close satellite. *Monthly No. Roy. Ast. Soc., Geophys. Suppl.*, 1960, **121**, 1—4. (РЖАстр., 1961, 8A87.)
64. Hori G. I. The motion of an artificial satellite in the vicinity of the critical inclination. *Ast. J.*, 1960, **65**, 291—300. (РЖАстр., 1961, 4A178.)
65. Garfinkel B. On the motion of a satellite in the vicinity of the critical inclination. *Ast. J.* 1960, **65**, 624—627. (РЖАстр., 1961, 6A80.)
66. Kozai Y. Effect of precession and nutation of the orbital elements of a close earth satellite. *Ast. J.*, 1960, **65**, 621—623. (РЖАстр., 1961, 6A82.)
67. Kozai Y. On the effects of the sun and the moon upon the motion of a close earth satellite. *Smithsonian Inst. Astrophys. Obs. Spec. Rep.*, 1959, **22**, 7—10. (РЖАстр., 1960, № 8, 7390.)
68. Musen P., Bailie A. and Upton, E. Development of the lunar and solar perturbations in the motion of an artificial satellite. *Nat. Aero. and Space. Admin. Tech. Note*, 1961, D-494, 44 pp.

69. Musen P. Contributions to the theory of satellite orbits. *Proc. 1st. Int. Space Sci. Symposium Nice*, 1960, pp. 434—447. (North Holland Publ., Amsterdam.) (ПЖАстр., 1962, 7A705.)

70. Hansen P. A. *Fundamenta Nova Investigationis Orbitae Verae Quam Luna Perlustrat*, Gotha, 1838.

71. Hansen P. A. Darlegung der Theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen, *Abh. der K. Sächs. Ges. Wiss.*, 1862, 6, 91—498; 7, 1—399.

72. Delaunay C. E. Théorie du mouvement de la Lune. *Mem. Paris Acad. Sci.* (1860—1867). 28, 1—883; 29, 1—931.

73. Hill G. W. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta Math.*, 1877, 8, 1—36; also see *Collected Math. Works*, 1905, 1, 243—270.

74. Hill G. W. Researches in the lunar theory. *Am. J. Math.*, 1877, 1, 5—26, 129—147, 245—260; also see *Collected Math. Works*, 1905, 1, 284—335.

75. Tisserand F. *Traité de mécanique céleste*. Vol. III: Exposé de l'ensemble des théories relatives au mouvement de la lune. Gauthier—Villars, Paris, 1894.

76. Brown E. W. Theory of the motion of the moon; containing a new calculation of the expression for the coordinates of the moon in terms of the time. *Mem. Roy. (1870—1908). Ast. Soc.* 53, 39—116, 163—202; 54, 1—64; 57, 51—145; 59, 1—104.

77. Eckert W. J., Jones R. and Clark H. K. Improved Lunar Ephemeris 1952—1959. U.S. Govt. Printing Office, Washington D. C., 1954.

78. O'Keefe J. A., Eckels A. and Squires, R. K. The gravitational field of the earth. *Ast. J.*, 1959, 64, 245—253. (ПЖАстр., 1960, № 8, 7405.)

79. Sundman K. F. The motions of the moon and the sun at the solar eclipse of 1945 July 9. *Baltische Geod. Kom. Tätigkeitber.* 1944—47, Helsinki, 1948, 63—94.

80. Hirvonen R. A. The motions of the moon and sun at the solar eclipse of 1947, May 20, *Veröff. Finn. Geod. Inst.*, 1951, 40, 1—33.

81. King-Hele D. G. and Merson R. H. New value for the earth's flattening derived from satellite orbits. *Nature*, 1959, 183, 881—882.

82. Groves G. V. Motion of a satellite in the earth's gravitational field. *Proc. Roy. Soc. (London)*, 1960, A 254, 48—65. (ПЖАстр., 1960, № 11, 11030.)

83. Kozai Y. The earth's gravitational potential derived from the motion of satellite 1958 beta two. *Smithsonian Inst. Astrophys. Obs. Spec. Rep.*, 1959, 22, 1—6. (ПЖАстр., 1960, № 8, 7406.)

84. Helmert F. R. *Die Mathematischen und Physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*. II. Die Physikalischen Theorie. Teubner, Leipzig, 1884. (Переведено там же в 1962 г.)

85. Kozai Y. The gravitational field of the earth derived from motions of three satellites. *Ast. J.*, 1961, 66, 8—10, (ПЖАстр., 1961, 8A100).

86. Michielsen H. F. The odd harmonics of the earth's gravitational field. *Advances in Astronautics* 1961, 8, in press. (См. также РЖГеоД., 1962, 4Г167).

87. Makemson M. W., Baker R. M. L., Jr. and Westrom G. B. Analysis and standardization of astrodynamical constants. *J. Astronaut. Sci.*, 1961, 8, 1—13. (РЖАстр., 1962, 1А683.)
88. Cohen C. J. and Anderle R. J. Verification of earth's «pear shape» gravitational harmonic, *Science*, 1960, 132, 807—808. (РЖГеодез., 1961, 7Г201.)
89. Brenner J. L., Fulton, R. and Sherman N. Symmetry of the earth's figure. *Am. Rocket Soc. J.*, 1960, 30, 278—279. (РЖГеодез., 1960, № 12, 12770.)
90. Rabe E. Derivation of fundamental astronomical constants from the observations of Fros during 1926—1945. *Ast. J.*, 1950, 55, 112—126.
91. Delano E. The lunar equation from observations of Eros, 1930—1931. *Ast. J.*, 1950, 55, 129—133.
92. O'Keefe J. A. and Anderson J. P. The earth's equatorial radius and the distance of the moon. *Ast. J.*, 1952, 57, 108—121; also see *Bull. Geod.*, 1958, 29, 219—248.
93. Yaplee B. S., Bruton R. H., Craig K. J. and Roman N. G. Radar echoes from the moon at a wavelength of ten centimeters. *Proc. Inst. Radio Eng.*, 1958, 46, 293—297. (РЖАстр., 1958, № 8, 5059.)
94. O'Keefe J., Roman N., Yaplee B. and Eckels, A. Ellipsoid parameters from satellite data, *Am. Geophys. Un. Monograph*, 4, 1959, 45—51.
95. Bruton R. H., Craig K. J. and Yaplee B. S. The radius of the earth and the parallax of the moon from radar range measurements on the moon. *Ast. J.*, 1959, 64, 325 (РЖГеодез., 1960, № 9, 9453).
96. O'Keefe J. A. and Batchlor C. D. Perturbations of a close satellite by the equatorial ellipticity of the earth, *Ast. J.*, 1957, 62, 183—185, (РЖАстр., 1958, № 4, 2301.)
97. Jeffreys H. The Earth. Cambridge Univ. Press, London and New York, 1959. (Есть русский перевод: Джеффрис Г. Земля, М., ИЛ, 1960.)
98. Kaula W. M. Statistical and harmonic analysis of gravity. *J. Geophys. Res.*, 1959, 64, 2401—2421. (РЖГеодез., 1960, № 12, 12800).
99. Izsak I. G. A determination of the ellipticity of the earth's equator from the motion of two satellites. *Smithsonian Inst. Astrophys. Obs. Spec. Rep.*, 1961, 56, also see *Astron. J.*, 1961, 66, 226—229. (РЖАстр., 1961, 12А144. См. также РЖГеодез., 1963, 11. 52, 210.)
100. Kaula W. M. Estimation of longitudinal variations in the earth's gravitational field from Minitrack observations. *J. Astronaut. Sci.*, 1961, 8, 83—88. (РЖАстр., 1962, 6А116.)
101. Bartlett M. S. An Introduction to Stochastic Processes. Cambridge Univ. Press, London and New York, 1956. (Есть русский перевод: Бартлетт М. С. Введение в теорию случайных процессов. М., Изд-во ин. лит., 1958).
102. Ramakrishnan A. Probability and stochastic processes. In «Handbuch der Physik» (S. Flügge, ed.), Vol. 3, Part 2, pp. 524—651. Springer, Berlin, 1959.
103. Cook A. H. Resonant orbits of artificial satellites and longitudinal terms in the earth's external gravitational potential. *Geophys. J.*, 1961, 4, 53—72. (См. также РЖАстр., 1962, 2А132.)

104. Munk W. H. and MacDonald G. J. F. The Rotation of the Earth: a Geophysical Discussion. Cambridge Univ. Press, London and New York, 1961.
105. Melchior P. J. Earth tides. *Advances in Geophys.* 4, 1958, 391—493.
106. Doodson A. T. Oceanic Tides. *Advances in Geophys.* 5, 1958, 118—153.
107. Bergmann P. G. Introduction to the Theory of Relativity. Prentice—Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1942.
108. Clemence G. M. Controlled experiments in celestial mechanics. *Ast. J.*, 1960, 65, 272—273. (ПЖАстр., 1961, 2A110.)
109. Dicke R. H. The nature of gravitation. *Nat. Acad. Sci. Science in Space*, 1960, 3, 1—21. (См. также ПЖАстр., 1962, 11A592.)
110. Ginsburg W. L. Experimentelle Prüfung der Allgemeinen Relativitätstheorie. *Fortschritte der Physik*, 1957, 5, 16—50.
111. Nariai H. and Ueno Y. On the tests of gravitational theories in terms of an artificial satellite. *Prog. in Theor. Phys.*, 1958, 20, 703—714. (ПЖАстр., 1960, № 2, 1552.)
112. Epstein P. S. On the resistance experienced by spheres in their motion through gases. *Phys. Rev.*, 1924, 23, 710—733.
113. Jastrow R. and Pearse C. A. Atmospheric drag on the satellite. *J. Geophys. Res.*, 1957, 62, 413—423. (ПЖАстр., 1959, № 11, 9293.)
114. Sterne T. E. An atmospheric model, and some remarks on the inference of density from the orbit of a close earth satellite. *Ast. J.*, 1958, 63, 81—87. (ПЖАстр., 1959, № 4, 2601.)
115. Cook G. E., King-Hele D. G. and Walker D. M. C. The contraction of satellite orbits under the influence of air drag. I. With spherically symmetrical atmosphere. *Proc. Roy. Soc. (London)*, 1960, A 257, 224—249. (ПЖАстр., 1961, 5A72.)
116. King-Hele D. G. Methods for determining the changes in satellite orbits due to air drag. *Proc. 1st Int. Space Sci. Symposium, Nice* pp. 8—23. (North Holland Publ., Amsterdam, 1960.) (ПЖАстр., 1962, 2A612.)
117. Sterne T. E. Effect of the rotation of a planetary atmosphere upon the orbit of a close satellite. 1959, 29, 777—782. (См. также ПЖАстр., 1960, № 7, 6000.)
118. Brouwer D. and Hori G. I. Theoretical evaluation of atmospheric drag effects in the motion of an artificial satellite. *Ast. J.*, 1961, 66, 193—225. (ПЖАстр., 1962, 2A133, 6A637.)
119. Izsak I. G. Periodic drag perturbations of artificial satellites. *Ast. J.*, 1960, 65, 355—357. (ПЖАстр., 1961, 4A180.)
120. Jacchia L. G. The effect of a variable scale height on determination of atmospheric density from satellite accelerations. *Smithsonian Inst. Astrophys. Obs. Spec. Rep.*, 1960, 46, 1—4 (ПЖАстр., 1961, 8A651).
121. Groves G. V. Determination of upper-atmosphere density and scale height from satellite observations. *Proc. Roy. Soc. (London)*, 1959, A 252, 16—34. (ПЖАстр., 1960, № 7, 6703.)
122. Cook G. E. and Plimmer R. N. A. The effect of atmospheric rotation on the orbital plane of a near-earth satellite. *Proc. Roy. Soc. (London)*, 1960, A 258, 516—528. (ПЖАстр., 1961, 5A73.)
123. Parkyn D. G. Satellite orbits in an oblate atmosphere. *J. Geophys. Res.*, 1960, 65, 9—18. (ПЖАстр., 1960, № 12, 12023.)

124. Beard D. B. and Johnson F. S. Charge and magnetic field interaction with satellites. *J. Geophys. Res.*, 1960, **65**, 1—8 (PЖАсrп., 1961, 1A532.)
125. Joos G. and Freeman I. M. Theoretical Physics. Blackie, London, 1958.
126. Parkinson R. W., Jones H. M. and Shapiro I. I. Effects of solar radiation pressure on satellite orbits. *Science*, 1960, **131**, 920—921. (PЖАсrп., 1961, 2A134.)
127. Musen P., Bryant A. and Bailie A. Perturbations in perigee height of Vanguard I. *Science*, 1960, **131**, 935—936, (PЖАсrп., 1960, № 12, 12026.)
128. Shapiro I. I. and Jones H. M. Perturbations of the orbit of the echo balloon. *Science*, 1960, **132**, 1484—1486. (PЖАсrп., 1962, 1A123.)
129. Muhleman D. O., Hudson R. H., Holdridge N. B., Carpenter R. L. and Oslund K. C. Observed solar pressure perturbations of Echo I. *Science*, 1960, **132**, 1487. (PЖАсrп., 1961, 11A661.)
130. Jastrow R. and Bryant R. Variations in the orbit of the Echo satellite. *J. Geophys. Res.*, 1960, **65**, 3512—3513. (PЖАсrп., 1961, 5A79.)
131. Musen P. The influence of the solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite. *J. Geophys. Res.*, 1960, **65**, 1391—1396. (PЖАсrп., 1960, № 12, 12025.)
132. Kozai Y. Effects of solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite. *Smithsonian Inst. Astrophys. Obs. Spec. Rep.*, 1961, **56**, 25—34. (PЖАсrп., 1961, 10A90.)
133. Byers H. R. The atmosphere up to 30 kilometers. In «The Earth as a Planet» (G. Kuiper, ed.) pp. 299—370. Univ. Chicago Press, Chicago, 1954.
134. Jacchia L. G. A variable atmospheric-density model from satellite accelerations. *J. Geophys. Res.*, 1960, **65**, 2775—2782; also see *Smithsonian Inst. Astrophys. Obs. Spec. Rep.* **39**, 1—15. (PЖАсrп., 1961, 10A586.)
135. Jastrow R. and Kyle H. L. The Earth Atmosphere. In «Handbook of Astronautical Engineering». (H. H. Koelle, ed.) McGraw—Hill, New York, 1961.
136. King-Hele D. G. and Walker D. M. C. Atmospheric Densities at Heights of 180—700 Km. *Ann. Geophys.*, 1961, **17**, 162—171. (PЖАсrп., 1962, 3A646.)
137. Priester W. and Martin H. A. Solare und tageszeitliche Effekte in der Hochatmosphäre und Beobachtungen an künstlichen Satelliten. *Mitt. Univ-Sternwarte Bonn*, 1960, **29**, 53 pp. (См. также PЖАсrп., 1961, 11A656.)
138. Paetzold H. K. and Zschörner H. The Structure of the upper atmosphere and its variations after satellite observations. *Proc. 2nd Intern. Space Sci. Symposium, Florence*, 1961, pp. 958—973. (North Holland Publ., Amsterdam.) (См. также PЖАсrп., 1962, 3A647.)
139. Moe O. K. A model for the errors in satellite orbital predictions caused by fluctuations in drag. *Space Tech. Lab. Tech. Rep.*, 1960, 60—0000—09145, 40 pp.
140. Nicolet M. Structure of the thermosphere. *Plan. and Space Sci.*, 1961, **5**, 1—32. (PЖАсrп., 1962, 6A596.)

141. Ratcliffe J. A. and Weekes K. The ionosphere. In «Physics of the Upper Atmosphere» (J. A. Ratcliffe, ed.), 378—470. Academic Press, New York, 1960.
142. Henriksen S. W. The use of artificial satellites in datum connection. Presented to I. A. G., XII gen. Assembly IUGG, Helsinki, 1960, 9 pp.
143. Eckert W. J. and Brouwer D. The use of rectangular coordinates in the differential correction of orbits. *Ast. J.*, 1937, **46**, 125.
144. Clemence G. M. Standards of time and frequency. *Science*, 1956, **123**, 567—573. (ПЖАстр., 1957, № 4, 2617.)
145. Clemence G. M. The practical use of ephemeris time. *Sky and Telescope*, 1960, **19**, 148—149. (ПЖАстр., 1961, 6A108.)
146. Danjon A. *Astronomie générale*. Sennac, Paris, 1959.
147. Rice D. A. Ephemeris time and universal time. *Surveying and Mapping*, 1959, **19**, 367—370. (ПЖАстр., 1960, № 9, 8715.)
148. Markowitz W. Latitude and longitude and the secular motion of the pole, In «Methods and Techniques in Geophysics» (S. K. Runcorn, ed.), pp. 325—361. Interscience, London, 1960. (ПЖАстр., 1962, 2A154.)
149. Markowitz W. Accurate timing of artificial satellite observations on a world-wide basis. *Proc. Sym. Geodesy in Space Age, Columbus, Ohio*, 1961, pp. 168—173. (ПЖАстр., 1964, 5.51.138, ПЖГеод., 5.52.67, ПЖ Космос, 1964, 5.62.56.)
150. Veis G. The orbits of satellites 1958 α , 1958 β_1 , 1958 β_2 , 1958 δ_2 , 1959 α_1 , 1959 α_2 . *Smithsonian Inst. Astrophys. Obs. Spec. Rep.*, 1959, **28**, 7.
151. Herrick S. Observation requirements for precision orbit determination. In «Aeronautics and Astronautics» (N. J. Hoff and W. G. Vincenti, eds.), pp. 417—434. Pergamon, New York, 1960. (ПЖАстр., 1962, 2A110.)
152. Smart W. M. Text—Book on Spherical Astronomy. Cambridge Univ. Press, London and New York, 1944.
153. Väisälä Y. As astronomical method of triangulation. *Sitzber. Finn. Akad. Wiss.*, 1946, pp. 99—107.
154. Väisälä Y. and Oterma L. Anwendung der astronomische Triangulations Methode. *Veröff. Finn. Geod. Inst.*, 1960, **53**, 18 pp. (См. также ПЖГеод., 1961, 7Г184.)
155. Kukkamäki T. J. Stellar triangulation. *Bull. Geod.*, 1959, **54**, 53—60. (ПЖГеод., 1960, № 7, 6940.)
156. Brown D. C. A solution of the general problem of multiple station analytical stereotriangulation. *RCA Data Reduc. Tech. Rep.*, 1958, **43**, 57 pp.
157. Brown D. C. Photogrammetric flare triangulation. *RCA Data Reduc. Tech. Rep.*, 1958, **46**, 41 pp.
158. Markowitz W. Geocentric coordinates from lunar and satellite observations. *Bull. Geod.*, 1959, № 49, 33—49. (ПЖГеод., 1960, № 1, 794.)
159. Markowitz W. Photographic determination of the moon's position, and applications to the measure of time, rotation of the earth, and geodesy. *Ast. J.*, 1954, **59**, 69—73. (ПЖАстр., 1957, № 6, 4543.)
160. Поттер Х. И. К вопросу об использовании наблюдений Луны в геодезических целях. *Астрон. ж.*, 1958, **35**, 618—622. (ПЖАстр., 1959, № 4, 2628.)

161. B o n s d o r f f I. Die astronomisch-geodätischen Arbeiten während der Sonnenfinsternis den 9 Juli 1945. *Baltische Geod. Kom. Tätigkeitber.* 1942—43, Helsinki, 1944, 5, 12—16.
162. L a m b e r t W. D. Geodetic applications of eclipses and occultations. *Bull. Geod.*, 1949, № 13, 272—282.
163. H e n r i k s e n S. W. Mathematical theory of occultation survey. *Pres. to IAG, XII Gen. Ass. IUGG*, 1960, 12 pp.
164. S c h m i d H. An analytical treatment of the problem of triangulation by stereophotogrammetry. *Photogrammetria*, 1957, 13, 67—77, 91—116. (РЖАстр., 1958, № 7, 4737.)
165. G u i e r W. H. and W e i f f e n b a c h G. C. Theoretical analysis of doppler radio signals from earth satellites. *Johns Hopkins Univ. Applied Physics Lab. Bumblebee Ser. Rep.*, 1958, 276, 57 pp. (См. также РЖАстр., 1959, № 7, 5635.)
166. G u i e r W. H. and W e i f f e n b a c h G. C. A satellite doppler navigation system. *Proc. Inst. Rad. Eng.*, 1960, 48, 507—516. (РЖГеод., 1961, 2Г81.)
167. G u i e r W. H. The tracking of satellites by doppler methods. *Proc. 1st Int. Space Sci. Symposium, Nice*, 1960, 481—491. (North Holland Publ., Amsterdam.) (РЖАстр., 1962, 5А573.)
168. I z s a k I. G. Orbit determination from simultaneous doppler-shift measurements. *Smithsonian Inst. Astrophys. Obs. Spec. Rep.*, 1960, 38, 1—12.
169. K o s k e l a P., N i c o l a L. and W a l t e r s L. G. The station keeping implications of an artificial satellite. *Aeroneutronic Publ.*, 1960, II—806, 24 pp.
170. K a h n W. D. Determination of corrections to Mark II Mini-track station coordinates from artificial satellite observations. *J. Geophys. Res.*, 1960, 65, 845—850. (РЖАстр., 1960, № 10, 10502.)
171. G r o v e s G. V. and D a v i e s M. J. Methods of analyzing observations on satellites. *Proc. 10th Int. Astronautical Congress*, 1960, pp. 933—946. Springer, Berlin. (РЖАстр., 1961, 5А537.)
172. B r o w n D. C. A matrix treatment of the general problem of least squares considering correlated observations. *Ballistic Res. Labs. Rep.*, 1955, 937, 28 pp.
173. K a u l a W. M. and F i s c h e r I. U. S. Army World Geodetic System 1959 (part 1: methods). *Army Map Service Tech. Rep.*, 1959, 27, 61 pp.
174. W h i t n e y C. A. and V e i s G. A flashing light for geodetic studies. *Smithsonian Inst. Ast. Obs. Spec. Rep.*, 1958, 19, 9—19. (РЖГеод., 1961, 1Г69; см. также РЖГеод., 1964, 9.52.218.)
175. M u r r a y B. C. The artificial earth satellite — a new geodetic tool. *Am. Rocket Soc. J.*, 1961, 31, 924—931. (РЖГеод., 1962, 3Г56.)
176. L e e s A. B. and others. The geodetic use of artificial satellites. *Systems Lab. Corp. AFCRC—TR—59—276*, 1959, 2 vols, 196 pp.
177. N e w t o n R. R. Geodetic measurements by analysis of the doppler frequency received from a satellite. *Proc. 1st Int. Space Sci. Symposium, Nice*, 1960, 532—539. (North Holland Publ., Amsterdam.) (РЖГеод., 1962, 6Г51.)
178. K e r s h n e r R. B. The Transit program. *Astronautics*, 1960, 5, № 6, 30—31; 104—105. (РЖАстр., 1961, 3А668.)
179. N e w e l l H. E., Jr., ed. *Sounding Rockets*. McGraw-Hill, New York, 1959.

180. Davis R. J. Timing satellite observations. *Smithsonian Inst. Astrophys. Obs. Spec. Rep.*, 1958, **14**, 26—31. (ПЖАстр., 1961, 2A189.)
181. Strand K. Aa. and Franz O. G., ed. The second astrometric conference. *Ast. J.*, 1960, **65**, 167—234.
182. Van de Hulst H. C. Scattering in atmospheres. In «The Atmospheres of the Earth and Planets» (G. P. Kuiper, ed.), pp. 49—111, Univ. Chicago Press, Chicago, Illinois, 1952.
183. Zirker J., Whipple F. and Davis R. Time available for the optical observation of an earth satellite. In «Scientific Uses of Earth Satellites» (J. A. Van Allen, ed.), pp. 23—28. Univ. Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, 1956.
184. Hoffman W. F., Krotkov R. and Dicke R. H. Precision optical tracking of artificial satellites. *IRE Trans. Milt. Electronics*, 1960, **MIL-4**, 27—38. (ПЖАстр., 1961, 7A502.)
185. Wilson R. H., Jr. Optical and electronic tracking, *Am. Geophys. Un. Monograph*, 1959, **4**, 67—78.
186. Brettler B. J. and others. Geodetic flashing light system study. Edgerton, Germeshausen and Grier, Inc. Rep. B. 1966, 1959.
187. Brown D. C. Results in geodetic photogrammetry II. *RCA Data Proc. Tech. Rep.*, 1960, **65**, 45 pp.
188. Henize K. G. The Baker—Nunn satellite tracking camera, *Sky and Telescope*, 1957, **16**, 116—118. (ПЖАстр., 1958, № 11, 7535.)
189. Henize K. G. Tracking artificial satellites and space vehicles. *Advances in Space Science*, 1960, **2**, 117—142.
190. Lassovszky K. The catalogue of precise satellite positions. *Smithsonian Inst. Astrophys. Obs. Spec. Rep.*, 1960, **41**, 1—10.
191. Hynek J. A. On the accuracy of satellite tracking. *Publ. Inst. Geod., Photogr., Cart., Ohio State Univ.*, 1957, **7**, 59—64.
192. Weston E. Preliminary time reduction for the determination of precise satellite positions. *Smithsonian Inst. Astrophys. Obs. Spec. Rep.*, 1960, **41**, 11—13. (ПЖАстр., 1962, 1A173.)
193. Markowitz W. The dual-rate satellite camera. *J. Geophys. Res.*, 1959, **64**, 1115. (См. также ПЖАстр., 1963, 6.51.184.)
194. Schmid H. Some problems connected with the execution of photogrammetric multi-station triangulations. *Proc. Sym. Geodesy in Space Age, Columbus, Ohio*, 1961. pp. 56—65. (ПЖГеод., 1963, 12.52.162.)
195. Williams O. W. The impact of rocket flash triangulation upon world geodesy. *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, 1961, **A 111**, N 61, 321—328. (ПЖГеод., 1962, 3Г163.)
196. Hewitt J. A camera for recording satellite positions with high accuracy. *Proc. 1st Int. Space Sci. Symposium*, Nice, 1960. pp. 425—433. (North Holland Publ., Amsterdam.) (ПЖАстр., 1962, 6A160.)
197. Brown D. C. Results in Geodetic Photogrammetry I, *RCA Data Reduc. Tech. Rep.*, 1959, **54**, 16 pp.
198. Berroth A. Die Bedeutung der geodätischen Astronomie für die Überbrückung der Ozeane. *Geofys. Pura e Appl.*, 1950, **18**.
199. Atkinson R. d'E. Surveying by astrometry of rocket flashes. *Ann. Inst. Geophys. Yr.*, 1960, **12**, 201—206.
200. Rosenberg P. Earth satellite photogrammetry. *Photogram. Eng.*, 1958, **24**, 353—360. (ПЖАстр., 1959, № 7, 5902.)

201. Katz A. H. Observation satellites: problems and prospects: Part IV. *Astronautics*, 1960, 5, № 8, 30—31, 59—64. (PЖАср., 1961, 12A749.)
202. Spitzer L., Jr. Space telescopes and components. *Ast. J.*, 1960, 65, 242—263. (PЖАср., 1961, 7A466.)
203. Carru H., Gendrin R. and Reyssat M. La réfraction ionosphérique pour des fréquences de 20, 40, 108 MHz et son application à l'effet doppler des satellites. *Proc. 1st Int. Space Sci. Symposium, Nice*, 1960, pp. 286—303. (North Holland Publ., Amsterdam.) (PЖАср., 1962, 7A704.)
204. Siry J. W. Study of the upper ionosphere by means of Minitrack and optical observations of satellites. *Ann. Int. Geophys. Yr.*, 1958, 6, 431—438.
205. Kelso J. M. Doppler shifts and Faraday rotation of radio signals in a time-varying, inhomogeneous ionosphere. Part I. Single signal case. *J. Geophys. Res.* 1960, 65, 3909—3914.
206. Davisson R. J. Precision of compensated tracking systems, *Hermes Electronics Rep.*, 1959, № M—810, AFCRC—TR—59—356.
207. Aslakson C. I. and Fickeissen O. O. The effect of meteorological conditions on the measurement of long distances by electronics. *Trans. Am. Geophys. Un.*, 1950, 31, 816—826.
208. Bean B. R. Atmospheric bending of radio waves. In «Electromagnetic Wave Propagation» (M. Desirant and J. L. Michiels, eds), pp. 163—181. Academic Press, New York, 1960.
209. McNish A. G. and others. Ionospheric radio propagation. *Nat. Bull. Stand. Circ.* 1948, 462, Washington, D.C. 209 pp.
210. Hines C. O., ed. Symposium on the exosphere and upper F. region. *J. Geophys. Res.*, 1960, 65, 2563—2636. (PЖАср., 1961, 9A742.)
211. Kallman-Bijl H. ed. *Space Research: Proc. 1st Int. Space Sci. Symposium, Nice*, 1960, 1195 pp. (North Holland Publ., Amsterdam.)
212. Mengel J. T. Tracking the earth satellite, and data transmission, by radio. *Proc. Inst. Rad. Eng.*, 1956, 44, 755—760. (PЖАср., 1958, № 1, 585.)
213. Easton R. L. The Mark II Minitrack system. *Ann. Int. Geophys. Yr.*, 1958, 6, 384—410. (См. также PЖАср., 1959, № 7, 5633.)
214. Kahn W. D. Calibration of Minitrack Mark II, *Ast. J.*, 1957, 62, 396—399. (PЖАср., 1959, № 2, 1297.)
215. Richter H. L. Jr. The microlock radio-tracking system. *Annals of the Int. Geophys. Yr.*, 1958, 6, 410—417. (См. также PЖАср., 1960, № 6, 5463.)
216. Weiffenbach G. C. Measurement of the doppler shift of radio transmissions from satellite. *Proc. Inst. Rad. Eng.*, 1960, 48, 750—754. (PЖАср., 1962, 3A640.)
217. Henriksen S. W. SECOR — An instrument for measuring very long distances. *J. Geophys. Res.*, 1960, 65, 2497.
218. Hayn F. Selenographische Koordinaten I—IV. *Abh. Math. Phys. Kl. Königl. Sächsischen Ges. Wiss.* (1902—1914). 27 (9); 29 (1); 30 (1); 33 (1).
219. Weimer T. Atlas des profiles lunaires. *Obs. de Paris*, 1952.

220. Watts C. B. and Adams A. N. Photographic and photo-electric technique for mapping the marginal zone of the moon. *Ast. J.*, 1950, **55**, 81—82.
221. Scott D. K. Measuring of the profile of the moon's visible limb. *Pub. Inst. Geod., Photogr., Cart., Ohio State U.*, 1957, **7**, 50—53.
222. Kukkamäki T. J. Results obtained by the Finnish solar eclipse expedition, 1947. *Trans. Am. Geophys. Un.*, 1954, **35**, 99—102. (РЖАстр., 1954, № 10, 5259.)
223. O'Keefe J. A. and Mears D. D. The 800-inch telescope. *J. Roy. Ast. Soc. Canada*, 1954, **58**, 3—15. (РЖАстр., 1955, № 3, 1168.)
224. Henriksen S. W., Genatt S. H., Marchant M. Q., Batchlor C. D. Surveying by occultations. *Trans. Am. Geophys. Un.*, 1957, **38**, 651—656; also see *Ast. J.*, 1958, **63**, 291—295. (РЖАстр., 1958, № 10, 6960.)
225. Lambert W. D. The gravity field of an ellipsoid of revolution as a level surface. *Ann. Acad. Sci. Fennicae A, III*, 1961, **57**, *Publ. Inst. Geod., Photogr., & Cart* **14**, 42 pp. (РЖГеод., 1962, 2Г135.)
226. Lambert W. D. Note on the paper of A. H. Cook. *Geophys. J.*, 1960, **3**, 360—366. (РЖГеод., 1962, 2Г145.)
227. Cook A. H. The external gravity field of a rotating spheroid to the order of e^3 . *Geophys. J.*, 1959, **2**, 199—214. (РЖГеод., 1960, № 7, 7085.)
228. Hirvonen R. A. New theory of gravimetric geodesy. *Publ. Isos. Inst. Int. Assoc. Geod.*, 1960, **32**, also see *Ann. Acad. Sci. Fennicae A III*, 1960, **56**, 50 pp. (См. также РЖГеод., 1961, 5Г201.)
229. Baussus H. G. A unified isostatic and statistical theory of gravity anomalies and its significance. *Pres. Int. Assoc. Geodesy XII Assy. IUGG*, Helsinki, 1960.
230. Heiskanen W. A. and Uotila U. A. Some recent studies on gravity formulas. In «Contributions to Geophysics in Honor of Beno Gutenberg» (H. Benioff, ed.), pp. 200—208. Pergamon, London, 1958, (РЖАстр., 1959, № 4, 3275.)
231. Жонголович И. Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним. *Тр. ин-та. теор. астрономии*, вып. 3, 1952.
232. Heiskanen W. A. The latest achievements of physical geodesy. *J. Geophys. Res.*, 1960, **65**, 2827—2836. (РЖГеод., 1962, 5Г188.)
233. Fischer I. The present extent of the astro-geodetic geoid and the geodetic world datum derived from it. *J. Geophys. Res.*, 1960, **65**, 2067—2076. (См. также РЖГеод., 1962, 7Г181.)
234. Kaula W. M. A geoid and world geodetic system based on a combination of gravimetric, astro-geodetic, and satellite data. *J. Geophys. Res.*, 1961, **66**, 1799—1812. (РЖГеод., 1962, 4Г178.)
235. Heiskanen W. A. and Vening-Meinesz F. A. The Earth and its Gravity Field. McGraw-Hill, New York, 1958.
236. O'Keefe J. A. Zonal harmonics of the earth's gravitational field and the basic hypothesis of geodesy, *J. Geophys. Res.*, 1959, **64**, 2389—2392. (РЖГеод., 1960, № 12, 12771.)
237. Henriksen S. W. The hydrostatic flattening of the earth. *Ann. Int. Geophys. Yr.*, 1960, **12**, 197—198.
238. Munk W. H. and MacDonald G. J. F. Continentality and the gravitational field of the earth, *J. Geophys. Res.*, 1960, **65**, 2169—2172. (РЖГеод., 1961, 2Г236.)

239. Slichter L. B. Earth tides. *McGraw-Hill Encyclopedia of Science and Technology*, 1960, 4, 346—351.

240. Arnold K. Die Präzessionsbewegung der Erde und die Bahn der künstlichen Erdsatelliten, die Abplattung der Erde und die Dichtverteilung im Erdinneren. *Gerl. Beitr. Geophys.*, 1960, 69, 191—199. (ПЖАстр., 1961, 8A99.)

241. Vogel A. Über Unregelmässigkeiten der äusseren Begrenzung des Erdkerns auf Grund von am Erdkern reflektierten Erdbebenwellen. *Gerl. Beitr. Geophys.*, 1960, 69, 159—174. (ПЖГеод., 1962, 4Г184.)

242. Elsasser W. M. Hydromagnetic dynamo theory. *Rev. Mod. Phys.*, 1956, 28, 135—163.

243. Licht A. L. Convection currents in the earth's mantle. *J. Geophys. Res.*, 1960, 65, 349—354.

244. Griggs D. T. and Handin J., ed. Rock Deformation. Geological Society of America, New York, 1960.

245. Kaula W. M. The interaction between geodesy and the space sciences. *Proc. Sym. Geodesy in Space Age, Columbus, Ohio*, 1961, pp. 168—173. (ПЖГеод., 1964, 5.52.207, ПЖ, 1964, 5.62.165.)

246. Barrar R. B. Some remarks on the motion of a satellite of an oblate planet. *Ast. J.*, 1961, 66, 11—14. (ПЖАстр., 1961, 8A89; 1962, 11A107.)

247. Struble R. A. The geometry of the orbits of artificial satellites. *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, 1961, 7, 87—104. (ПЖАстр., 1961, 9A102.)

248. Petty C. M. and Breakwell J. V. Satellite orbits about a planet with rotational symmetry. *J. Franklin Inst.*, 1960, 270, 259—282. (ПЖАстр., 1961, 5A78.)

249. Michielsen H. F. Orbital theory for artificial satellites. *Lockheed Aircraft Corp. Miss. and Sp. Veh. Rep.* 326080, Palo Alto, California, 1960.

250. Кислик М. Д. Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. В сб. «Искусств. спутники Земли». Вып. 4. М., АН СССР, 1960, 3—17. (ПЖАстр., 1961, 2A133.)

251. Fischer I. The parallax of the moon in terms of a world geodetic system. *Ast. J.*, 1962, 67, 373—378. (ПЖАстр., 1963, 8.51.147.)

252. Kochi K. C. and Staley R. M. Methods for analysis of satellite trajectories. *Aero. Res. Labs. Tech. Rep.*, 1960, 60—214, 330 pp.

253. Posner J. Considerations affecting satellite and space probe research with emphasis on the «Scout» as a launch vehicle. *Nat. Aero. and Sp. Admin. Tech. Rep.*, 1961, R—97, 146 pp.

254. Hagihara Y. Libration of an earth satellite with critical inclination. *Smithsonian Inst. Astrophys. Obs. Contrib. to Astrophys.*, 1961, 5, 39—52. (ПЖАстр., 1964, 5.51.117, ПЖ, 1964, 5.62.90.)

255. Izsak I. G. On satellite orbits with very small eccentricities. *Ast. J.*, 1961, 66, 129—131. (ПЖАстр., 1962, 1A119.)

256. Kozai Y. Note on the motion of a close earth satellite with a small eccentricity. *Ast. J.* 1961, 66, 132—133. (ПЖАстр., 1961, 10A87.)

257. Newton R. R. Variables that are determinate for any orbit. *Am. Rocket Soc. J.*, 1961, 31, 364—366.

258. Newton R. R. Potential geodetic applications of the Transit satellite. *Pres. Am. Geophys. Un. 42d Ann. Meeting, Washington, D. C.*, 1961.

259. Jeffreys H. On the lunar equation. *Monthly No. Royal Ast. Soc.*, 1942, 102, 194—204.

260. Kozai Y. Tesseral harmonics of the potential of the earth as derived from satellite motions. *Smithsonian Inst. Ast. Obs. Spec. Rep.*, 1961, 72, 1—20; *Astron. J.*, 1961, 66, 355—358. (РЖГеоД., 1962, 5Г185)

261. Kaula W. M. Analysis of satellite observations for longitudinal variations of the gravitational field. *Proc. 2nd Int. Space Sci. Symposium, Florence*, 1961, pp. 360—372 (North Holland Publ., Amsterdam.) (См. также РЖАстр., 1961, 11А89.)

262. Zadunaisky P. E., Shapiro I. I. and Jones H. M. Experimental and theoretical results on the orbit of Echo I. *Smithsonian Inst. Ast. Obs. Spec. Rep.* 1961, 61, 22 pp (РЖАстр., 1962, 6А111.)

263. Bryant R. W. A comparison of theory and observation of the Echo I satellite. *J. Geophys. Res.*, 1961, 66, 3066—3069.

264. Kallmann-Bijl H. K. Daytime and nighttime atmospheric properties derived from rockets and satellite observations. *J. Geophys. Res.*, 1961, 66, 787—796. (См. также РЖАстр., 1962 9А569.)

265. Martin H. A., Neveling W., Priester W. and Roemer M. Model of the upper atmosphere from 130 through 1600 km, derived from satellite orbits. *Proc. 2nd Int. Space Sci. Symposium, Florence*, 1961, pp. 902—917. (North Holland Publ., Amsterdam.)

266. Gabbard T. P. Ephemeris time. *J. Astronaut. Sci.*, 1960, 7, 58—63. (РЖАстр., 1961, 9А127.)

267. Brown D. C. A treatment of analytical photogrammetry with emphasis on ballistic camera applications. *RCA Data Reduc. Tech. Rep.*, 1957, 39, 147 pp.

268. Cohen C. J. and Kemper W. A. Errors of prediction of a satellite orbit due to noise in doppler observations. U. S. Nav. Weap. Lab. Rep., 1961, 1723, 38 pp.

269. Brown D. C. On optical refraction with emphasis on corrections for points outside the atmosphere. *Am. Rocket Soc. J.*, 1961, 31, 549—550. (РЖАстр., 1962, 2А164.)

270. Nettleblad F. Studies of astronomical scintillation. *Lund Obs. Publ.*, 1953, 2, 130. (РЖАстр., 1956, № 2, 996.)

271. Veis G. and Whipple F. L. Experience in precision optical tracking of satellites for geodesy. *Proc. 2nd Int. Space Sci. Symposium, Florence*, 1961, pp. 17—33. (North Holland Publ. Amsterdam.)

272. Bowen R. P. Development of a photoelectric satellite tracker. *Proc. 2nd Int. Space Sci. Symposium, Florence*, 1961, pp. 55—59. (North Holland Publ., Amsterdam.)

273. Komesaroff M. M. Ionospheric refraction in radio astronomy. *Australian J. Phys.*, 1960, 13, 153—167. (РЖАстр., 1961, 8А397.)

274. Intern. Assoc. Geodesy. Resolution 1, XII Gen. Ass IUGG, Helsinki; see *Bull. Geod.*, 1960, № 58, 413. (РЖГеоД., 1961, 9Г19.)

275. deBey L. G. Tracking in Space by DOPLOC. *IRE Trans. Milt. Electronics*, 1960, MIL—4, 332—335.

276. Mullen E. B. and Woods C. R. Precision radio tracking of space vehicles. *Proc. 2nd Int. Space Sci. Symposium, Florence*, 1961, pp. 189—205. (North Holland Publ., Amsterdam.) (См. также РЖАстр., 1962, 1А153.)

277. Cohen C. J. A mathematical model of the gravity field surrounding the earth. *US Navy Prov. Grd. Rep.*, 1957, 1514, 16 pp.
278. Cook A. H. The comparison of the Earth's gravitational potential derived from satellite observations with gravity observations on the surface. *Geophys. J.*, 1961, 5, 29—33. (РЖГеод., 1962, 2Г141.)
279. Chopra K. Interactions of rapidly moving bodies in terrestrial atmosphere. *Rev. Mod. Phys.*, 1961, 33, 153—189.
280. Berbert J. H. Effect of tracking accuracy requirements on design of Minitrack satellite tracking system. *IRE Trans. Instr.*, 1960, 1—9, 84—88. (РЖАстр., 1961, 10А574.)
281. Kozai Y. Motion of a particle with critical inclination in the gravitational field of a spheroid. *Smithsonian Inst. Astrophys. Contrib. to Astrophys.*, 1961, 5, 53—58. (РЖАстр., 1964, 4.51.85.)
282. Schroeder C. A., Habib E. J., and Silvester W. R. Project Vanguard Report, № 36, Minitrack Report № 8, time standard. *U. S. Naval Res. Lab. Rep.*, 1958, 5227, 44 pp.
283. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Физматгиз, 1963.
284. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., «Наука», 1964.
285. Дубошин Г. Н. Теория притяжения. М., Физматгиз, 1961.
286. Штерн Т. Введение в небесную механику. Пер. с нем. М., «Мир», 1964.
287. Veis G. (Ed.) The use of artificial satellites for Geodesy. *Proc. of the first internat symposium on the use of artificial satellites for Geodesy*. Washington. D.C. 1962. North Holland Publ. Co. Amsterdam, 1963. (Готовится русский перевод.)
288. Mueller I. I. Introduction to satellite Geodesy. Frederick Ungar Publ. Co. New York, 1964.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- А**номалия истинная 16, 29, 43, 51
 — промежуточной орбиты 63
 — средняя 17, 46, 51, 68, 74, 83, 100, 134
 — эксцентрическая 16, 29, 44, 46, 51

- В**ариации плотности атмосферы 79, 80, 83
 Вариаций спектр 82
 Вариационная кривая 54
 Влияние абберационное 112
 — гравитационное 16, 33, 56
 — негравитационное 71—78
 — релятивистское 70, 71
 — электромагнитное 75—77
 Возвратно-отражающие призмы 109
 Возмущающая функция 22, 24, 28, 29, 36—39, 44, 50, 51, 59, 61, 65, 67, 93
 Вращение атмосферы 72, 75
 Вращения матрица 86, 87
 — мгновенная частота 89
 — средняя частота 89
 Время атомное 71, 89
 — гравитационное 71
 — всемирное 89
 — эфемеридное 89—91
 Вспышки 103, 110—112, 115
Гармония зональная 59, 60, 63, 70

- секториальная 64—67
 — тессеральная 64—67
 Гравиметрический потенциал Земли 56

- Д**авление извлечения 77, 78
 — солнечной радиации 77
 Движение вековое перигея 70
 — среднее 17, 48, 63, 73
 — — лунное 52—55
 — — солнечное 52
 Движения количество 20
 — уравнение 16, 19, 29, 53
 Допплеровские измерения 97, 101, 117, 123

- З**адача близкого спутника 36—51

- Звездные каталоги 107

- И**нтеграл площадей 17

- К**амеры баллистические 114, 115
 — Бейкера—Нанна 61, 65, 109, 113—115
 — лунные Марковица 130
 Кинетическая энергия 20
 Кинотеодолиты 113
 Космическая геодезия 5, 13
 Коэффициент преломления ионосферы 120
 — тропосферы 119

- М**агнитные бури 122

Мерцания 112, 115
Метод Брауэра 36
— Ганзена 35
— Кауелла 34
— Мьюзена 36
— численного интегрирования 34—36, 112, 135
— эмпирических орбит 33
— Энке 35
Механическое торможение атмосферой 71
Модели атмосферы 81
Модель Чепмена 120, 121
Морские приливы 68, 69

Наклонность критическая 42, 46, 49
— оптимальная 101

Орбита кеплерова 15, 32, 35, 46
— опорная 66, 67, 83, 84
— промежуточная 23, 28, 54
— резонансная 67
— фактическая 23, 24
— экваториальная 70
— эмпирическая 32—34

Параметры движущегося спутника 16
— кеплерова эллипса 16
Приливы земной коры 68
Принцип Гамильтона 27
Проблема малых эксцентриситетов 50

Радиолокация Луны 131
Распределение наблюдений неоднородное 65, 66

Световой поток 131
Северный полюс мгновенный 91
— —средний 90, 91
Силовая функция 18, 37, 38
Система Делоне 21
— координат инерциальная 85, 86, 95, 107
— — инструментальная 85, 87
— — геодезическая 85, 86, 132
— — орбитальная 86
— —прямоугольная 132
— — сферическая 132

— — топоцентрическая местная 87
— — эллипсоидальная 132
— Минитрек 61, 123, 124, 126
— Мистрем 127
— Секор 125—127
— Транзит 124—126
Системы дальномерные 125—127
— доплеровские 124—125
— интерференционные 123, 124
Скорость света в вакууме 126
Спецификации ИСЗ 103—105

Теория Брауэра 39—41, 49, 52
— Бреннера и Латта 47
— Винти 42, 47
— Ганзена 52, 60
— Гарфинкеля 41, 49
— Делоне 52
— Жонголовича 47, 49
— Ижака 42, 43, 47
— Кинг-Хила 46, 49
— Козаи 43, 49, 50
— Мерсона 47
— Мьюзена 44—48, 50, 51, 59
— торможения каноническая 74
— Хилла 52, 54
— Хилла—Брауна 44, 52

Ускорение Луны вековое 67
Уравнение Гамильтона—Якоби 25, 42
— Кеплера 17, 29
— энергии 17
Уравнения возмущения 101

Фотоэлектрическое прослеживание 116

Центральная сила 18

Число Лява 68

Шаг интегрирования 35
Шум торможения 83

Экспоненциальная атмосфера 74

Электронная концентрация 120, 122, 126

Эталонная частота 124, 125

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Предисловие редактора перевода	5
Принятые обозначения	7
Введение	13
Г л а в а I. Исследование орбит	15
§ 1. Общие понятия	16
Динамические принципы	16
Характеристика методов решения	28
§ 2. Эмпирические орбиты	32
§ 3. Численное интегрирование	34
§ 4. Задача близкого спутника	36
Возмущающая функция	37
Динамические теории промежуточных орбит	39
Теории геометрических промежуточных орбит	44
Сравнение теорий	47
Специальные проблемы	49
§ 5. Теории движения Луны	52
§ 6. Влияние гравитационного поля Земли	56
Возмущающая функция и интегрирование	56
Вековые и долгопериодические члены	59
Суточные и короткопериодические члены	64
Приливные влияния	67
Релятивистские влияния	70
§ 7. Негравитационные влияния	71
Механическое торможение	71
Электромагнитные влияния	75
Давление излучения	77
Наблюдаемые вариации и теоретические модели атмосферы	78
Влияние атмосферы на точность определения орбит	82

Глава II. Геометрические соотношения и анализ погрешностей	85
§ 8. Системы координат	85
Основные определения и обозначения	85
Время и точное определение координат	89
§ 9. Уравнения погрешностей наблюдений	92
§ 10. Оценка конфигурации	98
Глава III. Ракеты и искусственные спутники и их наблюдение	102
§ 11. Общие сведения	102
Некоторые характеристики спутников и ракет	102
Регистрация времени	103
Ориентирование	106
§ 12. Техника оптических наблюдений	108
Освещенность и ее ослабление	108
Рефракция и абберация	111
Теодолиты	113
Фотографические камеры	113
Спутниковая фотограмметрия	116
§ 13. Радиотехника	117
Влияние среды на распространение радиосигналов	118
Интерференционные системы	123
Допплеровские системы	124
Дальномерные системы	125
Глава IV. Техника наблюдений Луны	128
§ 14. Топографический эффект лунной поверхности	128
§ 15. Методы использования солнечных затмений	129
§ 16. Методы использования покрытия звезд	129
§ 17. Лунные фотографические камеры	130
§ 18. Радиолокационные методы	131
Глава V. Совместное использование данных космической и наземной геодезии	132
§ 19. Системы координат и единицы измерения	132
§ 20. Сравнение результатов наблюдений	134
Глава VI. Геофизические выводы из результатов наблюдений спутников	139
Литература	143
Предметный указатель	159

В. М. Каула

КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ



Ведущий редактор **В. И. Бражников**

Технический редактор **В. В. Быкова**

Корректоры **Т. Ю. Шульц,**

Г. В. Чирикова

Подписано к набору 10/IX 1965 г.

Подписано к печати 15/II 1966 г.

Формат 84×108¹/₃₂ Бум. № 1. Печ. л. 5,13

Усл. л. 8,62.

Уч.-изд. л. 8,2.

Тираж 2400 экз.

Зак. № 945/2153-15.

Цена 78 коп.

Индекс 2—4—1

Издательство «Недра».

Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19.

Московская типография № 6

Главполиграфпрома

Комитета по печати при Совете Министров

СССР

Москва, Ж-88, 1-й Южно-портовый пр., 17.

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НЕДРА“

ГОТОВИТ К ВЫПУСКУ в 1966 г.

НОВЫЕ КНИГИ ПО ГЕОДЕЗИИ

БОЧАРОВ М. К. Основы теории проектирования систем картографических знаков. 8 л. Ц. 85 коп.

ВЕГА Г. Таблицы семизначных логарифмов. Изд. 2. 60 л. Ц. 3 р. 20 к.

ВЕЙС Д. Геодезическое использование искусственных спутников. Перевод с английского. 10 л. Ц. 90 коп.

ГАЙДАЕВ П. А., ФОМИН М. П. и др. Уравнивание заполняющей триангуляции приближениями. 5 л. Ц. 35 коп.

ГАРАЕВСКАЯ Л. С. Редактирование мелкомасштабных карт и атласов. Изд. 2, переработ. и доп. 14 л. Ц. 90 коп.

Единые нормы выработки [времени] на геодезические и топографические работы. Ч. 1. Полевые работы. 15 л. Ц. 1 р. 35 к.

Единые нормы выработки [времени] на геодезические и топографические работы. Ч. 2. Камеральные работы. 16 л. Ц. 1 руб.

Инструкция по нивелированию I, II, III и IV классов. Изд. 5. 10 л. Ц. 70 коп.

Инструкция по составлению отчетов по астрономическим, геодезическим и топографическим работам. ГУГК. 8 л. Ц. 50 коп.

Исследования по геодезической гравиметрии и теории фигуры Земли. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 171, 7 л. Ц. 69 коп.

Исследования по аэрофотографии. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 177. 13 л. Ц. 1 р. 11 к.

Каталог 1957 ярких звезд со склонениями от -10 до $+90^\circ$. Центральный научно-исследовательский институт геодезии, аэросъемки и картографии (ЦНИИГАиК). Труды, вып. 179. 70 л. Ц. 5 р. 10 к.

КЕМНИЦ Ю. В. Теория ошибок измерений. Изд. 2. 10 л. Ц. 90 коп.

КОСЬКОВ Б. И. Справочное руководство по съемке городов. 15 л. Ц. 95 коп.

ЛИВАНОВ М. М. Инженерно-геодезическая съемка и составление исполнительных планов промышленных предприятий. Изд. 2. 12 л. Ц. 80 коп.

МАЗМИШВИЛИ А. И. Способ наименьших квадратов. 25 л. Ц. 1 р. 95 к.

Наставление по предварительному вычислению государственных геодезических сетей. ГУГК. 29 л. Ц. 1 р. 70 к.

С подробными аннотациями на указанную литературу Вы можете ознакомиться в тематическом плане издательства «Недра» на 1966 г., который имеется во всех книжных магазинах, распространяющих научно-техническую литературу.

Заказ на эти книги можно оформить в местных книжных магазинах. При поступлении в продажу интересующей Вас литературы Вы будете извещены.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НЕДРА»