



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УНИТАРНОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ  
НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ  
ВСЕРОССИЙСКИЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ  
ЭЛЕКТРОМЕХАНИКИ С ЗАВОДОМ им. А.Г. Иосифьяна  
(ФГУП «НПП ВНИИЭМ»)

**В.Н. Васильев**

# **СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ**

**МОСКВА  
2009**

**Васильев В.Н.**

Системы ориентации космических аппаратов / В.Н. Васильев. – М.: ФГУП «НПП ВНИИЭМ», 2009. – 310 с.  
ISBN 978-5-903194-06-3

Книга посвящена служебным системам, которые управляют движением космических аппаратов вокруг центра масс. Знакомство с системами ориентации начинается с изучения принципа действия датчиков, приборов и устройств, свойств космического аппарата как объекта управления.

Отдельные главы посвящены реактивным, маховичным и гиросиловым системам ориентации. Вводится понятие избыточных маховичных систем. На базе гиросиловых развивается теория нового класса гиросиловых систем, которые в отличие от классических гиросtabilизаторов изменяют кинетический момент в широком диапазоне. Представлены математические модели гиросилового и двигателя-маховика. Предложены обобщённые динамические характеристики гиросиловых и избыточных маховичных систем. Разработаны оптимальные алгоритмы управления исполнительными органами.

Обсуждаются способы разгрузки электромеханических систем ориентации от накопленного кинетического момента при помощи реактивных двигателей, электромагнитов и гравитационных моментов. Содержатся краткие сведения об устройстве, принципе действия и алгоритмах управления систем ориентации солнечных батарей. Даются представления о движении центра масс космического аппарата, типах и элементах орбит.

Книга рассчитана на студентов, обучающихся по специальности «Управление и информатика в технических системах», специалистов по системам ориентации и специалистов смежных областей, желающих познакомиться с системами ориентации космических аппаратов.

УДК 629.7

ISBN 978-5-903194-06-3

© В.Н. Васильев, 2009

© ФГУП «НПП ВНИИЭМ», 2009

## Оглавление

Предисловие.....	5
Введение.....	6
<b>ГЛАВА 1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМ</b>	
<b>ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ.....</b>	<b>9</b>
1.1. Космические аппараты и задачи управления их движением.....	10
1.2. Классификация систем ориентации.....	13
1.3. Состав активной системы ориентации. Режимы ориентации.....	15
1.4. Датчики угла ориентации.....	17
1.5. Датчики вертикали Земли.....	19
1.6. Датчики Солнца.....	31
1.7. Звездные датчики.....	34
1.8. Гироскопические датчики угловой скорости.....	36
1.9. Исполнительные органы систем ориентации.....	44
1.10. Реактивные двигатели.....	46
1.11. Электродвигатели-маховики.....	51
1.12. Силовые гироскопы.....	58
<b>ГЛАВА 2. ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА</b>	
<b>ВОКРУГ ЦЕНТРА МАСС.....</b>	<b>61</b>
2.1. Моменты инерции.....	62
2.2. Определение положения космического аппарата, кинематические уравнения.....	68
2.2.1. Матрица поворота и углы ориентации.....	68
2.2.2. Кинематические уравнения.....	71
2.3. Динамические величины космического аппарата как твердого тела.....	74
2.3.1. Угловая скорость, угловое ускорение, момент силы.....	74
2.3.2. Кинетический момент и кинетическая энергия.....	76
2.4. Динамические уравнения.....	79
2.5. Уравнения движения космического аппарата вокруг центра масс.....	82
2.6. Линеаризованные уравнения движения и передаточные функции космического аппарата.....	84
2.7. Движение вокруг центра масс космического аппарата, содержащего подвижные массы.....	88
2.7.1. Уравнения движения.....	88
2.7.2. Гири стат.....	89
2.7.3. Внутренние возмущающие моменты.....	91
2.8. Внешние возмущающие моменты.....	92
2.8.1. Гравитационные моменты.....	92
2.8.2. Аэродинамические моменты.....	99
2.8.3. Моменты сил светового давления и магнитные моменты.....	102
2.8.4. Анализ возмущающих моментов.....	107
<b>ГЛАВА 3. РЕАКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ</b>	
<b>КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ.....</b>	<b>109</b>
3.1. Назначение и состав системы.....	110
3.2. Динамика релейной системы в режиме стабилизации.....	114
3.3. Двусторонние одноимпульсные колебания.....	120
3.4. Односторонние колебания.....	123
3.5. Программные повороты.....	126
<b>ГЛАВА 4. МАХОВИЧНЫЕ СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ</b>	
<b>КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ.....</b>	<b>131</b>
4.1. Назначение и состав системы.....	132
4.2. Устройство и принцип действия двигателя-маховика.....	140
4.3. Математическая модель двигателя-маховика.....	143
4.4. Релейные маховичные системы ориентации.....	145
4.5. Линейные маховичные системы ориентации.....	149
4.5.1. Динамика линейной системы в режиме стабилизации.....	150
4.5.2. Исследование влияния параметров двигателя-маховика на динамику системы.....	156
4.5.3. Линейные маховичные системы с тахометрической обратной связью.....	158
4.6. Алгоритмы управления избыточными системами электродвигателей-маховиков.....	161

4.6.1. Общий подход к задаче управления избыточными системами электродвигателей-маховиков .....	161
4.6.2. Управление минимально избыточной системой электродвигателей-маховиков.....	164
4.7. Программные повороты .....	170
4.8. Выбор основных динамических характеристик двигателя-маховика .....	174
4.8.1. Расчет кинетического и управляющего моментов двигателя-маховика в режиме программных поворотов .....	174
4.8.2. Расчет управляющего момента двигателя-маховика в режиме стабилизации .....	176
4.8.3. Расчет кинетического момента двигателя-маховика при стабилизации космического аппарата в орбитальной системе координат.....	177
<b>ГЛАВА 5. ГИРОСИЛОВЫЕ СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ.....</b>	<b>183</b>
5.1. Назначение и состав системы .....	184
5.2. Устройство и принцип действия гиродина .....	189
5.3. Свойство усиления момента .....	192
5.4. Математическая модель гиродина .....	194
5.4.1. Расчетная динамическая схема .....	194
5.4.2. Динамика угловых колебаний ротора .....	196
5.4.3. Динамика гиродина с электромагнитными подшипниками. ....	200
5.4.4. Динамика привода прецессии .....	203
5.5. Динамика гиросиловой системы в режиме стабилизации.....	205
5.5.1. Уравнения динамики, структурные схемы .....	205
5.5.2. Исследование влияния характеристик гиродина на динамику стабилизации космического аппарата.....	209
5.6. Обобщенные динамические характеристики гиросиловых систем ориентации.....	211
5.6.1. Область изменения вектора кинетического момента.....	212
5.6.2. Область изменения вектора управляющего момента .....	214
5.6.3. Моментные характеристики .....	216
5.7. Алгоритмы управления гиродинами .....	217
5.7.1. Общий подход к задаче управления гиродинами .....	217
5.7.2. Управление типовыми группами.....	219
5.7.3. Настройка гиросиловой системы.....	226
5.7.4. Оптимизация настройки гиросиловой системы.....	235
5.8. Программные повороты .....	243
5.9. Выбор основных динамических характеристик гиродина.....	246
<b>ГЛАВА 6. РАЗГРУЗКА ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОРИЕНТАЦИИ ОТ НАКОПЛЕННОГО КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА .....</b>	<b>251</b>
6.1. Реактивные системы разгрузки.....	252
6.2. Магнитные системы разгрузки.....	256
6.2.1. Назначение и состав системы .....	256
6.2.2. Математическая модель магнитного поля Земли .....	258
6.2.3. Управление магнитными системами .....	260
6.2.4. Системы разгрузки с двумя и тремя электромагнитами.....	263
6.3. Гравитационная разгрузка.....	266
<b>ГЛАВА 7. СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ СОЛНЕЧНЫХ БАТАРЕЙ .....</b>	<b>269</b>
7.1. Назначение и состав системы.....	270
7.2. Движение Солнца и солнечных батарей.....	271
7.3. Схемы установки солнечных батарей на космических аппаратах.....	273
7.4. Компенсация возмущающих моментов.....	276
7.5. Алгоритмы управления .....	277
7.6. Привод солнечных батарей .....	282
<b>ГЛАВА 8. ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА .....</b>	<b>287</b>
8.1. Уравнения движения центра масс космического аппарата .....	288
8.2. Небесная сфера, экваториальная система координат и элементы орбиты .....	293
8.3. Управление движением центра масс космического аппарата .....	297
<b>Заключение .....</b>	<b>299</b>
<b>Предметный алфавитный указатель.....</b>	<b>300</b>
<b>Литература.....</b>	<b>304</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В России накоплен бесценный опыт создания космических аппаратов и их систем. Передача этого опыта молодым – одна из важнейших задач, которая успешно решается в ФГУП «НПП ВНИИЭМ».

Молодым специалистам создаются благоприятные условия для работы, обучения и повышения уровня знаний. Действуют научные школы, проводятся ежегодные конкурсы на лучшую работу с выплатой поощрительных денежных премий. Всегда открыты двери аспирантуры. Издается журнал «Вопросы электромеханики», выпускаются книги, справочники. Ученый Совет принимает к защите кандидатские и докторские диссертации. Базовая кафедра МИРЭА готовит инженеров для нашего предприятия.

Представляемая книга доцента, кандидата технических наук Владимира Николаевича Васильева «Системы ориентации космических аппаратов» обобщает 40-летний опыт работы автора в этом направлении в ФГУП «НПП ВНИИЭМ» и 25-летний опыт преподавательской деятельности на базовой кафедре «Информационно-управляющие космические комплексы». На страницах книги читатель встретится с описанием уникальных электромеханических устройств, таких как кольцевой и шаровой двигатели-маховики, силовой гироскоп-гиродин с электромагнитными подшипниками ротора, двигатели-маховики постоянного тока с постоянными магнитами, солнечный координатор, инфракрасные вертикали Земли и приводы солнечных батарей.

В отдельных главах подробно изучаются свойства космического аппарата как объекта управления, особенности реактивных и маховичных систем ориентации, систем разгрузки электромеханических систем ориентации от накопленного кинетического момента. Значительная часть книги посвящена оригинальным исследованиям автора по динамике гиросиловых систем ориентации.

Книга рассчитана на студентов, обучающихся по специальности «Управление и информатика в технических системах», аспирантов, специалистов по системам ориентации и специалистов смежных областей, желающих познакомиться с системами ориентации космических аппаратов.

*Генеральный директор-генеральный конструктор  
д-р техн. наук. Л.А. Макриденко*

## ВВЕДЕНИЕ

Система ориентации представляет собой сложную автоматическую систему, в которой объектом управления является космический аппарат. Известны реактивные, маховичные и гиросиловые системы ориентации. Своё название они получили от исполнительных органов, создающих управляющие моменты: реактивных двигателей, электродвигателей-маховиков и силовых гироскопов. Ограниченность запасов реактивного топлива и мощности бортовых источников питания предъявляет высокие требования к экономичности системы ориентации. Разрабатываемая система должна оптимизироваться не только по общепринятым показателям качества для систем управления, таким как точность ориентации, время переходных процессов, полоса пропускания, надёжность, но также по расходам реактивного топлива и электроэнергии бортовых источников питания. Выбор того или иного типа системы ориентации в значительной степени определяется её показателями экономичности и надёжности. Высокая надёжность достигается применением элементной базы, пригодной для работы в космосе, резервированием и другими специальными мерами.

О системах ориентации и их разработчиках можно прочитать на страницах многих книг, посвящённых истории отечественной и мировой космической техники [2, 54, 86, 106, 107].

Электромеханическими системами ориентации оснащаются космические аппараты «Метеор», «Ресурс», «Электро», орбитальные станции «Салют» и «Алмаз». В течение 15-ти лет принимала космонавтов орбитальная станция «Мир» [102].

Знакомство с системами ориентации начинается с изучения устройства и принципа действия отдельных приборов. К ним относятся датчики угла и угловой скорости, играющие роль чувствительных элементов, и исполнительные органы, реализующие реактивный принцип управления: реактивные двигатели, электродвигатели-маховики и силовые гироскопы. Изучение элементного состава в главе 1 служит базой для создания математических моделей отдельных устройств и последующего моделирования динамики стабилизации и программных поворотов замкнутых систем ориентации.

В главе 2 исследуются свойства космического аппарата как объекта управления. Во многих случаях космический аппарат может рассматриваться как абсолютно твёрдое тело. Принятие этой гипотезы открывает возможность использования уравнений Эйлера для твёрдого тела с неподвижной точкой для описания движения космического аппарата вокруг центра масс. Динамические уравнения Эйлера дополнены уравнениями движения вокруг центра масс космического аппарата, содержащего подвижные массы в виде управляющих электродвигателей-маховиков и силовых гироскопов.

Глава 3 посвящена реактивным системам ориентации. По принципу действия они являются релейными. Для исследования таких систем используется метод фазовой плоскости. Оцениваются расходы топлива, необходимые для поддержания ориентации космического аппарата и программных поворотов.

В главе 4 рассматриваются релейные и линейные маховичные системы. В отличие от реактивных систем они используют для работы не реактивное топливо, а электроэнергию, запасы которой на борту восполняются при помощи солнечных батарей. Маховичные системы широко применяются на метеорологических спутниках Земли и космических аппаратах для исследования природных ресурсов. Вводится понятие избыточных маховичных систем.

В главе 5 излагается теория гиросиловых систем ориентации. Разработка в ФГУП «НПП ВНИИЭМ» гиродина с электромагнитным подвесом ротора открыла широкие перспективы для использования электромеханических систем ориентации на крупных космических аппаратах [28, 102, 108]. Применение гиродинов стимулировало развитие теории нового класса гиросиловых систем, которые в отличие от классических гиросtabilизаторов [55, 80] изменяют кинетический момент в широком диапазоне. Разработана математическая модель гиродина. Оценивается влияние параметров гиродина на динамику стабилизации орбитальной станции. Предложены обобщённые динамические характеристики гиросиловых систем и оптимальные алгоритмы управления гиродинами.

В главе 6 обсуждаются способы разгрузки электромеханических систем ориентации от накопленного кинетического момента. Необходимость систем разгрузки связана с действием на космический аппарат внешних возмущающих моментов. Паря в действие внешних возмущений, электромеханические системы постепенно насыщаются по кинетическому моменту и теряют свои управляющие свойства. Известны реактивные и магнитные системы разгрузки. Их исполнительными органами являются реактивные двигатели и электрические катушки. Роль момента разгрузки может быть возложена и на гравитационный момент, регулируемый за счет изменения ориентации космического аппарата.

Глава 7 содержит краткие сведения об устройстве, принципе действия и алгоритмах управления систем ориентации солнечных батарей. Исследуется динамика управляемого движения сложной механической системы «корпус космического аппарата + солнечные батареи».

Глава 8 даёт представление о движении центра масс космического аппарата, типах и элементах орбит.

Книга написана на основе лекций, которые читал автор на базовой кафедре 533 «Информационно-управляющие космические комплексы» при ФГУП «НПП ВНИИЭМ» по курсам «Управление ориентацией космических аппаратов» и «Локальные системы управления». Изложение теоретического материала сопровождается примерами, что способствует лучшему усвоению материала. Помимо источников, приведенных в списке литературы, в учебном пособии использовались материалы эскизных проектов и другой технической документации базового предприятия.

По курсу «Управление ориентацией космических аппаратов» студенты выполняли курсовые и дипломные проекты, участвовали в научно-исследовательской работе, опубликовали свои статьи в Трудах НПП ВНИИЭМ.

Автор признателен Аркадию Давыдовичу Беленькому за постоянное обсуждение технических проблем. Плодотворное сотрудничество и многолетнее общение с ним способствовали совершенствованию учебного процесса и подготовке учебных пособий. На протяжении многих лет А.Д. Беленький руководил курсовым проектированием, консультировал студентов-дипломников, рецензировал дипломные проекты.

Лабораторные работы студентов по курсу «Управление ориентацией космических аппаратов» проводили ведущие сотрудники базового предприятия: Альперович В.Я., Бадардинов Н.А., Беляк В.А., Бобров Е.М., Гандлевский Ю.М., Емельянов А.З., Мажорин О.М., Мамичев Ю.В., Мерзляков В.В., Новиков В.С., Новиков С.В., Семёнов М.Е., Сибирцев В.М.

Книга рассчитана на студентов, обучающихся по специальности «Управление и информатика в технических системах», а также может быть полезна специалистам по системам ориентации и специалистам смежных областей, желающим познакомиться с системами ориентации космических аппаратов.

## ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

- ◆ Космические аппараты и задачи управления их движением
  - ◆ Классификация систем ориентации
  - ◆ Состав активной системы ориентации. Режимы ориентации
  - ◆ Датчики угла ориентации
  - ◆ Датчики вертикали Земли
    - ◆ Датчики Солнца
    - ◆ Звездные датчики
  - ◆ Гироскопические датчики угловой скорости
    - ◆ Исполнительные органы систем ориентации
      - ◆ Реактивные двигатели
- ◆ Электродвигатели-маховики
  - ◆ Силовые гироскопы

## 1.1. КОСМИЧЕСКИЕ АППАРАТЫ И ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ИХ ДВИЖЕНИЕМ

Термин «космические аппараты» объединяет искусственные спутники Земли и других планет, орбитальные и межпланетные станции, космические корабли, транспортные корабли снабжения. Автоматические спутники, составляющие большинство среди космических аппаратов, наблюдают за поверхностью Земли и облачным покровом, осуществляют связь и ретрансляцию телевизионных сигналов, решают навигационные задачи, исследуют космическое пространство и далекие астрономические объекты.

Для изучения природных ресурсов Земли, экологического мониторинга окружающей среды, геофизических исследований в ФГУП «НПП ВНИИЭМ» разработана серия космических аппаратов «Ресурс» (рис. 1.1). С борта космического аппарата передаются «цифровые» изображения в видимой и инфракрасной областях спектра с разрешением (в зависимости от назначения информации) от 1000 до 30 м [86].

Космический аппарат «Электро» (рис.1.2) входил в состав Глобальной Метеорологической Системы совместно с GOES (США), МЕТЕОСАТ (Европейское космическое агентство) и GMS (Япония). Двухъярусная космическая система гидрометеорологического обеспечения «Планета» объединила информацию геостационарного спутника «Электро» и среднеорбитальных космических аппаратов «Метеор-3», запускаемых на полярные орбиты [86].

С космического аппарата «Электро» передавались изображения Земли в инфракрасном диапазоне спектра (рис.1.3). Эта информация использовалась Гидрометеорологическим центром для прогноза погоды. Космический аппарат «Электро» ознаменовал переход от аналоговых систем ориентации к цифровым.

Движущийся в космическом пространстве аппарат испытывает слабое воздействие со стороны внешней окружающей среды. Большую часть времени его полет происходит вне



Рис. 1.1. Космический аппарат «Ресурс»

плотных слоев атмосферы, с выключенными двигателями, под действием сил всемирного тяготения. В таких условиях движение центра масс космического аппарата и движение вокруг центра масс становятся независимыми друг от друга. Возможность раздельного изучения двух видов движения является важным свойством космического аппарата, которое отличает его от других движущихся объектов. У

объектов, движущихся в воздушной среде или воде, оба вида движения оказываются связанными из-за действия внешних сил и моментов.

Практическое использование космических аппаратов, на которых устанавливаются приборы для изучения поверхности Земли, космические телескопы для наблюдения небесных тел или другая научная аппаратура, немислимо без управления. Космический аппарат, как и другие летательные аппараты, оснащен системой управления движением. Система управления обеспечивает движение центра масс по заданной траектории полета и заданное угловое движение космического аппарата относительно объектов наблюдения. Эти виды управляемого движения существенно различаются по длительности. После вывода космического аппарата на орбиту управление движением центра масс осуществляется эпизодически в течение коротких интервалов времени, а управление угловым положением с целью ориентации приборов космического аппарата на изучаемые объекты становится главным режимом полета. *Под ориентацией понимается заданное угловое движение космического аппарата в пространстве.* Режим ориентации может непрерывно осуществляться в течение всего времени активного существования космического аппарата.

Измерение угловых отклонений космического аппарата производится в базовой системе ко-

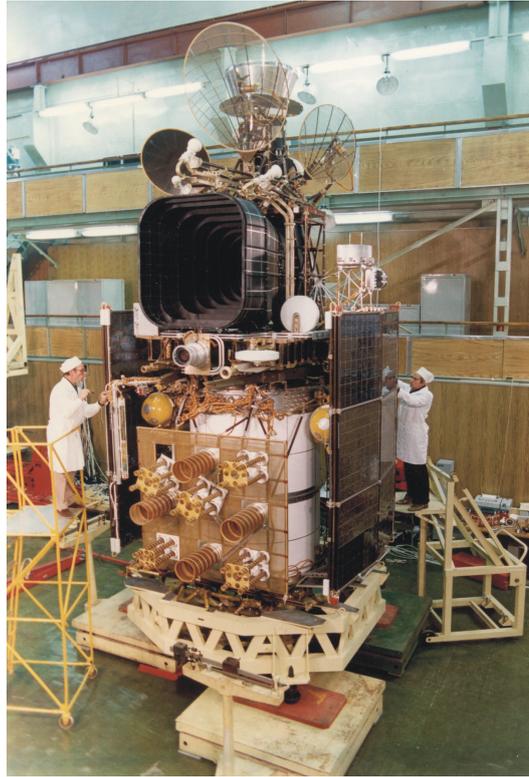


Рис. 1.2. Космический аппарат «Электро»



Рис. 1.3. Вид на Землю с высоты 36 000 км в инфракрасном диапазоне спектра

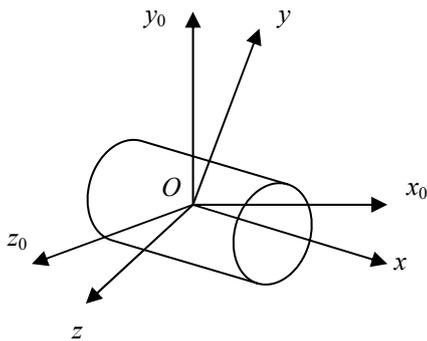
ординат, связанной с определенными ориентирами. Ориентирами могут быть Земля, Солнце, звезды и другие небесные объекты. *Оси базовой системы координат называются осями ориентации.*

*Совокупность приборов и устройств, необходимых для управления угловым движением космического аппарата, называется системой ориентации. Она осуществляет заданное угловое движение системы координат, связанной с корпусом космического аппарата, относительно базовой системы координат или выбранных ориентиров.*

В качестве связанных осей космического аппарата часто используются оси симметрии или главные оси инерции. Совмещение начал связанной  $Oxyz$  и базовой  $Ox_0y_0z_0$  систем координат с центром масс  $O$  космического аппарата удобно для изучения угловых движений и отсчета угловых рассогласований (рис. 1.4).

*Углы, определяющие взаимное положение двух систем координат, называются углами ориентации.* Построение на борту базовой системы координат осуществляется при помощи приборов ориентации, измеряющих угловые отклонения осей космического аппарата относительно осей ориентации или выбранных ориентиров. Поскольку начало отсчета базовой системы координат совмещено с центром масс космического аппарата, базовая система координат движется по орбите вместе с космическим аппаратом.

Типовыми видами ориентации являются совмещение осей связанной и базовой систем координат, отклонение связанной системы координат на заданные углы ориентации, заданное угловое вращение одной системы координат относительно другой.



**Рис. 1.4. Базовая и связанная системы координат**

Заданные угловые движения космического аппарата осуществляются с определенной точностью, которая зависит от погрешностей системы ориентации и уровня возмущающих моментов. Движения космического аппарата, вызванные этими факторами, проявляются в виде отклонений от заданного движения и называются *режимом стабилизации.*

Система ориентации взаимодействует с системой управления движением центра масс и другими бортовыми системами: энергоснабжения, связи, навигации, телеметрии [70].

Тесное взаимодействие между системами, применение для управления цифровых вычислительных машин позволяет в настоящее время объединить задачу проектирования отдельных систем и устройств в задачу проектирования единого бортового комплекса управления космического аппарата.

## 1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ ОРИЕНТАЦИИ

Системы ориентации различаются по свойствам базовых систем координат, реализуемых на борту при помощи приборов ориентации [85].

Системы, использующие поступательно движущиеся оси ориентации, позволяют сохранять угловое положение космического аппарата неизменным относительно неподвижных звезд (рис. 1.5).

Для реализации такой системы координат достаточно визировать двумя астродатчиками две звезды и удерживать изображения звезд в поле зрения датчиков, поворачивая весь космический аппарат.

При создании искусственных спутников Земли и других планет широкое распространение получили системы ориентации, использующие вращающиеся оси ориентации. Наибольшее распространение получила *орбитальная система координат*, которая вводится следующим образом. Соединим центр Земли  $O_1$  с центром масс  $O$  космического аппарата. На

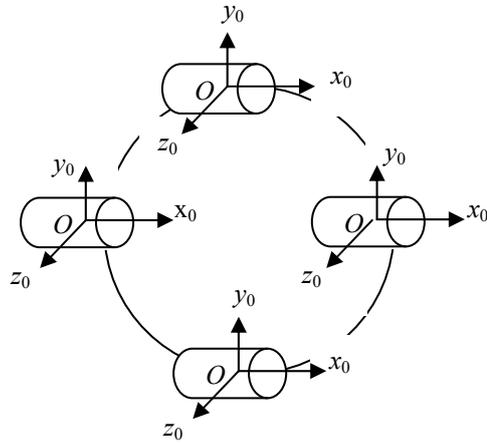


Рис. 1.5. Положение поступательно движущейся системы координат в различных точках орбиты

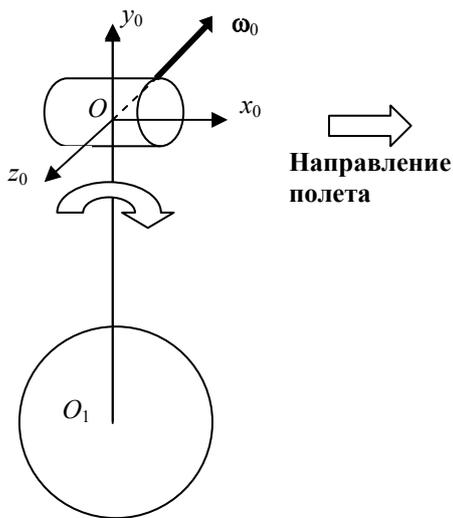


Рис. 1.6. Орбитальная система координат

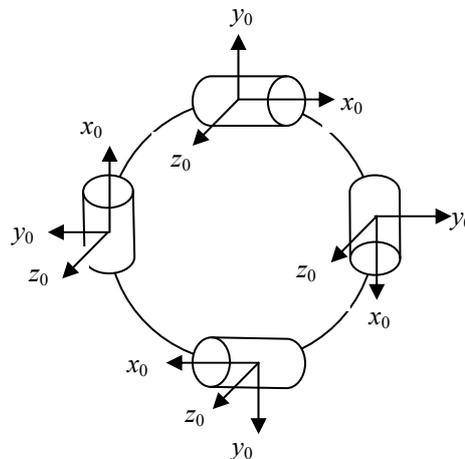


Рис. 1.7. Положение орбитальной системы координат в различных точках орбиты

продолжении этого отрезка построим ось  $Oy_0$ . Перпендикулярно к ней в плоскости орбиты и в направлении полета космического аппарата вокруг Земли направим ось  $Ox_0$ . Ось  $Oz_0$ , образующая правую систему координат, перпендикулярна плоскости орбиты (рис. 1.6). Вектор угловой орбитальной скорости  $\omega_0$  направлен по оси  $-Oz_0$ .

Относительно звезд орбитальная система координат вращается вокруг оси  $Oz_0$  с угловой скоростью  $\omega_0$  (рис. 1.7).

Для круговых орбит это равномерное вращение ( $\omega_0 = \text{const}$ ). Для построения на борту орбитальной системы координат используются приборы ориентации, определяющие направление на центр Земли. Полет космического аппарата, ориентированного в орбитальной системе координат, напоминает полет самолета, поэтому положение связанных осей космического аппарата относительно орбитальной системы координат удобно определять самолетными углами крена, тангажа и рыскания.

Чтобы управлять ориентацией космического аппарата, к нему нужно прикладывать управляющие моменты нужных величин и знаков. Классификация систем ориентации по способу создания управляющих моментов и типам исполнительных органов приведена на рис. 1.8.

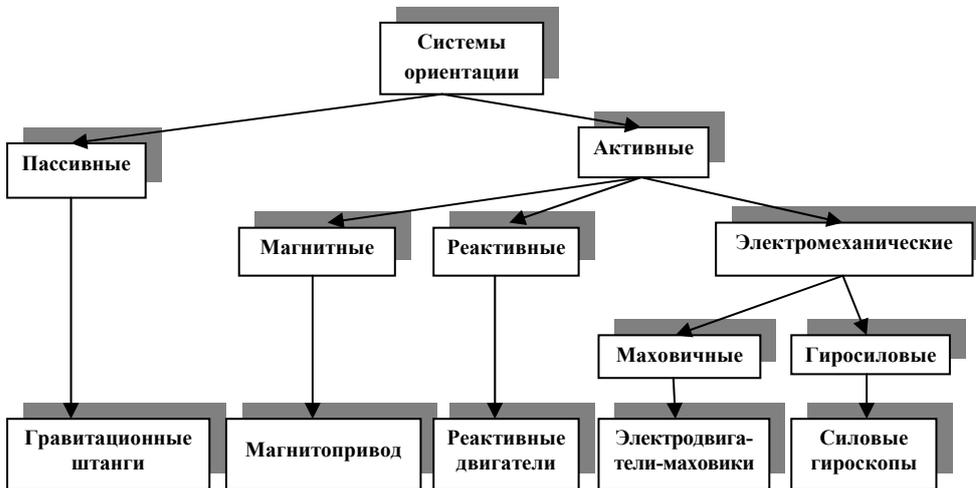


Рис. 1.8. Классификация систем ориентации

В пассивных системах [82] управляющий момент создается за счет взаимодействия космического аппарата с окружающей средой. Наибольшее распространение получили гравитационные системы, в которых роль исполнительного органа играет гравитационная штанга.

В активных системах [85] на создание управляющего момента тратится реактивное топливо или энергия бортовых источников питания.

По типу исполнительных органов различаются реактивные, электромеханические и магнитные системы ориентации. В реактивных системах управляющий момент создается реактивными двигателями различных типов, например химическими или электрореактивными.

В электромеханических системах управляющий момент создается за счет инерционных вращающихся масс. Известны электромаховичные системы (их исполнительные органы – электродвигатели-маховики) и гиросиловые (исполнительные органы – силовые гироскопы).

В магнитных системах управляющий момент создается за счет взаимодействия электромагнитов, установленных на космическом аппарате, с магнитным полем Земли [60].

Системы ориентации могут классифицироваться по точности, степени участия человека в управлении космическим аппаратом и другим признакам [7, 56, 85].

### 1.3. СОСТАВ АКТИВНОЙ СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ. РЕЖИМЫ ОРИЕНТАЦИИ

В состав активной системы ориентации входят датчики углов ориентации, датчики угловой скорости, бортовая цифровая вычислительная машина (БЦВМ) и исполнительные органы (рис. 1.9).

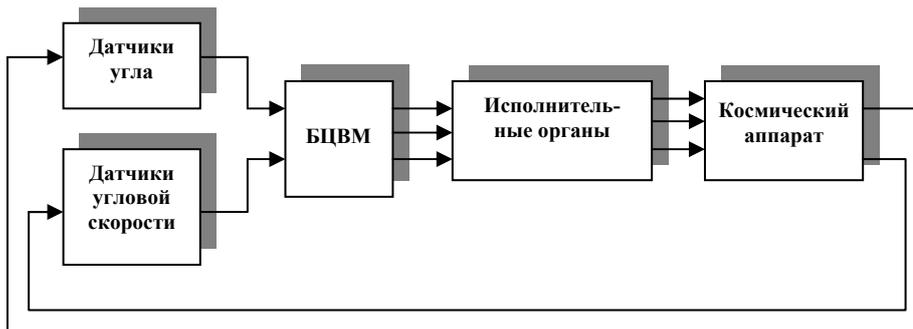


Рис. 1.9. Функциональная схема активной системы ориентации

Объем информации, поступающей в БЦВМ с датчиков и других бортовых систем, должен быть достаточным для качественного управления ориентацией. БЦВМ реализует выбранные алгоритмы управления и вырабатывает сигналы управления исполнительными органами. Исполнительные органы прикладывают к корпусу космического аппарата управляющие моменты, вызывающие изменение углового положения космического аппарата в нужном направлении. Эти изменения фиксируются датчиками. Происходит замыкание отрицательной обратной связи.

Учитывая высокую стоимость вывода полезной нагрузки на орбиту, важными техническими характеристиками системы ориентации являются масса, а также показатели надежности и экономичности. Высокая надежность достигается применением особо надежных элементов, резервированием и другими специальными мерами. Экономичность системы характеризуется расходом реактивного топлива и электрической энергии в единицу времени.

Основными режимами ориентации космического аппарата являются успокоение, поиск ориентиров, переходы из одной базовой системы координат в другую и обратно, стабилизация, повороты на заданные углы, угловые маневры.

Стартующий вертикально ракетоноситель выводит космический аппарат на нужную высоту. Последняя ступень ракетоносителя переводит космический аппарат в горизонтальный полет и сообщает ему скорость около 8 км/с. После вывода космического аппарата на орбиту двигатели последней ступени выключаются. Подается сигнал в пиротехническое устройство, которое отталкивает космический аппарат от ракетоносителя. Поскольку пружинные толкатели срабатывают неодинаково, возникает непреднамеренное вращение космического аппарата вокруг центра масс. *Успокоением называется первоначальный режим ориентации, в котором гасится угловая скорость космического аппарата, возникшая при отделении от носителя.*

Поля зрения датчиков углов ориентации ограничены. После успокоения оси космического аппарата могут занимать в космическом пространстве произвольное угловое положение и ориентиры, необходимые для построения на борту базовой системы координат (Солнце, Земля, звезды), могут находиться вне поля зрения датчиков. Если датчики установлены на корпусе космического аппарата неподвижно, то поиск ориентиров осуществляется путем поворотов всего космического аппарата. Для этого включаются исполнительные органы и начинается вращение космического аппарата вокруг определенной оси. Вращение прекращается, когда нужный ориентир попадает в поле зрения датчика.

*Поиск ориентиров* обычно начинается с Солнца. Для поиска Солнца используются солнечные датчики.

Ориентация солнечных батарей на Солнце обеспечивает приток электроэнергии, необходимый для работы всех служебных систем космического аппарата. Стратегия поиска других ориентиров учитывает информацию об их угловом положении относительно Солнца.

Поиск ориентиров завершается построением на борту базовой системы координат и переходом к длительному режиму стабилизации, когда система ориентации непрерывно поддерживает заданную ориентацию космического аппарата.

В идеальном случае три оси космического аппарата совпадают с тремя осями базовой системы координат.

Для поиска Земли и построения на борту орбитальной системы координат используются приборы ориентации, определяющие направление на центр Земли, и угол поворота вокруг этого направления (угол курса). При ориента-

ции в орбитальной системе координат одна ось космического аппарата всегда направлена по линии, соединяющей центр Земли с центром масс космического аппарата.

Для работы целевой аппаратуры, установленной на космическом аппарате, могут требоваться разные базовые системы координат. Система ориентации должна обеспечивать переходы из одной системы отсчёта в другую. Например помимо ориентации в орбитальной системе координат может использоваться солнечно-земная ориентация, когда одна ось космического аппарата направлена по радиусу-вектору орбиты, а другая располагается в плоскости солнечного меридиана, т. е. в плоскости, образуемой радиусом-вектором орбиты и центром Солнца, и направлена в сторону Солнца.

После построения на борту базовой системы координат начинается режим стабилизации. *Стабилизация* может считаться главным режимом управляемого движения космического аппарата вокруг центра масс.

*Повороты* относительно базовой системы координат на заданные углы необходимы для наведения научной и телевизионной аппаратуры, жестко закрепленной на корпусе космического аппарата, на объекты наблюдения.

В общем случае космический аппарат совершает разнообразные угловые маневры вокруг центра масс. Например угловые маневры с целью ориентации маршевых реактивных двигателей совершаются перед коррекцией орбиты. Сложность и продолжительность угловых маневров определяются теми задачами, которые поставлены перед космическим аппаратом.

#### 1.4. ДАТЧИКИ УГЛА ОРИЕНТАЦИИ

Автоматическое определение углов ориентации базируется на различных физических принципах.

*Датчики внешней информации* используют для определения углов ориентации внешние по отношению к космическим аппаратам ориентиры – Землю, Солнце, звезды. В соответствии с этим различают датчики Земли (например инфракрасные вертикали), солнечные и звездные датчики. Источниками внешней информации могут быть физические поля, окружающие космический аппарат (магнитное, гравитационное), потоки космических частиц и другие особенности космического пространства.

Для измерения угловых координат используются два принципиально различных метода. Первый связан с измерением координат изображения светила в фокальной плоскости прибора, второй – метод компенсации. Компенсационный метод предусматривает установку оптической системы в двухступенном кардановом подвесе. Каждая рамка подвеса приводится в действие следящей системой. Оптическая ось прибора непрерывно совмещается с линией визирования, т. е. непрерывно наводится на выбранный ориентир. Измеряются углы поворотов рамок карданового подвеса. По ним судят об угловом положении космического аппарата.

Значительная часть датчиков внешней информации относится к классу оптико-электронных приборов [51, 53]. Источниками информации в таких приборах служат потоки лучистой энергии, излучаемой или отражаемой небесными телами. В состав оптико-электронного прибора входят оптическая система, приемник излучения, преобразующее устройство и анализатор (рис. 1.10).



Рис. 1.10. Функциональная схема оптико-электронного прибора

Оптическая система осуществляет прием, передачу и распределение потока лучистой энергии. Типовыми элементами оптической системы являются светофильтры, линзы, оптические призмы и зеркала. К основным характеристикам оптической системы относятся: фокусное расстояние объектива, относительное отверстие (отношение диаметра входного зрачка к фокусному расстоянию), угол поля зрения, разрешающая способность.

Приемники излучения (тепловые, фотоэлектрические) преобразуют оптический сигнал в электрический. В преобразующем устройстве выходной сигнал приемника излучения, содержащий информацию об угловом отклонении космического аппарата, представляется в форме, удобной для дальнейшего анализа. В анализаторе определяются угловые отклонения оптической оси прибора от направления на ориентир. В современных приборах информация об угловом отклонении космического аппарата выдается в цифровом коде. Это позволяет легко подключать приборы к информационно-управляющей сети бортового комплекса управления.

Принцип действия *инерциальных датчиков* основан на использовании свойств абсолютного углового движения осей ориентации и связанных осей космического аппарата [55, 85]. В качестве чувствительных элементов инерциальных систем используются гироскопические приборы, датчики угловой скорости и акселерометры (датчики ускорения) [79].

Для определения угла рыскания (курса) космического аппарата «Метеор» применялся *гироскопический прибор* («гироскопический прибор», реагирующий на угловую орбитальную скорость и устанавливающий ось чувствительности перпендикулярно плоскости орбиты. Гироскопический прибор представляет собой корректируемый трёхстепенный астатический гироскоп [85]. Если космический аппарат идеально ориентирован в орбитальной системе координат, то ось вращения наружной рамки располагается в плоскости орбиты параллельно оси  $Ox_0$ , ось вращения внутренней рамки параллельна оси  $Oy_0$  (линии, соединяющей центр Земли с центром масс космического аппарата), а ось вращения ротора

перпендикулярна к плоскости орбиты и совпадает с вектором угловой орбитальной скорости  $\omega_0$ . Благодаря коррекции, которую осуществляют датчики момента, это направление оси вращения ротора является устойчивым. При возникновении угла рыскания плоскость наружной рамки выходит из плоскости орбиты и с потенциометра, установленного на оси вращения внутренней рамки, снимается сигнал, пропорциональный углу рыскания. Гироорбитант определяет на борту положение плоскости орбиты, поэтому другое его название – «гироскопическая орбита» или «гироскопическая бинормаль» (от названия оси  $Oz_0$ ).

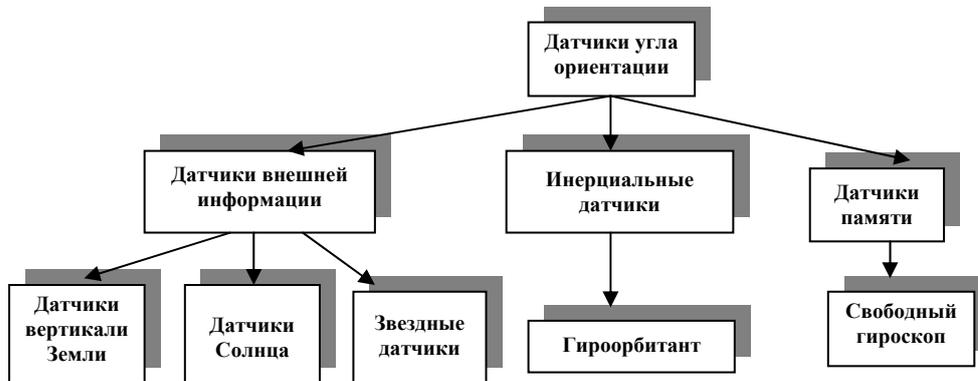


Рис. 1.11. Классификация датчиков угла ориентации

В общем случае нахождение углов ориентации сводится к интегрированию в БЦВМ системы кинематических уравнений, связывающих углы ориентации с вектором угловой скорости космического аппарата.

Существуют датчики, которые не могут в явном виде измерять углы ориентации, но способны измерять угловые отклонения космического аппарата от некоторого произвольного направления, хранящегося в памяти датчика. Типичным датчиком памяти является свободный гироскоп, т. е. гироскоп с тремя степенями свободы движения [85].

Классификацию датчиков угла ориентации поясняет схема на рис. 1.11.

### 1.5. ДАТЧИКИ ВЕРТИКАЛИ ЗЕМЛИ

Пусть космический аппарат находится на высоте  $H$  над поверхностью Земли (рис. 1.12). С этой высоты Земля видна под углом  $2\beta$ :

$$\beta = \arcsin R/(R + H), \quad (1.1)$$

где  $R$  – радиус Земли.

Угловой размер Земли уменьшается с увеличением высоты орбиты. С высоты 1000 км (на такую орбиту запускаются космические аппараты «Метеор»)

Земля видна под углом  $120^\circ$ , а с высоты  $36\,000$  км, на которой находился космический аппарат «Электро», угловой размер Земли ( $2\beta$ ) составляет  $17^\circ$ .

Линия, проходящая через центр Земли  $O_1$  и центр масс космического аппарата  $O$ , называется местной вертикалью. На ней располагается ось  $Oy_0$  орбитальной системы координат. Если на космическом аппарате установить оптический прибор и измерить угловое положение нескольких точек горизонта, можно рассчитать положение центра окружности, видимой с космического аппарата, а затем положение линии, соединяющей центр масс космического аппарата с центром видимой окружности. Будем считать, что это направление совпадает с местной вертикалью.

*Положение космического аппарата относительно местной вертикали*

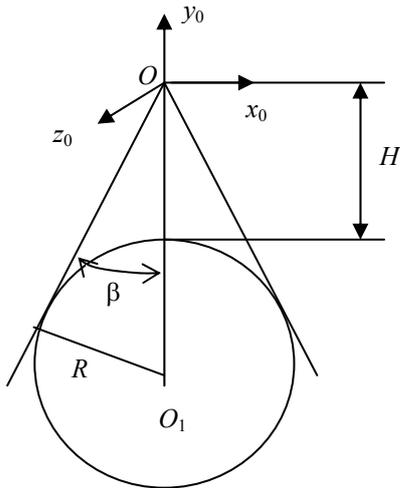


Рис. 1.12. Орбитальная система координат

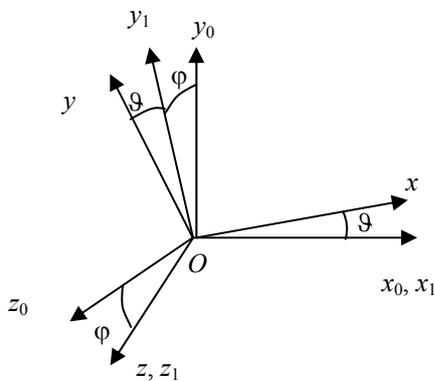


Рис. 1.13. Углы крена и тангажа

*определяется углами крена и тангажа, которые вводятся следующим образом. Пусть вначале связанные оси космического аппарата  $Oxyz$  совпадают с осями орбитальной системы координат  $Ox_0y_0z_0$ . Поворот на угол крена  $\varphi$  производится вокруг связанной оси  $Ox$  – оси крена. После первого поворота связанные оси космического аппарата занимают положение  $Ox_1y_1z_1$ . Поворот на угол тангажа  $\theta$  производится вокруг связанной оси  $Oz_1$  – оси тангажа (рис. 1.13).*

*Оптико-электронные приборы, предназначенные для автономного определения угловых отклонений космического аппарата относительно местной вертикали называются датчиками вертикали (инфракрасными вертикалями, построителями местной вертикали). Датчики вертикали необходимы для построения на борту орбитальной системы координат. При использовании Земли в качестве ориентира одна ось космического аппарата ( $-Oy$ ) постоянно направлена в сторону Земли и совпадает с местной вертикалью при идеальной ориентации.*

Поскольку между нагретой Землей и окружающим космическим пространством существует ярко выраженный оптический контраст, визи-

рование горизонта можно производить, используя различные части оптического спектра. В датчиках вертикали обычно используется инфракрасный диапазон собственного излучения Земли. Так как планета имеет примерно постоянную температуру, расчетной моделью Земли как источника излучения в инфракрасном диапазоне спектра может служить сфера с постоянной яркостью поверхности. Инфракрасный датчик вертикали может работать в дневное и ночное время независимо от метеорологических условий [51].

В качестве приемников инфракрасного излучения используются полупроводниковые и металлические болометры (с греческого языка «бол» переводится как «луч»). Поле зрения чувствительного элемента ограничено углом  $2\alpha$ , поэтому индикация горизонта осуществляется методом сканирования. При пересечении горизонта полем зрения датчика выходной сигнал приемника излучения изменяется.

Сканирование может быть круговым, иметь форму «засечек», производиться вдоль горизонта или перпендикулярно ему.

Круговое сканирование перпендикулярно плоскости горизонта использовалось на американском спутнике «Нимбус» [51]. Одно сканирующее зеркало вращается вокруг оси  $Oz$ , другое вокруг оси  $Ox$ . За начало отсчета углов поворота зеркал выбрана ось  $Oy$ .

Предположим, что космический аппарат отклонился на угол  $\vartheta$  вокруг оси тангажа  $Oz$  (рис. 1.14, а). Отклонение оси  $Oy$  относительно местной вертикали определяется из условия

$$\vartheta_1 = \beta + \vartheta; \quad \vartheta_2 = \beta - \vartheta,$$

где  $\vartheta_1, \vartheta_2$  – углы визирования горизонта в плоскости тангажа. Очевидно,

$$\vartheta = \frac{1}{2} (\vartheta_1 - \vartheta_2).$$

При постоянной угловой скорости сканирования  $v$  вокруг оси  $Oz$

$$v\tau_1 + \vartheta_1 = \vartheta_2 + v\tau_2,$$

где  $\tau_1$  – время, в течение которого оптическая ось проходит угол от оси  $Oy$  до точки касания с горизонтом «а»;  $\tau_2$  – время, в течение которого оптическая ось проходит угол от точки касания с горизонтом «б» до оси  $Oy$ .

Если измерить интервалы времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , то угол тангажа вычисляется по формуле

$$\vartheta = \frac{1}{2} (\vartheta_1 - \vartheta_2) = \frac{1}{2} v (\tau_2 - \tau_1).$$

Аналогично определяется угловое отклонение вокруг оси крена. Полосы на плоскости горизонта шириной  $2\alpha$ , попадающие в поля зрения двух сканирующих систем, изображены на рис. 1.14, б.

Круговое сканирование вдоль горизонта используется на российском метеорологическом спутнике «Метеор». Сканирующее зеркало вращается вокруг оси  $Oy$ . Плоскость зеркала расположена под углом  $\pi/2 - \beta/2$  относительно оси вращения. Угол  $\beta$  вычисляется по формуле (1.1). Если космический аппарат идеально ориентирован в орбитальной системе координат, центр поля зрения датчика скользит по горизонту, а оптическая ось описывает коническую поверхность (рис. 1.15 а, б).

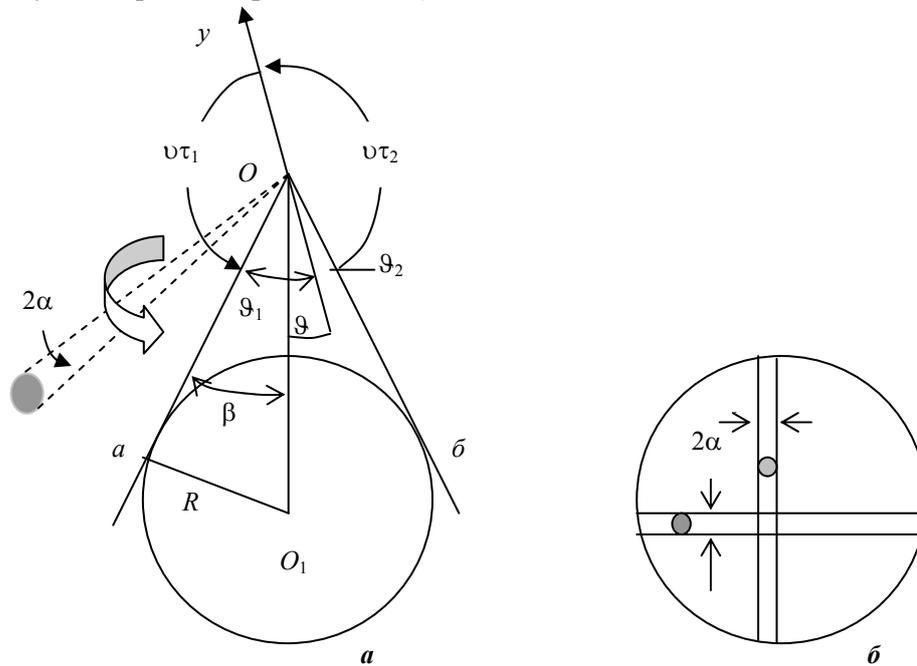


Рис. 1.14. Круговое сканирование перпендикулярно плоскости горизонта

Объектив фокусирует тепловой поток на чувствительный элемент-приёмник излучения, который преобразует оптический сигнал в электрический. В инфракрасных вертикалях объектив отличается от привычных объективов из стекла других оптических приборов, работающих в видимом диапазоне света. Объектив инфракрасной вертикали должен пропускать инфракрасные лучи и, следовательно, не может быть сделан из стекла, поглощающего эти лучи. Объективы в виде выпукло-вогнутой линзы делаются из кремния или германия. Для человеческого глаза они не прозрачны. В качестве «объектива», концентрирующего инфракрасное излучение, часто используются параболические зеркала, которые отражают лучистый поток на приёмник излучения.

Блок электроники настроен таким образом, что сигнал на выходе прибора отсутствует. При отклонении космического аппарата от местной вертикали поле зрения смещается относительно горизонта (рис.1.15, в). Выходной сигнал приемника излучения пропорционален угловому отклонению оси  $Oy$  космиче-

ского аппарата от местной вертикали, а фаза сигнала определяет положение плоскости отклонения  $Oy_0$ . Углы крена и тангажа пропорциональны смещению центра линии сканирования относительно центра горизонта. Точность определения углов крена и тангажа такими приборами составляет  $15'$ .

Датчик вертикали «секущего» типа предполагается использовать на малых космических аппаратах разработки НПП ВНИИЭМ.

Оптико-электронный канал прибора содержит приемник излучения (пирометрический болометр), германиевый объектив, сканирующее зеркало и шесть неподвижных плоских зеркал (рис. 1.16). Интерференционный фильтр, нанесенный на объектив, не пропускает коротковолновое излучение (до 6 мкм), а просветляющее покрытие способствует прохождению волн выбранного диапазона инфракрасного излучения (11 мкм). Сканирующее зеркало установлено под углом к оси вращения электродвигателя. Угол установки неподвижных зеркал относительно посадочной плоскости прибора рассчитывается для заданной высоты орбиты ( $H = 450 - 1000$  км).

Электродвигатель приводит во вращение сканирующее зеркало и кодовый диск. На кодовом диске имеется отверстие, которое определяет начало цикла сканирования, и шесть окон с угловым размером по  $24^\circ$ . За один оборот сканирующего зеркала формируются шесть «засечек» горизонта (рис. 1.17).

Определяемые углы крена и тангажа пропорциональны смещениям центра сканирования относительно горизонта.

Считывание информации с кодового диска осуществляется оптронной парой (светодиод, фотодиод). Взаимные расположения сканирующего зеркала, кодового диска, окон и оптронной пары определяют привязку производимых измерений к системам координат прибора и космического аппарата. Функциональная схема датчика вертикали изображена на рис. 1.18.

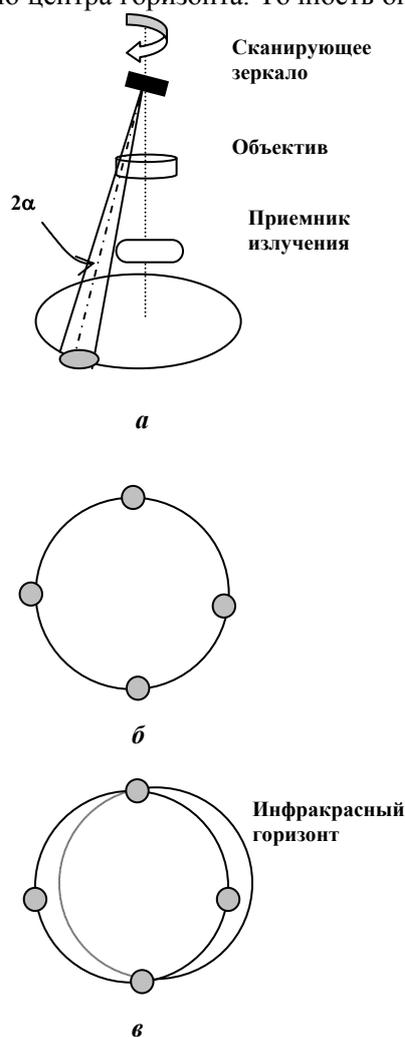


Рис. 1.15. Круговое сканирование в плоскости горизонта

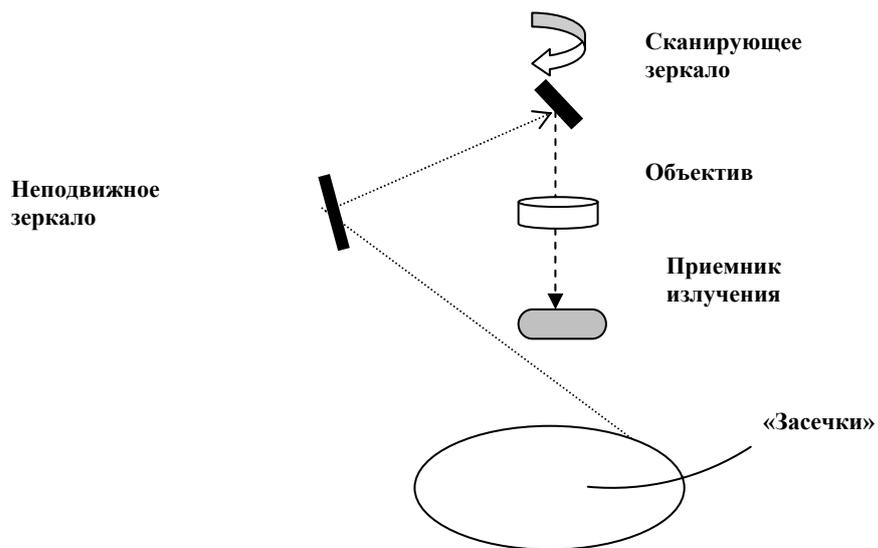


Рис. 1.16. Инфракрасная вертикаль секущего типа

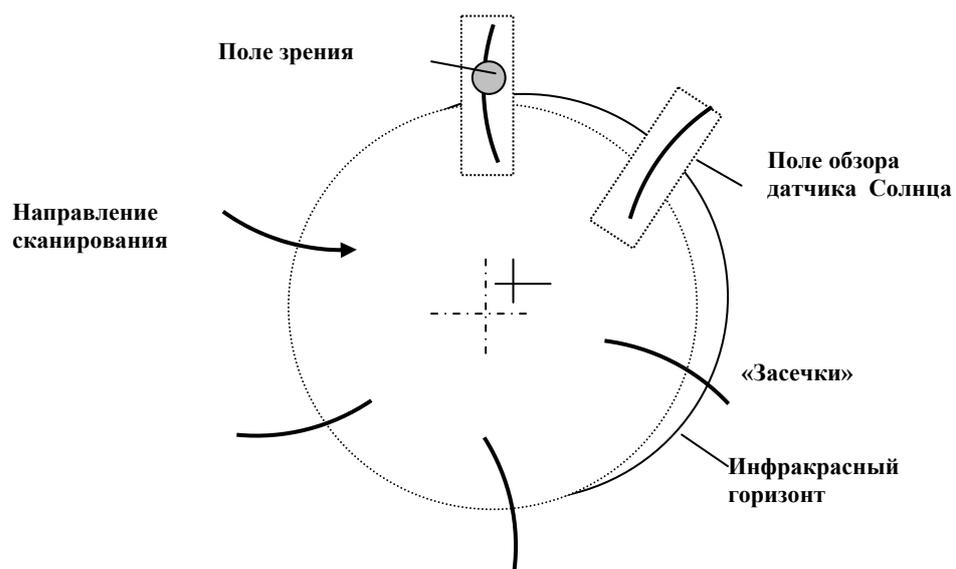


Рис. 1.17. Сканирование горизонта

Импульсные сигналы с оптронной пары подаются в схему формирования командных импульсов. Она информирует о начале цикла сканирования и прохождении шести окон кодового диска. При переходе мгновенного поля зрения прибора из космоса на Землю сигнал приемника излучения нарастает. Пороговое устройство настроено на два уровня сигнала и выдает первый импульс, когда сигнал болометра достигает первого уровня, и второй импульс при достижении второго уровня. Шесть миниатюрных щелевых датчиков с фотодиодами предназначены для борьбы с солнечной засветкой. Поля зрения фотодатчиков перекрывают соответствующие участки поля обзора датчика вертикали.

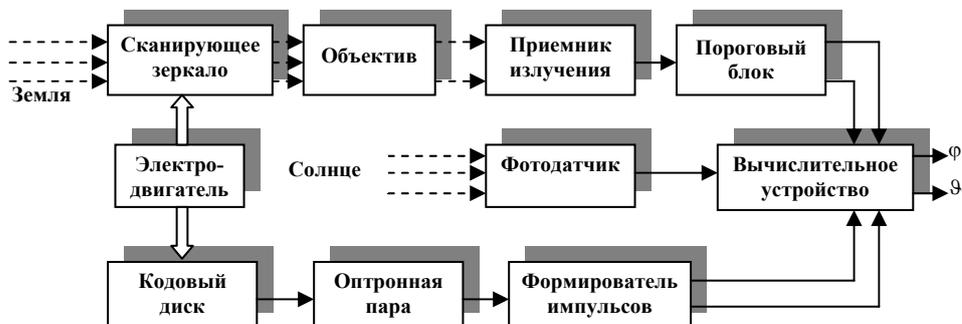


Рис. 1.18. Функциональная схема датчика вертикали

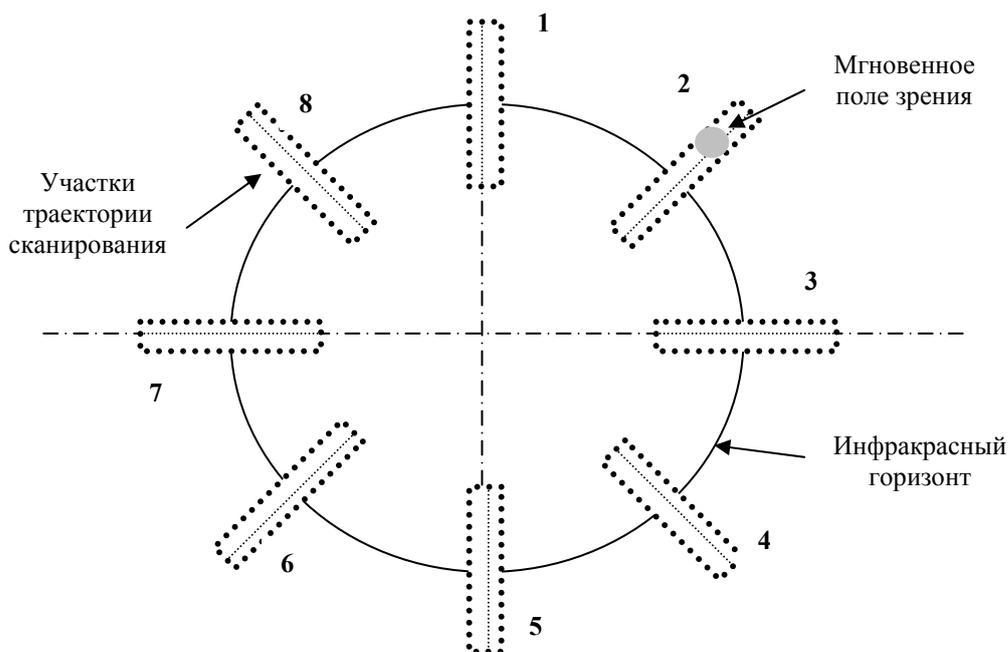


Рис. 1.19. Сканирование горизонта

Выходными переменными вычислительного устройства являются углы крена и тангажа, а также сигналы наличия Земли и Солнца.

В датчике вертикали геостационарного спутника Земли ( $H = 36\,000$  км) используются восемь неподвижных плоских зеркал, установленных под углом  $45^\circ$  к посадочной плоскости прибора. Восемь миниатюрных щелевых датчиков с фотодиодами предназначены для борьбы с солнечной засветкой. На кодовом диске помимо отверстия, которое определяет начало цикла сканирования, имеются восемь окон с угловым размером  $15^\circ$ . Расстояние между окнами по азимуту составляет  $45^\circ$ . Схема сканирования горизонта изображена на рис. 1.19.

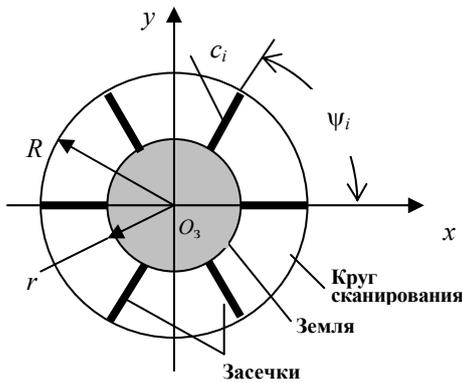


Рис. 1.20. Схема сканирования

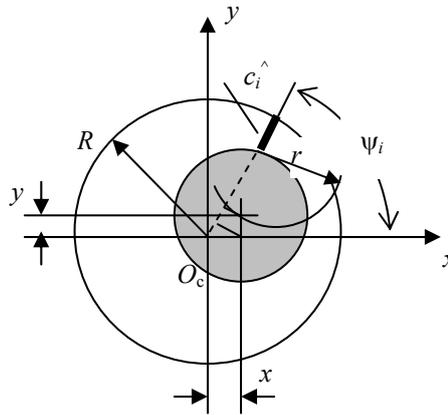


Рис. 1.21. Расчётная схема

Рассмотрим методику расчёта смещений  $x, y$  центра инфракрасного горизонта Земли  $O_3$  относительно центра сканирования  $O_c$  на простом примере, когда засечки имеют форму прямолинейных отрезков. Схема сканирования в положении, когда центры  $O_c$  и  $O_3$  совпадают и космический аппарат идеально стабилизирован в орбитальной системе координат, изображена на рис. 1.20. На ней приняты следующие обозначения:  $O_cxy$  – система координат инфракрасной вертикали;  $R$  – радиус круга сканирования, определяющий начало засечек;  $r$  – радиус видимого круга Земли, определяющий конец засечек;  $c_i$  – длина  $i$ -й засечки;  $\psi_i = \psi_0(i - 1)$  – угловое положение  $i$ -й засечки;  $\psi_0 = 360^\circ/n$  – угол между соседними засечками;  $n$  – число засечек;  $i = 1, \dots, n$  – номер засечки. В состоянии идеальной ориентации (см. рис. 1.20) длина всех засечек одинакова:  $c_i = R - r$ . При идеальном измерении по длине любой засечки можно вычислить радиус видимого круга  $r = R - c_i$ . Реальные измерения  $c_i$  содержат погрешность. Чтобы уменьшить влияние погрешностей измерений при вычислении  $r$  следует использовать среднюю длину засечки

$$r = R - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i^{\wedge}.$$

При отклонении космического аппарата от *местной вертикали* центр видимого круга  $O_3$  смещается относительно осей прибора  $O_{xy}$ , длина засечек меняется. Изменение длины засечек служит исходной информацией для расчета координат  $x$  и  $y$  центра  $O_3$  видимого круга относительно осей прибора. Взаимное положение инфракрасного горизонта, круга сканирования и произвольной  $i$ -й засечки изображено на рис. 1.21. Измеренная длина  $\hat{c}_i$   $i$ -й засечки при известном радиусе  $R$  круга сканирования помимо случайных факторов зависит от координат смещения  $x$ ,  $y$  и радиуса видимого круга  $r$ .

Используя расчетную схему (см. рис. 1.21) и полагая отклонения  $x$  и  $y$  малыми, найдём соотношения между длиной засечек, радиусом круга сканирования, радиусом и координатами центра видимого круга

$$\hat{c}_i = R - (r + x \cos \psi_i + y \sin \psi_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

После переноса неизвестных переменных в левую часть, а результатов измерения в правую часть, получим систему  $n$  линейных алгебраических уравнений для вычисления неизвестных  $r$ ,  $x$ ,  $y$

$$r + x \cos \psi_i + y \sin \psi_i = R - \hat{c}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Формально, для вычисления неизвестных, достаточно иметь результаты трёх измерений, т. е. иметь сканирующую систему с тремя засечками. Однако необходимо учитывать, что конкретные измерения всегда содержат ошибки, а при наличии солнечной засветки некоторые измерения приходится исключать из вычислительного процесса. Увеличение числа измерений способствует «сглаживанию» негативных факторов.

Если число засечек больше трёх, то система уравнений является избыточной и может быть решена многими способами. Поскольку результаты измерений длины засечек содержат случайные ошибки, для решения избыточной системы уравнений воспользуемся методом наименьших квадратов [67, 112]. В качестве искоемых переменных примем величины  $r$ ,  $x$ ,  $y$ , удовлетворяющие условию

$$F = \sum_{i=1}^n (c_i^{\wedge} - f_i)^2 = \min,$$

где  $f_i = R - (r + x \cos \psi_i + y \sin \psi_i)$ .

Приравнявая к нулю частные производные  $\partial F / \partial r$ ,  $\partial F / \partial x$  и  $\partial F / \partial y$ , получим систему трёх алгебраических уравнений для определения неизвестных

$$\begin{aligned} nr + x \sum_{i=1}^n \cos \Psi_i + y \sum_{i=1}^n \sin \Psi_i &= nR - \sum_{i=1}^n \hat{c}_i; \\ r \sum_{i=1}^n \cos \Psi_i + x \sum_{i=1}^n \cos^2 \Psi_i + y \sum_{i=1}^n \sin \Psi_i \cos \Psi_i &= R \sum_{i=1}^n \cos \Psi_i - \sum_{i=1}^n \hat{c}_i \cos \Psi_i; \\ r \sum_{i=1}^n \sin \Psi_i + x \sum_{i=1}^n \cos \Psi_i \sin \Psi_i + y \sum_{i=1}^n \sin^2 \Psi_i &= R \sum_{i=1}^n \sin \Psi_i - \sum_{i=1}^n \hat{c}_i \sin \Psi_i. \end{aligned}$$

Если использовать симметричные схемы сканирования, для которых

$$\sum_{i=1}^n \cos \Psi_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n \sin \Psi_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \sin \Psi_i \cos \Psi_i = 0,$$

то

$$r = R - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i^{\wedge}, \quad x = \frac{-1}{\sum_{i=1}^n \cos^2 \Psi_i} \sum_{i=1}^n c_i^{\wedge} \cos \Psi_i, \quad y = \frac{-1}{\sum_{i=1}^n \sin^2 \Psi_i} \sum_{i=1}^n c_i^{\wedge} \sin \Psi_i.$$

Эти формулы реализуются вычислительным устройством.

**Пример.** Рассмотрим датчик вертикали с четырьмя засечками.

При  $n = 4$

$$\Psi_1 = 0^\circ, \Psi_2 = 90^\circ, \Psi_3 = 180^\circ, \Psi_4 = 270^\circ.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^4 \cos^2 \Psi_i = 2; \quad \sum_{i=1}^4 \sin^2 \Psi_i = 2.$$

Используя расчётные формулы, получим

$$r = R - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 c_i^{\wedge}; \quad x = 1/2 (c_3^{\wedge} - c_1^{\wedge}); \quad y = 1/2 (c_4^{\wedge} - c_2^{\wedge}).$$

Датчики вертикали Земли имеют оригинальную конструкцию. В качестве привода сканирующего зеркала часто используются электродвигатели с полым ротором (рис. 1.22). Чувствительным элементом служит пироприёмник МГ-32 с германиевым окном. Наличие германиевого окна затрудняет создание встроенного имитатора излучения. Для автономных проверок и наземных испытаний предусмотрена подача имитационных сигналов непосредственно на вход электронного тракта, минуя фотоприёмник.

Точность инфракрасных датчиков вертикали секущего типа достигает 2,5 – 4', масса не превышает 3 – 4 кг.

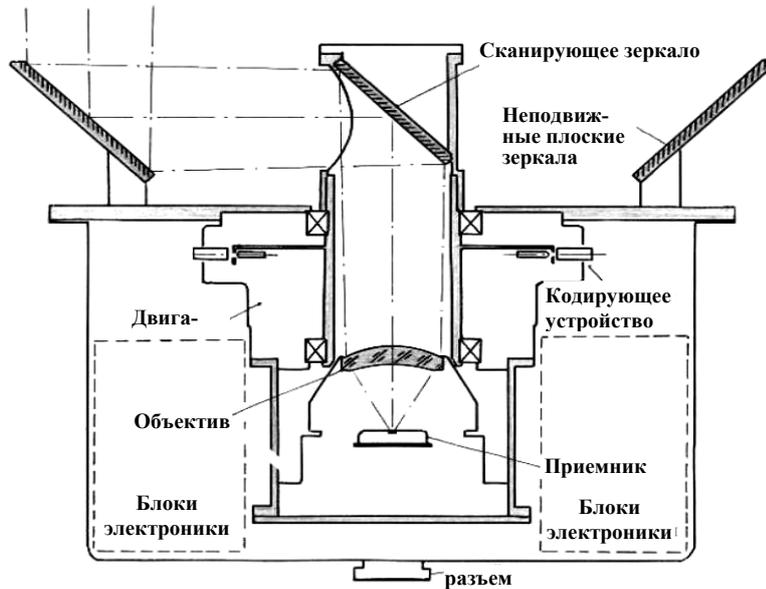


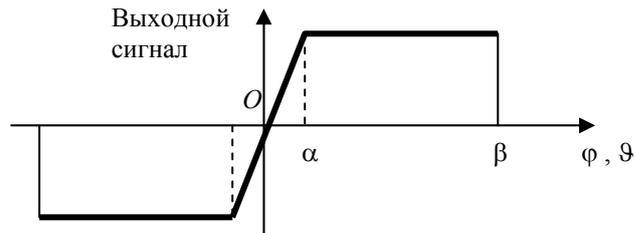
Рис. 1.22. Конструктивная схема датчика вертикали

Статическая характеристика датчиков вертикали Земли имеет зону линейности и зону насыщения (рис. 1.23).

Зона линейности связана с полем зрения прибора и составляет  $1 - 2^\circ$ . Сигнал с датчика пропадает, когда угловые отклонения космического аппарата от местной вертикали превышают угол  $\beta$ . Выходные переменные могут быть представлены в аналоговой форме или в виде ШИМ-сигналов (временные интервалы между опорными и измерительными импульсами).

Общий вид датчика вертикали секущего типа с восемью засечками изображен на рис. 1.24, *а*.

В этом приборе излучение Земли проходит через систему зеркал и светофильтр, а затем фокусируется параболическим зеркальным объективом на

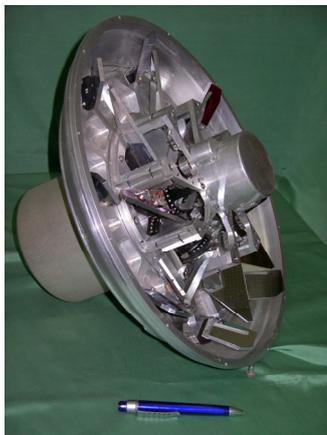


**Рис. 1.23. Статическая характеристика датчика вертикали**

пирозлектрический приемник излучения. Прибор выполнен в герметизированном корпусе.

Общий вид датчиков вертикали секущего типа с четырьмя засечками изображен на рис. 1.24, *б*.

Оптические системы приборов преобразуют равномерное вращение мгновенного поля зрения ( $3 \times 3^\circ$ ) по конусу в число радиальных засечек ИК гори-



*а*



*б*

**Рис. 1.24. Датчики вертикали Земли секущего типа: *а* – с восемью засечками; *б* – с четырьмя засечками**

зонты Земли, равное четырём.

Малые габариты и масса достигаются благодаря использованию микро-двигателя, легких металлических зеркал, современной элементной базы и микропроцессора. Приборы выполнены в негерметичном корпусе.

Для достижения высокой точности измерения используется автоматическая компенсация методических погрешностей.

Для сравнения на фотографии (рис. 1.25) изображены датчики вертикали «разных поколений». Слева (рис. 1.25, а) – датчик вертикали и блок электро-



а

б

Рис. 1.25. Датчики вертикали спутника «Электро» (а) и малого космического аппарата (б)

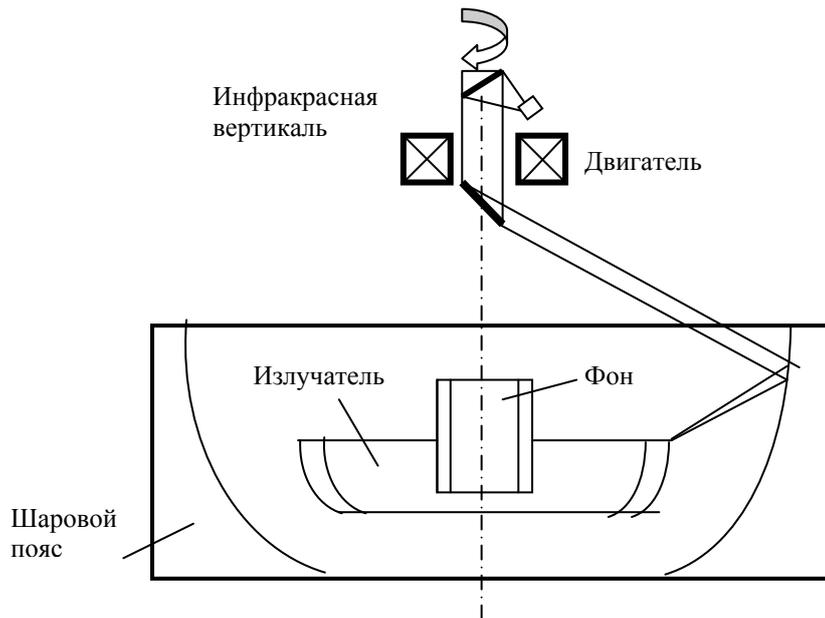


Рис. 1.26. Схема имитатора

ники спутника «Электро», справа (рис. 1.25, б) – датчик вертикали малого космического аппарата.

Для проверки инфракрасных построителей местной вертикали в условиях приближенных к полётным, используются *имитаторы инфракрасного излучения Земли*. Имитатор излучения должен имитировать угловой размер Земли (угол  $2\beta$ ) и рабочий спектральный диапазон.

Имитатор (рис. 1.26) состоит из шарового зеркального пояса, в фокальной поверхности которого помещен излучатель. Это обычный нагреватель мощностью 25 – 30 Вт. Элементы его кромки, находящейся в фокусе, излучают поток, который, отразившись от зеркальной сферы, становится параллельным (тем самым имитируется удаленность прибора от Земли) и попадает на сканирующее зеркало под нужным углом (тем самым имитируется угловой размер Земли с высоты орбиты). Располагающееся внутри излучателя устройство имитирует реальный фон, а разница температур излучателя и фона создает контраст, соответствующий реальному излучению.

В имитаторе предусмотрен поворотный стол, на который устанавливается прибор, а также устройство для его наклона, имитирующее отклонения по крену и тангажу.

## 1.6. Датчики Солнца

Солнце является мощным источником излучения, что позволяет создавать простые и надежные оптико-электронные приборы для ориентации космического аппарата. Средний угловой размер Солнца составляет  $\sim 32'$ . Для датчиков Солнца используется видимый спектральный диапазон.

Датчик Солнца может обеспечить ориентацию одной оси космического аппарата на Солнце. Направление этой оси совпадает с осью чувствительности прибора. В сочетании с датчиком вертикали Земли датчики Солнца обеспечивают режим солнечно-земной ориентации (т. е. ориентацию двух осей космического аппарата), когда ось рыскания (курса) направлена по местной вертикали, а ось тангажа находится в плоскости солнечного меридиана.

Системы ориентации по Солнцу строятся по двухотсчетной схеме, которая включает «поисковые», «грубые» и «точные» датчики Солнца. «Поисковые» и «грубые» датчики Солнца предназначены для первоначального поиска, захвата и приведения изображения Солнца в поле зрения точного датчика. Поисковые и грубые датчики Солнца должны иметь большое поле обзора, а их точность может быть относительно невысокой. Конструктивно «грубые» и «точные» датчики Солнца могут быть оформлены в виде одного прибора или в виде отдельных приборов, работающих последовательно или параллельно.

Датчик Солнца, в котором реализован компенсационный метод измерения, получил название «солнечного координатора». По принципу действия солнечный координатор относится к классу оптико-электромеханических приборов. Оптическая система солнечного координатора (собственно датчик Солн-

ца) установлена в двухступенном кардановом подвесе. Внутренняя и внешняя рамки карданового подвеса поворачиваются быстродействующими следящими приводами. Информацией для работы приводов служат угловые отклонения оптической оси прибора от направления на Солнце. Согласованное движение двух приводов обеспечивает непрерывное наведение оптической оси прибора на Солнце с высокой точностью. Компенсационный метод измерения позволяет использовать датчики с узкой зоной линейности, но обладающие высокой разрешающей способностью. *Солнечный координатор* осуществляет первоначальный поиск и «захват» Солнца, а затем плавный переход в режим слежения за Солнцем. Информация об угловом положении космического аппарата относительно Солнца считывается с двух датчиков углов, установленных на рамках карданового подвеса.

Солнечные координаторы успешно работали в системе ориентации геостационарного метеорологического спутника «Электро» [19]. Функциональная схема одного канала следящей системы солнечного координатора изо-

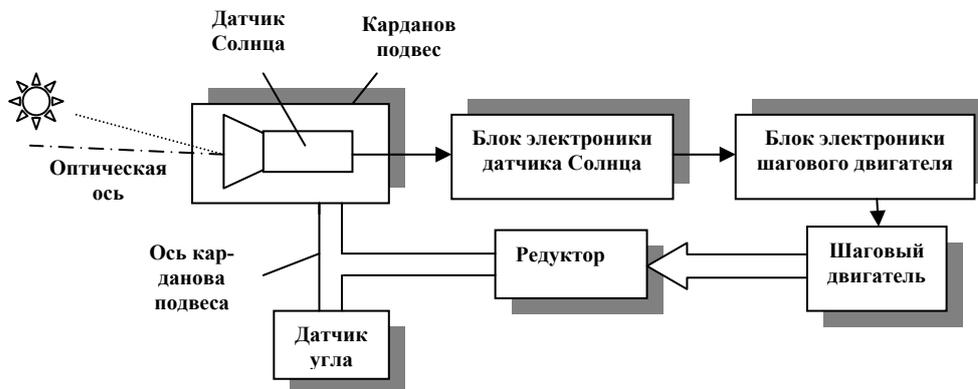


Рис. 1.27. Функциональная схема солнечного координатора

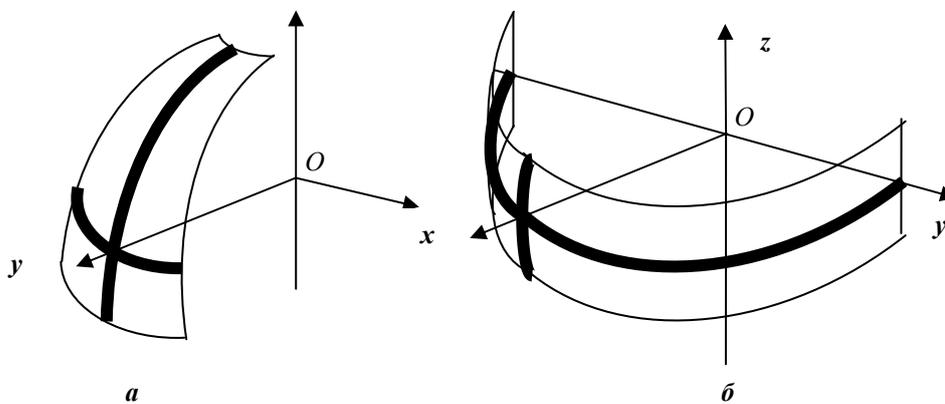


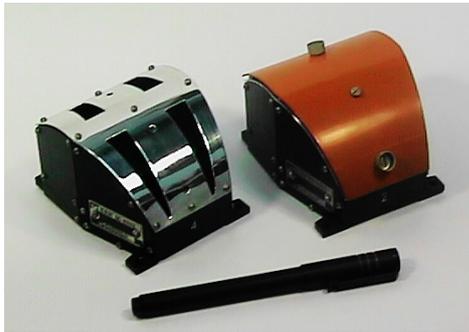
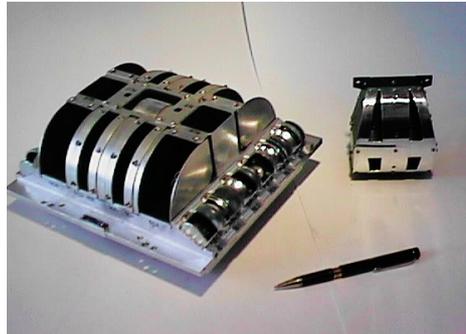
Рис. 1.28. Поле обзора датчика Солнца: *а* – для малого космического аппарата; *б* – для геостационарного космического аппарата

бражена на рис. 1.27.

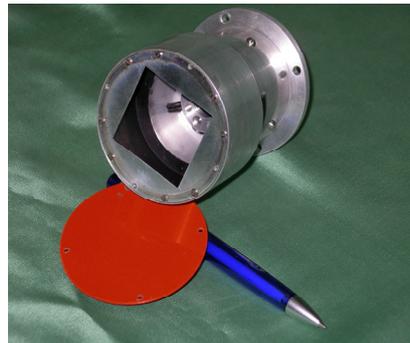
Привод рамки карданового подвеса состоит из шагового электродвигателя и прецизионного редуктора с большим передаточным отношением. В блок электроники шагового двигателя входят преобразователь напряжения постоянного тока в частоту и схема коммутации. Измерение угловых отклонений рамок осуществляют индуктивные датчики, получившие название «редуктосинов». Цена младшего разряда редуктосина составляет  $2''$ .

Солнечный координатор определяет углы ориентации космического аппарата с погрешностью не более  $1'$ .

Если в системе управления предусматривается использование астродатчиков, обеспечивающих высокую точность ориентации, то датчикам Солнца отводится вспомогательная роль. Точность датчиков Солнца  $1 - 3^\circ$  достаточна для подключения к системе ориентации *звездных датчиков*, имеющих поля обзора порядка  $10 \times 10^\circ$ . В то же время *датчик Солнца* должен быть надежным и иметь широкое поле зрения. Таким требованиям отвечает прибор щелевого типа, созданный в ФГУП «НПП ВНИИЭМ». Датчик с полем обзора  $116 \times 42^\circ$  формирует четыре двухпозиционных сигнала наличия Солнца в четырех зонах обзора. Поле обзора относительно связанной системы координат датчика *Охуз* схематично показано на рис. 1.28, *а*.

*а**б*

**Рис. 1.29. Датчики Солнца:**  
*а* – щелевого типа; *б* – щелевого типа с широким полем обзора; *в* – с координатным фотодиодом

*в*

Одновременная выдача сигналов из всех четырех зон обзора свидетельствует о том, что Солнце находится внутри зоны размером  $2 \times 2^\circ$ .

В качестве чувствительных элементов датчика использованы кремниевые фотодиоды, а проверку их функционирования осуществляют встроенные имитаторы излучения – светодиоды.

Поле обзора размером  $20 \times 180^\circ$  датчика Солнца для геостационарного космического аппарата относительно связанной с датчиком системы координат *Охуз* изображено на рис. 1.28, б).

Общий вид датчиков Солнца щелевого типа изображен на рис. 1.29, а). Поля обзора правого датчика закрыты технологической крышкой.

Датчики формируют релейные сигналы наличия Солнца в заданных полях обзора.

На космическом аппарате «Электро» наряду с солнечным координатором использовался датчик Солнца щелевого типа с широким полем обзора (рис. 1.29, б) разработки ФГУП НИИЭМ (г. Истра). За счёт многочисленных «щелей» информация об угловом положении Солнца выдаётся в виде двоичного кода.

В датчиках Солнца может использоваться координатный фотодиод обеспечивающий выдачу сигнала, пропорционального углу отклонения оси датчика от направления на Солнце. Датчик с полем зрения  $20 \times 20^\circ$  и точностью  $1'$  изображён на рис. 1.29, в).

### 1.7. ЗВЕЗДНЫЕ ДАТЧИКИ

Проектирование оптических приборов астроориентации развивается в двух направлениях:

- создание приборов для ориентации по одиночным звездам (например датчики Полярной звезды и Канопуса);
- создание приборов для ориентации по звездным участкам.

*Звёздные датчики* обеспечивают построение на борту инерциальной системы координат.

Рассмотрим звездный датчик, представляющий второе направление и называемый разработчиками (ИКИ РАН) «звездной системой ориентации» или «блоком определения координат звёзд» (БОКЗ).

Углы ориентации космического аппарата определяются путем сравнения изображения участка звездного неба, наблюдаемого в поле зрения датчика, с картиной звездного неба, хранящейся в памяти БЦВМ.

В состав датчика входят две телевизионные звездные камеры (ТЗК), расположенные под углом, устройство сжатия видеоинформации, интерфейс и БЦВМ (рис. 1.30).



Рис. 1.30. Функциональная схема звездного датчика

Телевизионная звездная камера состоит из оптической системы, фотодатчика на основе прибора с зарядовой связью (ПЗС) и видеотракта (рис. 1.31). Оптическая система проектирует изображение участка звездного неба на плоскость фотодатчика. В нем световой сигнал оптической системы преобразуется в электрический. Видеотракт осуществляет усиление и аналого-цифровую обработку сигнала. Управление ПЗС осуществляется большой интегральной схемой (БИС).

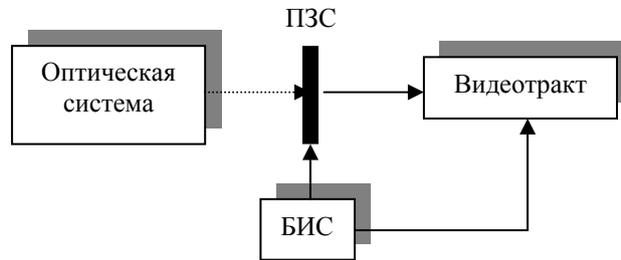


Рис. 1.31. Функциональная схема ТЗК

Общий вид телевизионной звёздной камеры изображён на рис. 1.32. Объектив окружён блендой, защищающей датчик от фоновой засветки.

Положение оптической оси телевизионной камеры относительно наблюдаемого участка звездного неба определяется двумя углами. Этого недостаточно для вычисления трех углов ориентации космического аппарата. Поэтому в состав системы входят две телевизионные камеры. Некоторые астродатчики способны определять и третий угол – угол поворота вокруг оптической оси, однако точность измерения этого угла на порядок ниже.

Работа звездного датчика носит циклический характер. Каждый цикл (секанс) состоит из следующих операций:

- экспонирование фотодатчика;
- считывание видеосигнала с фотодатчика;
- выделение из видеосигнала информации о звездах;
- вычисление центров яркости звезд;
- распознавание зарегистрированных звезд в бортовом каталоге;
- вычисление двух углов ориентации оптической оси каждой телевизионной звездной камеры.

Время экспонирования, необходимое для «фотографирования» звёзд, накладывает ограничения на допустимую угловую скорость космического аппарата ( $0,15 - 0,5$  °/с).

При вычислении углов ориентации космического аппарата учитывается угловое положение теле-



Рис. 1.32. Телевизионная звёздная камера

визионных звездных камер относительно связанных осей космического аппарата.

ПЗС представляет собой матрицу с числом элементов  $512 \times 512$  и размером элемента по диагонали 30 мкм. Прибор выполнен по технологии с объемным переносом заряда.

В течение времени экспозиции идет накопление зарядов в элементах матрицы, на которые попали изображения звезд. Картина участка звездного неба отображается в матрице в виде потенциального рельефа. Этот рельеф построчно сдвигается из матрицы в регистр, а из регистра построчно выдается в выходное устройство.

Число звезд в каталоге выбирается из условия, чтобы в поле зрения телевизионной звездной камеры ( $5 \times 7^\circ$ ) попадало не менее трех звезд. В БЦВМ хранится звездный каталог из 2000 – 3000 звезд и осуществляется обработка поступающей информации: вычисляются центры яркости изображений звезд, углы ориентации телевизионной звездной камеры и углы ориентации космического аппарата относительно базовой системы координат. В БЦВМ заносится информация о неисправных элементах матрицы.

Теоретический предел точности звездной системы ориентации лежит на уровне точности используемого каталога и составляет на сегодня величину около  $0,1''$ . Современные приборы имеют массу порядка 3,5 кг, энергопотребление не превышает 11 Вт. Совершенствование приборов направлено на снижение массы, энергопотребления, увеличение допустимой угловой скорости космического аппарата и помехозащищенности.

## 1.8. ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ ДАТЧИКИ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

Для измерения угловой скорости космического аппарата применяется двухстепенный гироскоп с «электрической» пружиной, которая создает противодействующий момент, пропорциональный отклонению рамки от исходного положения и обеспечивает гашение упругих колебаний [7, 53, 85].

Расчетная схема датчика угловой скорости (ДУС), поясняющая принцип его работы, изображена на рис. 1.33.

Ротор  $I$  с моментом инерции  $J_p$  вращается с большой скоростью  $\Omega$ , создавая постоянный по величине кинетический момент  $G = J_p \Omega$ . Подшипники ротора установлены в подвижной рамке  $2$ . Вместе с гиромотором она образует гиروزел. Ось  $3$  рамки (гиروزла) вращается в подшипниках  $4$ , неподвижно закрепленных в корпусе космического аппарата. Две степени свободы движения связаны с вращением ротора и поворотами гиروزла.

Введем  $Oxyz$  – оси, связанные с космическим аппаратом, и  $Ox_p y_p z_p$  – оси, связанные с рамкой гироскопа (рис. 1.34). Вектор кинетического момента ротора  $G$  направлен по оси  $Oz_p$ . Положение рамки гироскопа и вектора  $G$  относительно корпуса космического аппарата определяется углом  $\beta$ , который появляется при поворотах рамки вокруг оси  $Ox_p$ .

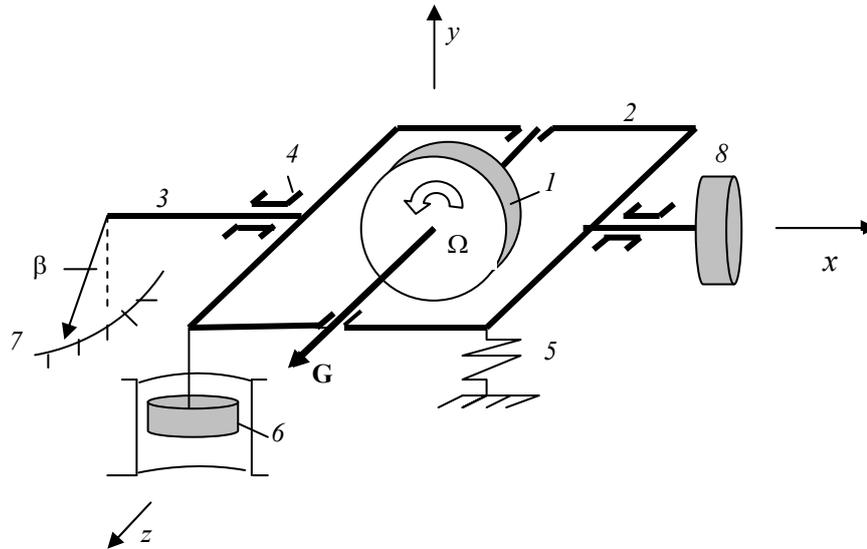


Рис. 1.33. Расчетная схема ДУС

Пусть корпус космического аппарата, а вместе с ним прибор, вращаются со скоростью  $\psi'$  по часовой стрелке, если смотреть с конца оси  $Oy$ . Вектор угловой скорости вращения  $\psi'$  направлен по оси  $-Oy$ . На рамку гироскопа действует гироскопический момент

$$\mathbf{M}_g = -\psi' \times \mathbf{G}.$$

Вектор гироскопического момента направлен по оси  $Ox_p$  и численно равен

$$M_g = G\psi' \cos\beta.$$

Гироскопический момент стремится повернуть рамку с ротором вокруг оси  $Ox$ . Повороту рамки препятствует упругая связь 5, вязкое трение демпфера 6 и сухое трение в подшипниках гиросузда.

Момент сопротивления  $M_c$  складывается из упругого момента  $M_y$ , момента

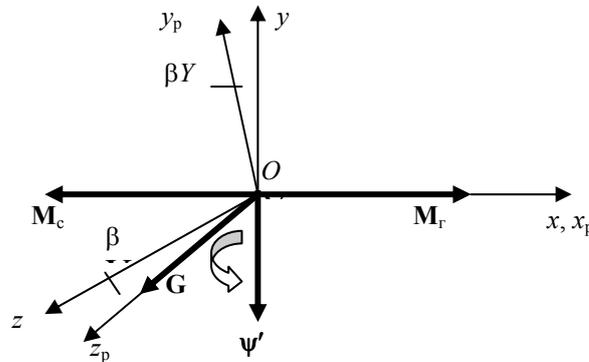


Рис. 1.34. Системы координат

вязкости  $M_v$  и момента сухого трения  $M_{тр}$

$$M_c = M_y + M_v + M_{тр}.$$

Упругий момент пропорционален угловому отклонению рамки

$$M_y = c\beta,$$

где  $c$  – угловая жесткость пружины.

Вязкий момент пропорционален скорости поворота рамки

$$M_v = h\beta',$$

где  $h$  – коэффициент вязкости.

Момент сухого трения зависит от знака скорости

$$M_{тр} = M_T \text{sign}\beta'.$$

Момент сопротивления уравнивает гироскопический момент, т. е. вектор  $M_c$  направлен против вектора  $M_T$  и по величине равен

$$M_c = c\beta + h\beta' + M_T \text{sign}\beta'.$$

В переходных режимах движение рамки гироскопа происходит под действием разности моментов  $M_T - M_c$ . Угловое ускорение рамки  $\beta''$  пропорционально этой разности

$$\beta'' = (M_T - M_c)/J, \quad (1.2)$$

где  $J$  – момент инерции рамки вместе с ротором относительно оси вращения  $Ox_p$ .

Подставляя в (1.2) выражения для  $M_T$  и  $M_c$ , получим уравнение углового движения рамки вокруг оси  $Ox$

$$J\beta'' + h\beta' + c\beta + M_T \text{sign}\beta' = G\psi' \cos\beta. \quad (1.3)$$

При отсутствии сухого трения ( $M_T = 0$ ) и при малых углах  $\beta$  ( $\cos\beta \cong 1$ ) уравнение (1.3) превращается в линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$J\beta'' + h\beta' + c\beta = G\psi'. \quad (1.4)$$

Полагая начальные условия нулевыми и применяя к уравнению (1.4) преобразование Лапласа, получим передаточную функцию гироскопического датчика угловой скорости

$$W_{\beta}(s) = \beta(s) / \psi'(s) = G / (Js^2 + hs + c).$$

Ее можно записать в стандартной форме

$$W_{\beta}(s) = k / (T^2 s^2 + 2T\xi s + c),$$

где  $k = G/c$  – коэффициент преобразования,  $T = \sqrt{J/c}$  – постоянная времени,  $\xi = h/2\sqrt{Jc}$  – коэффициент демпфирования упругих колебаний.

При постоянной угловой скорости  $\psi' = \text{const}$  после окончания переходных процессов получим

$$\beta = k \psi' = (G/c)\psi'. \quad (1.5)$$

Угловое отклонение рамки  $\beta$  пропорционально угловой скорости космического аппарата. Датчик угла  $\beta$ , установленный на оси рамки, измеряет угол  $\beta$  и, следовательно, в известном масштабе скорость космического аппарата

$$u = k_{\text{ДУ}}\beta = k_{\text{ДУ}}k\psi',$$

где  $u$  – выходной сигнал датчика угла,  $k_{\text{ДУ}}$  – коэффициент преобразования датчика.

Если проградуировать датчик в тех же единицах, что и измеряемая угловая скорость ( $[u] = [\psi'] = \text{рад/с}$ ), то  $k_{\text{ДУ}}k = 1$ . Передаточная функция датчика угловой скорости по отношению к выходному сигналу датчика угла примет вид

$$W(s) = u(s) / \psi'(s) = 1 / (T^2 s^2 + 2T\xi s + c)$$

или в другой стандартной форме

$$W(s) = v^2 / (s^2 + 2\xi v s + v^2),$$

где  $v = 1/T = \sqrt{c/J}$  – собственная частота угловых колебаний датчика угловой скорости. Она определяет полосу пропускания прибора.

Порог чувствительности  $\psi'_{\text{min}}$  – минимальная скорость космического аппарата, на которую реагирует датчик угловой скорости, зависит от момента сухого трения на оси рамки. Чтобы рамка пришла в движение, должно выполняться условие

$$G\psi'_{\text{min}} \cos\beta > M_{\text{т}}.$$

При  $\beta \approx 0$

$$\psi'_{\text{min}} > M_{\text{т}}/G.$$

Отсюда следует, что для повышения чувствительности прибора необходимо уменьшать момент сухого трения или увеличивать кинетический момент ротора. Увеличивать кинетический момент ротора  $G = J_p \Omega$  можно за счет увеличения его момента инерции или скорости вращения. В первом случае возрастает масса прибора, во втором – его энергопотребление. Поэтому основной путь повышения чувствительности связан с уменьшением момента сухого трения.

Рассмотрим частотные свойства датчика угловой скорости. Комплексный коэффициент передачи получим из передаточной функции датчика угловой скорости подстановкой  $s = j\omega$ :

$$W(j\omega) = R(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

где модуль  $R(\omega)$  и аргумент  $\varphi(\omega)$  вычисляются по формулам

$$R(\omega) = [(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2]^{-1/2};$$

$$\varphi = -\text{arctg}(2T\xi\omega)/(1 - T^2\omega^2).$$

Логарифмические частотные характеристики датчика угловой скорости –

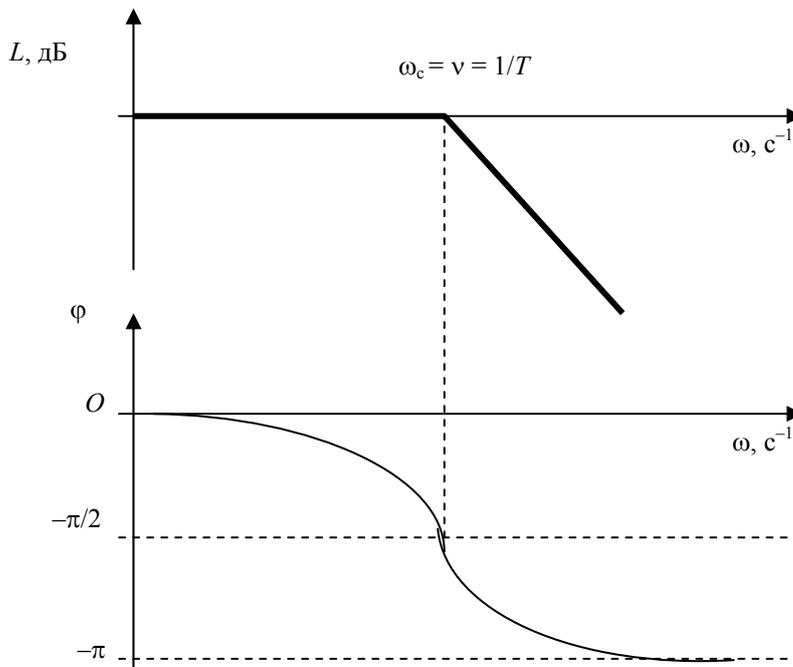


Рис. 1.35. Логарифмические частотные характеристики

амплитудная и фазовая, изображены на рис. 1.35. Для построения амплитудной характеристики используется модуль комплексного коэффициента передачи, выраженный в дБ:

$$L(\omega) = 20 \lg R(\omega) = -20 \lg [(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2]^{1/2}.$$

Второй участок асимптотической характеристики имеет наклон 40 дБ/дек. На частоте среза  $\omega_c = \nu = 1/T$ , где сопрягаются две асимптоты, фазовый сдвиг между входной и выходной величинами достигает  $-\pi/2$ .

Скорость космического аппарата является функцией времени  $\psi' = \psi'(t)$  и характеризуется некоторым спектром частот. Чтобы измерения датчика были точными, его собственная частота  $\nu$ , определяющая полосу пропускания, должна быть значительно больше допустимых частот изменения угловой скорости космического аппарата.

Измерение скорости космического аппарата связано с поворотом рамки гиروزла и деформацией пружины 5. Для повышения точности измерений, как показывает формула (1.5), следует уменьшать жесткость пружины, поскольку в этом случае при малом изменении скорости  $\psi'$  будет получен достаточно большой для измерения угол  $\beta$ . Однако уменьшение жесткости снижает собственную частоту  $\nu = \sqrt{c/J}$  и сокращает полосу пропускания датчика угловой скорости. Чувствительность и быстродействие прибора предъявляют к жесткости пружины противоречивые требования: для повышения чувствительности жесткость пружины следует уменьшать, для повышения быстродействия ее нужно увеличивать.

Это противоречие позволяет сгладить компенсационный способ измерения угла поворота рамки. При таком способе упругий и вязкий моменты создаются не пружиной и поршнем, а моментным датчиком  $\delta$ , установленным на оси рамки. При помощи моментного датчика, уравнивающего действующий на рамку гироскопический момент, удастся измерять малые углы  $\beta$ , что открывает возможность увеличения жесткости «электрической пружины»

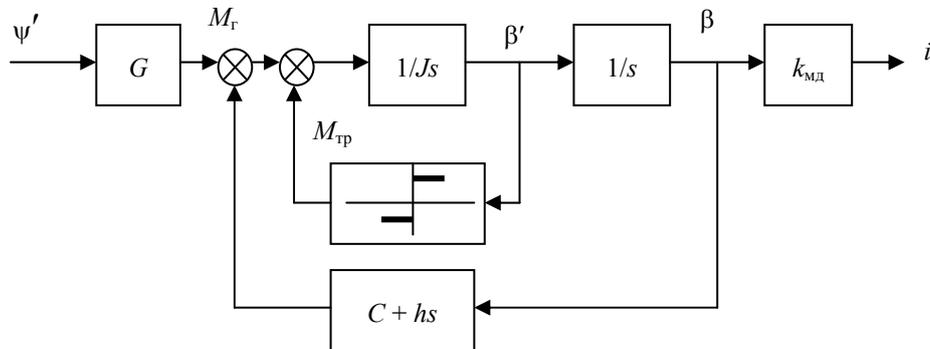


Рис. 1.36. Структурная схема датчика угловой скорости

для расширения полосы пропускания датчика угловой скорости.

Структурная схема прибора с моментным датчиком изображена на рис. 1.36. Скорость космического аппарата измеряется здесь не по углу  $\beta$ , который может быть мал, а по величине тока  $i$ , протекающего в моментном датчике при компенсации гироскопического момента.

Передаточная функция датчика угловой скорости с «электрической пружиной»:

$$W(s) = i(s) / \psi'(s) = k_1 / (T^2 s^2 + 2T\xi s + c),$$

где  $k_1 = Gk_{\text{мд}}/c$ ,  $k_{\text{мд}}$  – коэффициент преобразования моментного датчика.

Если проградуировать измеритель тока на выходе моментного датчика в тех же единицах, что и  $\psi'([\psi'] = [i] = \text{рад}/\text{с})$ , то  $k_1 = 1$ .

Важную роль в системе играет вязкий момент, пропорциональный угловой скорости рамки ( $h\beta'$ ). При отсутствии этого момента колебания рамки были бы незатухающими ( $\xi = 0$ ). Выбором коэффициента вязкости  $h$  добиваются необходимого качества переходных процессов. Наименьшее время переходных процессов в линейной системе второго порядка имеет место при  $\xi = 0,707$ . Вязкость и жесткость «электрической пружины» связаны между собой соотношением

$$h = 2\xi \sqrt{c/J},$$

из которого следует, что для сохранения  $\xi = \text{const} = 0,707$  при увеличении жесткости пружины нужно соответствующим образом увеличивать коэффициент вязкости.

Недостаток гироскопического датчика угловой скорости – наличие быстро вращающихся частей, что снижает надежность и ресурс подшипниковых узлов. Существенно повысить ресурс прибора позволяет газодинамический подвес ротора.

Современные гироскопические приборы измеряют угловые скорости в широком диапазоне от 0,001 до 5 град/с, имеют полосу пропускания до 5 Гц.

На малых космических аппаратах предполагается использовать гироскопический датчик, одновременно измеряющий угловые скорости относительно двух ортогональных осей космического аппарата. Установкой трех датчиков обеспечивается измерение скорости относительно трех осей космического аппарата при полном дублировании измерительных каналов.

Датчик угловой скорости выполнен на базе трехстепенного астатического гироскопа в кардановом подвесе. В отличие от двухстепенного (см. рис. 1.33) такой гироскоп имеет дополнительную рамку, в которой устанавливается ось 3. За счет карданового подвеса с двумя рамками (внутренней и внешней) трехстепенный гироскоп обладает тремя степенями свободы движения отно-

сительно основания и может вращаться вокруг трех осей. Внешний вид гироскопа ГПА-Л2-2 массой 0,45 кг изображен на фотографии (рис. 1.37).

В астатическом (уравновешенном) гироскопе сила тяжести и силы инерции от переносных ускорений не создают моментов относительно осей подвеса, т. е. ось собственного вращения ротора, ось внутренней рамки и ось внешней рамки пересекаются в одной точке, совпадающей с центром масс гироскопа.



**Рис. 1.37. Гироскоп ГПА-Л2-2**

Гироузел выполнен в виде сферического поплавка с гиромотором, вращающемся на газодинамической опоре. По двум осям чувствительности гироскопа установлены прецизионные датчики момента магнитоэлектрического типа и индукционные датчики угла. В конструкции прибора применены каменные опоры карданова подвеса со сферическими цапфами повышенной точности. Внутренняя полость корпуса заполнена фтороуглеродистой жидкостью, в которой взвешен гироузел. Основные детали выполнены из бериллия, применена индиевая герметизация корпуса. Эти особенности обеспечивают высокую точность и стабильность характеристик, большой ресурс гироскопа.

Технический паспорт гироскопа содержит десятки наименований параметров, которые необходимо контролировать, чтобы обеспечить высокую точность измерения и стабильность характеристик.

Помимо чувствительного элемента – гироскопа – в состав датчика угловой скорости входит блок электроники, обеспечивающий питание гироскопа и его взаимодействие с внешними устройствами. Двухконтурный усилитель обратной связи блока электроники играет роль «электрической пружины» и формирует выходные сигналы.

Углы отклонения рамок подвеса  $\alpha$  и  $\beta$  пропорциональны угловым скоростям  $\omega_1, \omega_2$ , действующим по измерительным осям прибора. При использовании компенсационного метода измерения о составляющих скорости судят по величине токов, протекающих в двух датчиках моментов.

Периферийный адаптер осуществляет двухстороннюю связь с вычислительной системой по интерфейсу типа RS-485.

Конструктивно датчик угловой скорости выполнен в виде единого моноблока массой 2,5 кг. Диапазон измерения угловой скорости: номинальный – до 0,5°/с, расширенный – до 2°/с. Цена младшего разряда  $2 \cdot 10^{-3}$  град/ч. Систематическое значение нулевого сигнала не более 0,3 град/ч, шумовая составляющая не более 0,1 град/ч.

Возможно измерение угловых скоростей с использованием других физических принципов. Совершенствуются лазерные гироскопы.

## 1.9. ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ОРГАНЫ СИСТЕМ ОРИЕНТАЦИИ

*Исполнительные органы* создают управляющие моменты, необходимые для ориентации космических аппаратов. Для создания управляющих моментов используется взаимодействие космического аппарата с окружающей средой либо реактивный принцип управления.

В качестве устройств, относящихся к первому типу, можно назвать исполнительные органы, использующие магнитное поле Земли [60]. Такие исполнительные органы иногда называют моментными магнитоприводами.

На плоский контур тока площадью  $S$ , помещенный в магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}$ , действует момент сил

$$\mathbf{M} = IS(\mathbf{n} \times \mathbf{B}),$$

где  $I$  – сила тока;  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к контуру.

Величина  $P_m = IS$  называется магнитным моментом контура. Направление вектора  $\mathbf{P}_m$  определяется правилом правого винта – оно совпадает с поступательным перемещением винта, когда его головка вращается по направлению тока в контуре. Магнитный момент нескольких контуров равен векторной сумме их магнитных моментов.

*Магнитопривод* представляет собой электрическую катушку с ферромагнитным сердечником. Магнитопривод с сердечником длиной 0,8 м метеорологического космического аппарата «Метеор» создает магнитный момент  $560 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ . Магнитопривод массой 1,5 кг малого космического аппарата создает магнитный момент  $100 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ .

Обозначим через  $\mathbf{P}$  магнитный момент всех катушек, установленных на космическом аппарате.

Взаимодействие системы катушек с магнитным полем Земли приводит к возникновению управляющего момента

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \times \mathbf{B},$$

где  $\mathbf{B}$  – вектор геомагнитной индукции.

Чтобы создавать требуемые управляющие моменты, необходимо измерять компоненты вектора  $\mathbf{B}$  (для этого на космическом аппарате устанавливаются магнитометры) и управлять вектором  $\mathbf{P}$ , регулируя ток в катушках. Магнитным исполнительным органам присущ принципиальный недостаток – невозможность создания управляющих моментов в направлении, параллельном вектору  $\mathbf{B}$ .

*Реактивные исполнительные органы*, способные работать при отсутствии полезного взаимодействия космического аппарата с окружающей средой, получили наибольшее распространение [7]. Реактивный принцип управления базируется на законе сохранения момента количества движения системы тел при отсутствии внешних моментов.

Исполнительные органы, реализующие реактивный принцип управления, делятся на два больших класса:

- реактивные двигатели, создающие реактивные силы;
- электромеханические (инерционные) исполнительные органы, создающие реактивные моменты.

*Реактивные двигатели (РД)* создают тягу за счет расхода реактивного топлива.

Если линия действия тяги не проходит через центр масс космического аппарата, возникает момент силы тяги, который может использоваться для управления угловым положением космического аппарата (рис. 1.38).

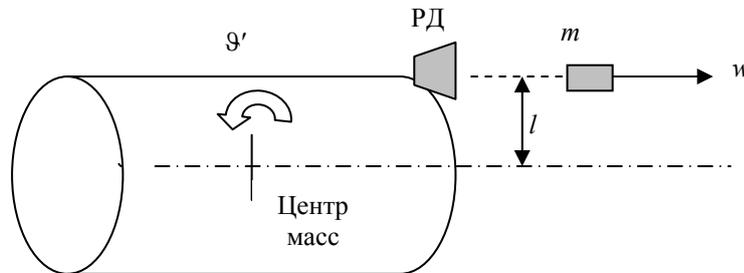


Рис. 1.38. Момент силы тяги

Пусть в начальный момент времени угловая скорость космического аппарата с моментом инерции  $I$  была равна нулю. Затем включается реактивный двигатель и за время его работы сбрасывается масса  $m$  со скоростью  $w$ . Из закона сохранения момента количества движения для этого случая

$$I\omega' - lmw = 0$$

получим

$$\omega' = lmw / I,$$

где  $\omega'$  – угловая скорость космического аппарата относительно неподвижной системы отсчета после выключения двигателя,  $l$  – плечо тяги двигателя.

Включая и выключая реактивные двигатели, можно изменять угловую скорость и угловое положение космического аппарата.

Предположим теперь, что на космическом аппарате с моментом инерции  $J_{КА}$  установлена инерционная масса – реактивный маховик с моментом инерции  $J_M$  (рис. 1.39).

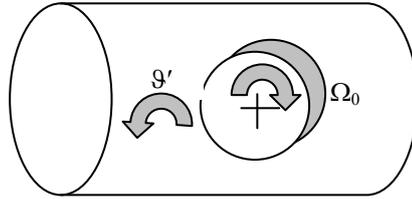


Рис. 1.39. Реактивный момент

Если разогнать маховик до скорости  $\Omega_0$  относительно неподвижной системы координат, то из закона сохранения момента количества движения

$$J_{КА} \vartheta' + J_M \Omega_0 = 0$$

получим

$$\vartheta' = -J_M \Omega_0 / J,$$

где  $\Omega = \Omega_0 - \vartheta'$  – скорость маховика относительно корпуса космического аппарата,  $J = J_{КА} + J_M$  – момент инерции космического аппарата в предположении, что маховик «вморожен» в его корпус. Регулируя скорость вращения маховика  $\Omega$ , можно изменять угловую скорость и угловое положение космического аппарата. Такой способ управления ориентацией был предложен К.Э. Циолковским.

Реактивные двигатели и маховики, реализующие реактивный принцип управления, имеют существенные различия. Реактивные двигатели создают реактивную тягу, используя для работы топливо, запасы которого на борту ограничены. Инерционные вращающиеся массы создают реактивный момент, используя электрическую энергию, которую вырабатывают солнечные батареи.

### 1.10. РЕАКТИВНЫЕ ДВИГАТЕЛИ

*Реактивные двигатели*, отбрасывая холодный или горячий газ через сопло в космическое пространство, создают реактивную силу. Тяга реактивного двигателя  $P$  пропорциональна скорости истечения газа  $w$  и секунднему расходу  $m_c$  отбрасываемой массы

$$P = m_c w.$$

Если линия действия силы не проходит через центр масс космического аппарата, возникает вращающий момент, при помощи которого осуществляется поворот космического аппарата в пространстве.

Важной технической характеристикой реактивного двигателя является удельный импульс, который находится как отношение импульса тяги за время  $\Delta t$  к весовому расходу топлива (рабочего тела)  $\Delta G$  за это же время

$$q = P\Delta t/\Delta G.$$

Поскольку  $\Delta G = G_c\Delta t$  и  $G_c = m_c g$ , где  $G_c$  – секундный весовой расход топлива,  $g$  – ускорение силы тяжести, то

$$q = P / G_c = w/g.$$

Удельный импульс измеряется в секундах и характеризует экономичность реактивного двигателя. Повышение удельного импульса, связанное с увеличением скорости истечения, способствует получению заданного импульса тяги с меньшими затратами топлива.

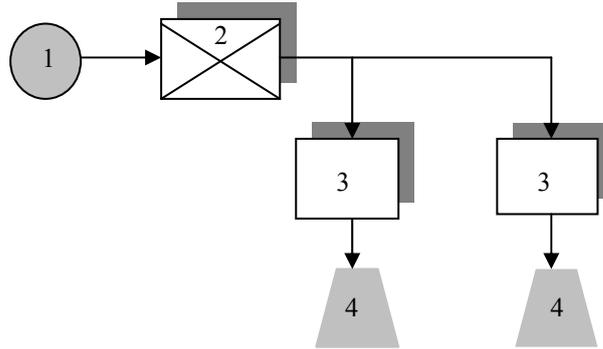


Рис. 1.40. Схема реактивного двигателя на сжатом газе

В [74, 104] удельный импульс определяется как отношение импульса тяги за время  $\Delta t$  к массе топлива (рабочего тела)  $\Delta m$  за это же время

$$q = P\Delta t/\Delta m.$$

В этом случае удельный импульс имеет размерность  $(Н\cdot с)/кг = м/с$  и равен по величине скорости истечения  $w$ .

По принципу действия реактивные двигатели делятся на четыре группы [7, 53, 85]:

- струйные (газовые) сопла;
- однокомпонентные;
- жидкостные (двухкомпонентные);
- электрореактивные.

Схема реактивного двигателя, работающего на сжатом газе, изображена на рис. 1.40.

Сжатый газ (обычно азот) хранится в баллоне 1 под большим давлением. В редукторе 2 давление газа снижается до рабочего. Когда открывается элек-

тромагнитный клапан 3, газ, расширяясь, истекает через сопло Лавала 4. Такая система, простая по устройству, обладает низкой экономичностью.

В однокомпонентных реактивных двигателях (рис. 1.41) в качестве рабочего тела используются перекись водорода ( $H_2O_2$ ) или гидразин ( $N_2H_4$ ). Перед подачей в сопло перекись водорода поступает в дополнительную камеру 5 с катализатором – перманганатом натрия. Разложение перекиси сопровождается сильным нагревом. Продукты разложения – пары воды и кислород – поступают в сопло Лавала. Удельный импульс таких двигателей выше, чем у работающих на сжатом газе, и составляет 150 с для перекиси водорода [7] и 180 – 230 с для гидразина [74].

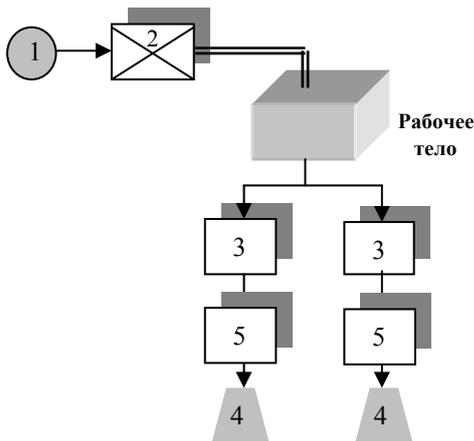


Рис. 1.41. Схема однокомпонентных реактивных двигателей

Горючее и окислитель из баков 4 и 5 по коллекторам 6 и 7 поступают к двигателям 8. Жидкости из баков вытесняются в магистрали нейтральными газами из баллонов 1. Они связаны с баками через клапаны 2 и редукторы 3. Удельный импульс двухкомпонентных двигателей достигает 300 – 400 с.

Управление ориентацией космических аппаратов сопровождается многократными чередованиями включений и выключений реактивных двигателей. Изменение тяги во время таких процессов изображено на рис. 1.43.

В момент  $t = 0$  поступает электрический сигнал на открытие клапана. Его фактическое открытие начинается несколько позже, в момент  $t_1$ , и заканчивается в момент  $t_2$ . С момента  $t_2$  клапан остается полностью открытым, тяга сохраняет постоянное значение  $P_0$ . В момент  $t_3$  подается сигнал на закрытие клапана. Исполнение команды происходит с некоторым запаздыванием – тяга начинает уменьшаться с момента времени  $t_4$ .

К моменту времени  $t_5$  клапан полностью закрыт, но продолжается истечение газа, находящегося за клапаном.

Высокими удельными импульсами обладают двухкомпонентные реактивные двигатели. Горючее и окислитель, которые хранятся отдельно, смешиваются в камере сгорания. Происходит воспламенение. Температура продуктов сгорания выше, чем у продуктов разложения.

Высокая температура способствует повышению скорости истечения. Система реактивных двигателей с использованием двухкомпонентного топлива изображена на рис. 1.42.

Горючее и окислитель из баков 4 и 5 по коллекторам 6 и 7 посту-

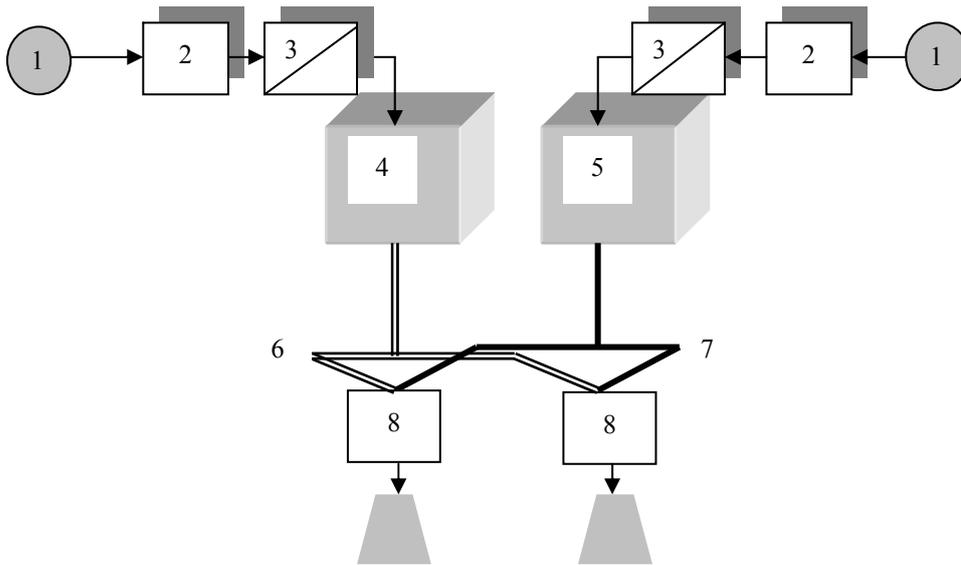


Рис. 1.42. Схема двухкомпонентных реактивных двигателей

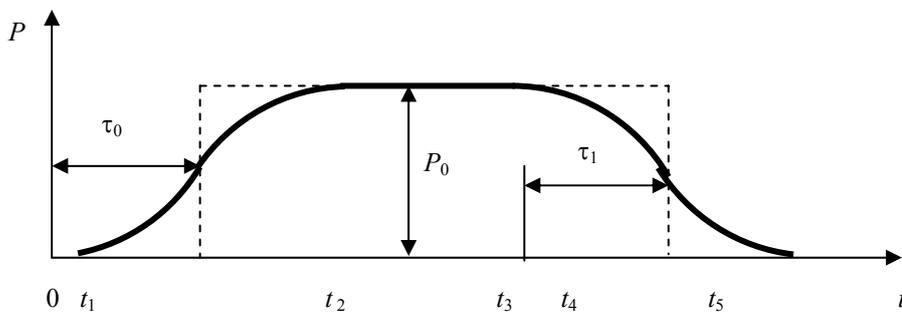


Рис. 1.43. Зависимость тяги реактивного двигателя от времени

Когда исследуется динамика ориентации космического аппарата, эту картину можно упростить, исходя из того, что на ход процессов влияет импульс тяги. Можно полагать, что тяга реактивного двигателя мгновенно достигает расчетного значения  $P_0$  и мгновенно падает до нуля, однако появление тяги запаздывает относительно появления электрического сигнала на величину  $\tau_0$ , а время запаздывания на закрытие равно  $\tau_1$ . Эта картина показана на рис. 1.43 пунктирной линией.

Если возникает необходимость уменьшения тяги по сравнению с  $P_0$ , применяется импульсный режим работы. Минимальная величина импульса  $P_0 \Delta t$  является одной из основных динамических характеристик реактивного двигателя. Чем меньше эта величина, тем большую точность стабилизации космического аппарата может

обеспечить система ориентации. Минимально возможный импульс увеличивается вместе с тягой двигателя. Поэтому с увеличением тяги точность ориентации может уменьшаться. Казалось бы, эффективным способом получения малого импульса является уменьшение тяги  $P_0$ . Однако при этом возникают другие трудности. Во время выполнения программных поворотов космического аппарата реактивные двигатели должны работать с максимальной нагрузкой. Уменьшение тяги приведет к увеличению времени угловых маневров космического аппарата. Поэтому, наряду с удельным импульсом, важными характеристиками реактивного двигателя являются как минимально возможный импульс (минимальная продолжительность включения), так и максимальная тяга. В совокупности эти величины определяют динамический диапазон возможностей системы.

Простые реактивные двигатели, использующие сжатый газ, применяются на небольших космических аппаратах с коротким сроком эксплуатации. На крупных космических аппаратах применяются более совершенные системы.

В последнее время для коррекции орбит и управления ориентацией начали применяться электрореактивные двигатели малой тяги с удельным импульсом более 1000 с [74]. Принцип их действия основан на использовании электрической энергии для разгона рабочего тела (нагрев, ионизация, ускорение электромагнитным полем и т. д.). В электронагревных двигателях с удельным импульсом 200 – 250 с рабочее тело (аммиак) проходит через специальный электронагреватель. Тяга таких двигателей не превышает нескольких граммов. В стационарных плазменных двигателях с высоким удельным импульсом (1000 – 1500 с) ионы ксенона ускоряются в электрическом поле с последующей нейтрализацией ионного пучка [104]. Корректирующие двигательные установки разработки ОКБ «Факел» изображены на рис. 1.44.

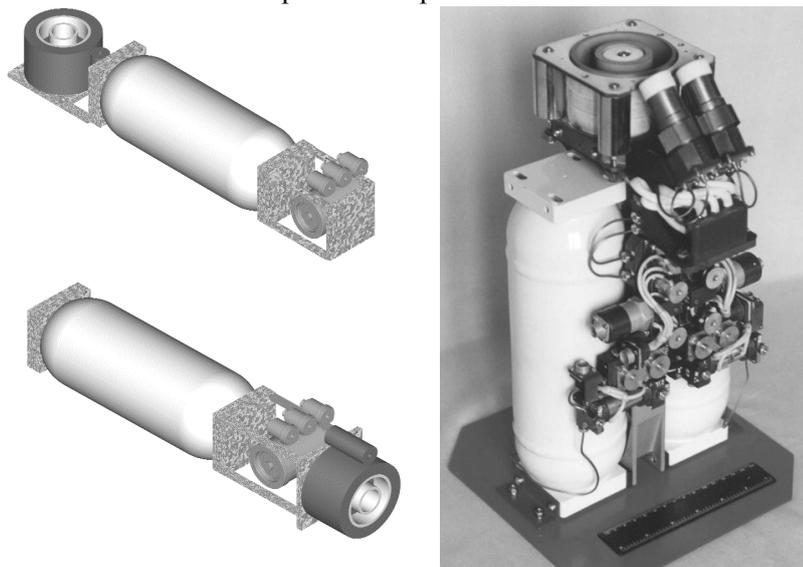


Рис. 1.44. Корректирующие двигательные установки

## 1.11. ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛИ-МАХОВИКИ

Электродвигатель-маховик представляет собой электродвигатель специальной конструкции, у которого инерционная нагрузка-маховик используется для управления угловым положением космических аппаратов (КА). Такое устройство иногда называют реактивным или инерционным маховиком. Двигатель-маховик (ДМ) обладает одной степенью свободы движения, связанной с его вращением вокруг оси симметрии (рис. 1.45). По классификации электромеханических исполнительных органов, предложенной в [85], это одностепенный силовой гироскоп или гиросtabilизатор.

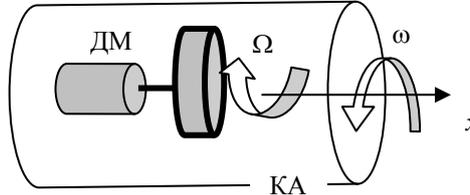


Рис. 1.45. Электродвигатель-маховик

Изменение кинетического момента маховика осуществляется регулированием числа оборотов электродвигателя. Вращение маховика с моментом инерции  $J_m$  под действием полного регулирующего момента статора электродвигателя  $M_m$  описывается уравнением

$$J_m (\Omega' + \omega') = M_m, \quad (1.6)$$

где  $\Omega$  – скорость маховика относительно корпуса космического аппарата;  $\omega$  – скорость вращения космического аппарата.

Если  $|\Omega'| \gg |\omega'|$ , что на практике всегда выполняется, то уравнение (1.6) упрощается

$$J_m \Omega' = M_m.$$

Момент  $M_m$  равен электромагнитному (активному) моменту  $M_3$  электродвигателя минус момент сопротивления  $M_{м.с}$  на оси маховика

$$M_m = M_3 - M_{м.с}.$$

Момент, равный по величине и противоположный по направлению, приложен к статору электродвигателя и через него к корпусу космического аппарата:

$$M = -M_m.$$

Полный момент  $M$ , действующий на космический аппарат, может быть представлен в виде управляющего момента  $M_y$  и момента сопротивления  $M_c$ :

$$M = M_y - M_c,$$

где  $M_y = -M_3$ ;  $M_c = -M_{м.с}$ .

Под действием момента  $M$  космический аппарат с моментом инерции  $I$

меняет свое угловое положение (угол  $\varphi$ ) в соответствии с уравнениями

$$I\dot{\omega}' = M, \quad \varphi' = \omega.$$

Управление моментом  $M$  осуществляется регулированием электромагнитного момента электродвигателя. Величина электромагнитного момента является функцией управляющего сигнала  $u$ , вычисляемого БЦВМ. Наряду с этим электромагнитный момент зависит от скорости вращения маховика  $\Omega$  (или числа оборотов вала электродвигателя), что является физическим свойством электромеханических исполнительных органов. То же относится и к моменту сопротивления  $M_{м.с.}$ , причем зависимость от  $\Omega$  обычно носит сложный нелинейный характер. В итоге, момент  $M$ , действующий на космический аппарат, оказывается сложной функцией командного сигнала  $u$  и угловой скорости  $\Omega$ :  $M = M(u, \Omega)$ .

Функциональные зависимости от угловой скорости вида  $M_M = M_M(\Omega)$ ;  $M_3 = M_3(\Omega)$ ,  $M_{м.с.} = M_{м.с.}(\Omega)$  называются моментными или механическими характеристиками двигателя-маховика. Типичная моментная характеристика двигателя-маховика изображена на рис. 1.46.

Пока угловая скорость мала, двигатель-маховик создает управляющий момент, близкий к максимальному. С ростом скорости вращения момент падает. При максимальной скорости  $\Omega = \Omega_{\max}$  (скорости насыщения) двигатель-маховик теряет способность создавать управляющий момент. Конкретный вид кривой  $M_M = M_M(\Omega)$  зависит от типа применяемого электродвигателя.

Чтобы вернуть двигатель-маховик в рабочее состояние, его нужно «разгрузить», т. е. затормозить. Во время торможения на космический аппарат (через статор электродвигателя) будет действовать возмущающий момент, противоположный по знаку тормозному моменту ротора. Внутренний возмущающий момент, нарушающий ориентацию космического аппарата, приходится парировать при помощи других исполнительных органов, включаемых на время торможения маховика.

Таким образом, насыщение по скорости является причиной организации дополнительного контура управления, осуществляющего разгрузку двигателя-маховика от накопленного кинетического момента. Исполнительными органами системы разгрузки могут быть устройства, способные

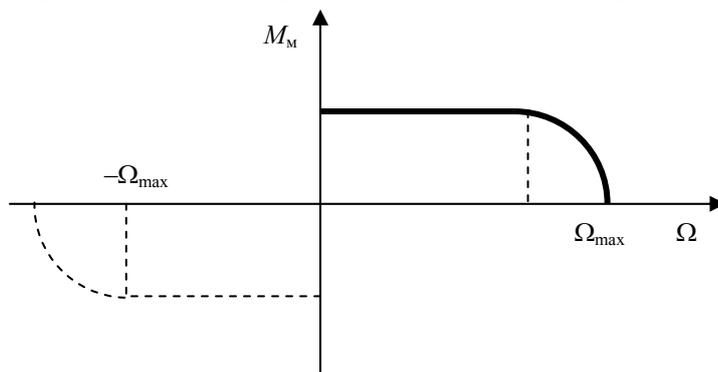


Рис. 1.46. Моментная характеристика электродвигателя-маховика

создавать внешние управляющие моменты (реактивные двигатели, магнитопроводы).

Для управления угловым положением космического аппарата относительно связанных осей  $Oxuz$  на борту устанавливаются три двигателя-маховика с осями вращения, параллельными  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

Следует отметить, что управляющий момент, создаваемый двигателем-маховиком, не зависит от места его установки на космическом аппарате. Необходимо только, чтобы ось вращения двигателя-маховика оставалась параллельной соответствующей оси космического аппарата.

Конструктивное исполнение двигателей-маховиков отличается большим разнообразием. Установка маховика в виде сплошного диска на выходном валу обычного электродвигателя имеет существенный недостаток – нерациональное использование инерционной массы, расположенной вблизи вала электродвигателя.

Этого недостатка удастся избежать при использовании обращенной конструкции электродвигателя, когда ротор находится снаружи статора, т. е. электродвигатель как бы встроен в маховик (рис. 1.47).

В первых электромеханических системах ориентации космических аппаратов «Метеор» и «Ресурс» использовались асинхронные электродвигатели-маховики с электронными преобразователями.

В дальнейшем была освоена серия исполнительных органов на основе управляемых бесконтактных двигателей постоянного тока [2].

Для ориентации малых космических аппаратов в НПП ВНИИЭМ разработан бесколлекторный двигатель-маховик постоянного тока с постоянными магнитами ДМ1-20. Ротор-маховик имеет форму обода. Обод состоит из внешнего и внутреннего магнитопроводов, соединенных экранирующей несущей перемычкой. В расточке внешнего магнитопровода расположены постоянные магниты, намагниченные в радиальном направлении. В зазоре между магнитами и внутренним магнитопроводом находится статор.

Обод закреплен на несущем основании, выполненном в виде тонкостенного алюминиевого конуса.

Такая конструкция позволяет использовать в качестве инерционной массы не только обод, но и активные части электродвигателя (магниты), что способствует минимизации удельных массовых характеристик двигателя-маховика.

Размеры обода оптимизированы с целью достижения минимально возможного отношения массы к моменту инерции.

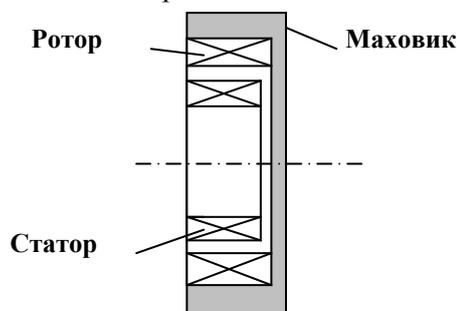


Рис. 1.47. Обращенная конструкция

Функциональная схема двигателя-маховика изображена на рис. 1.48.

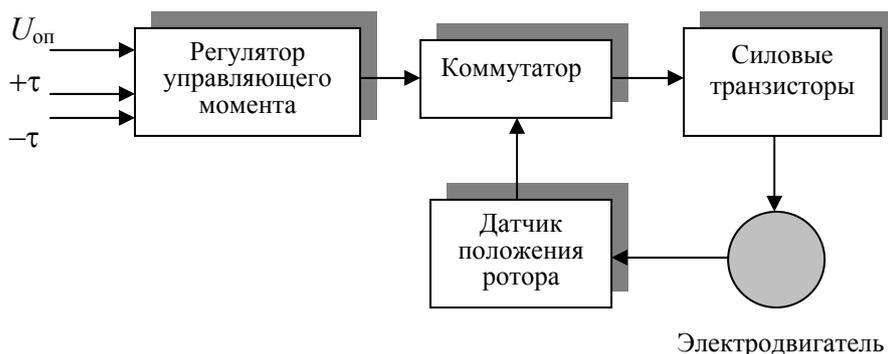


Рис. 1.48. Функциональная схема двигателя-маховика

Величины требуемых управляющих моментов двигателя-маховика формируются в виде ШИМ-сигналов, подаваемых на вход регулятора управляющего момента. ШИМ-сигнал характеризуется периодом  $T$  опорных импульсов  $U_{оп}$  и временным интервалом  $\tau$ . Величина  $\tau$  пропорциональна требуемому управляющему моменту. Для положительных и отрицательных моментов используются разные линии связи, при этом задержка информационных импульсов относительно опорных равна  $\tau$ .

Коммутатор обеспечивает включение и отключение секций обмотки двигателя по сигналам датчика углового положения в соответствии со знаком сигнала управления  $+\tau, -\tau$ .



Рис. 1.49. Электродвигатель-маховик ДМ1-20

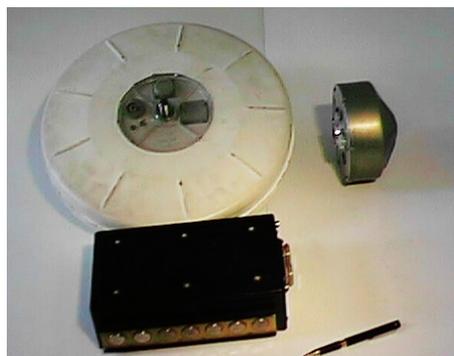


Рис. 1.50. Электродвигатели-маховики ДМ и ДМ1-20

Два двигателя-маховика ДМ1-20 изображены на фотографии (рис. 1.49). Левый образец сфотографирован со стороны посадочной плоскости и разъема, правый – со стороны крышки. По удельным характеристикам (кинетический момент, приходящийся на единицу массы и единицу мощности) эти двигатели-маховики не уступают лучшим зарубежным образцам.

Двигатель-маховик создает управляющие моменты до 0,02 Н·м. При вращении с максимальной частотой 6000 об/мин он развивает кинетический момент, равный 1 Н·м·с. Для сравнения укажем, что кинетический момент двигателей-маховиков ДМ (ДМ20-250) космического аппарата «Электро» в 20 раз больше. На общей фотографии (рис. 1.50) ДМ1-20 изображен вместе с двигателем-маховиком ДМ и его блоком электроники. В отличие от ДМ силовая электроника ДМ1-20 «спрятана» внутри корпуса.

Стремление к наиболее рациональному использованию массы привело к созданию кольцевого двигателя-маховика (рис. 1.51).

Металлическое кольцо опирается на три ролика, покрытые резиной. Один из них приводится во вращение асинхронным двигателем. Такой маховик диаметром около трех метров использовался в системах ориентации орбитальных станций «Салют» и «Алмаз» [2, 20]. Конструкция маховика удобна для размещения на станции и управления угловым положением вокруг продольной оси. Диаметр кольца близок к диаметру корпуса станции, так что внутреннее пространство остается свободным (рис. 1.52).

Кольцевой двигатель-маховик с общей массой 140 кг развивает управ-

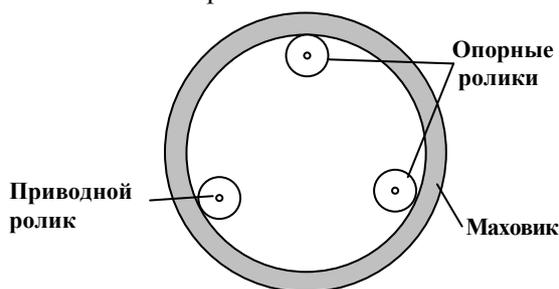


Рис. 1.51. Кинематическая схема кольцевого двигателя-маховика



Рис. 1.52. Кольцевой двигатель-маховик

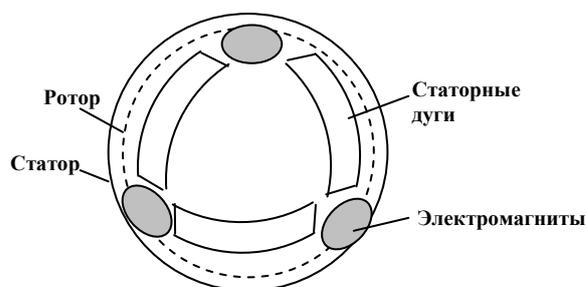


Рис. 1.53. Шаровой двигатель-маховик

ляющие моменты до 200 Н·м и кинетический момент до 1000 Н·м·с (частота вращения до 80 об/мин) [86].

Особый интерес представляет трехступенный *шаровой двигатель-маховик* [20, 27, 76, 103] с *магнитным подвесом ротора* (рис. 1.53).

Ротор-маховик выполнен в виде полого стального шара, который удерживается внутри корпуса при помощи шести электромагнитов. По принципу действия шаровой двигатель-маховик является асинхронным двигателем.

Сферический ротор вращают шесть дуговых статоров, размещенных попарно в трех взаимно перпендикулярных плоскостях. Каждая пара располагается диаметрально противоположно, чтобы компенсировать силы тяжения, действующие на ротор со стороны статора. Пакет статора выполняется шихтованным из тонколистовой электротехнической стали. В пазах дуговых статоров, как у обычных электрических машин, располагаются обмотки, способные создавать бегущее вдоль дуги магнитное поле. Внешняя поверхность ротора покрыта медью, обладающей высокой электропроводностью. Медное покрытие выполняет функцию обмотки ротора. За счет взаимодействия магнитного поля статоров с токами в роторе возникает электромагнитный момент, который приводит его в движение. Отсутствие механических опор позволяет ротору вращаться вокруг любой оси, проходящей через центр масс. Измерение скоростей и направления вращения осуществляется тахогенераторами.

Зазор между ротором и корпусом измеряется датчиками системы магнитного подвеса. Их сигналы управляют силой тока электромагнитов. Система с шестью электромагнитами, расположенными диаметрально противоположно на трех ортогональных осях подвеса, обеспечивает автономность трех каналов управления подвесом и позволяет свести к минимуму силовые взаимодействия между ними. Функциональная схема одного канала электромагнитного подвеса сферического ротора приведена на рис. 1.54.

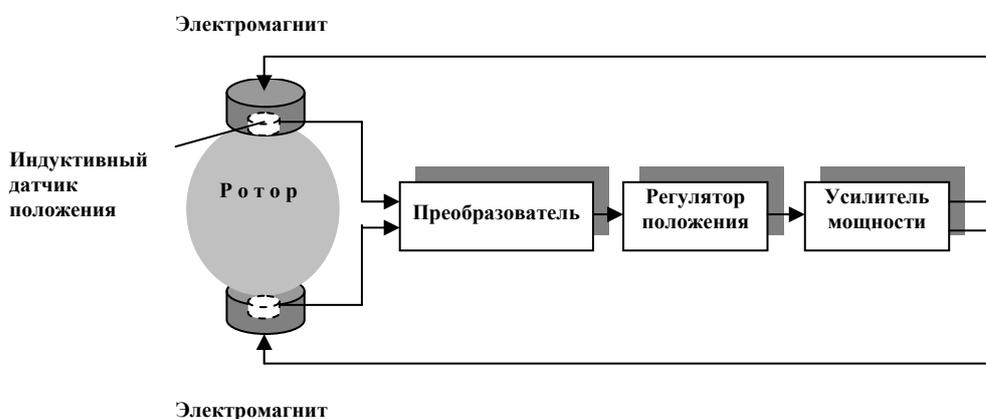


Рис. 1.54. Функциональная схема канала электромагнитного подвеса ротора

Один шаровой двигатель-маховик заменяет три одноосных двигателя-маховика и тем самым дает выигрыш в массе – важное достоинство для космической техники. При одинаковых моментах инерции и диаметрах сферический ротор-маховик вдвое легче трех кольцевых маховиков.

Шаровой двигатель-маховик с диаметром ротора 0,64 м и общей массой 230 кг использовался для трехосной стабилизации и медленных поворотов орбитальных станций «Салют» и «Алмаз» [2, 20, 86]. Он стал первым в мировой практике электромеханическим исполнительным органом с электромагнитным подвесом ротора. Шаровой двигатель-маховик развивает управляющий момент до 3 Н·м и кинетический момент до 200 Н·м·с [86]. Общий вид шарового двигателя-маховика изображен на фотографии (рис. 1.55).

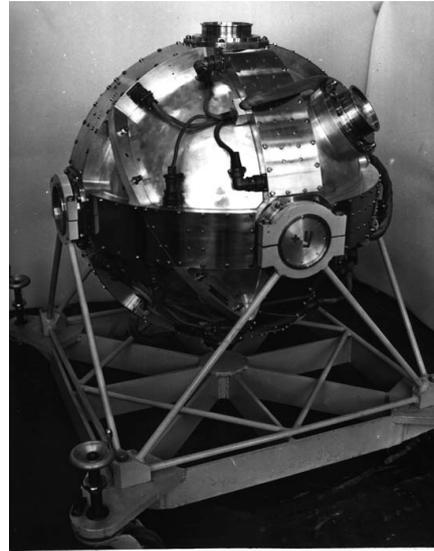


Рис. 1.55. Шаровой двигатель-маховик

На фотографии (см. рис. 1.52) шаровой и кольцевой двигателя-маховики изображены вместе.

Принцип действия маховичных систем ориентации основан на законе сохранения момента количества движения механической системы, состоящей из корпуса космического аппарата и инерционной вращающейся массы. В соответствии с этим законом для одноосной маховичной системы

$$K + H = 0,$$

где  $K = I\omega$  – кинетический момент космического аппарата,  $H = J_m\Omega$  – кинетический момент двигателя-маховика. Это равенство изобразим в виде векторной диаграммы (рис. 1.56).



Рис. 1.56. Векторная диаграмма

Можно говорить о том, что управление угловым положением космического аппарата осуществляется за счет обмена кинетическим моментом между корпусом космического аппарата и инерционными вращающимися массами. Используя понятие кинетического момента, можно представить моментную характеристику двигателя-маховика в виде зависимости момента от кинетического момента  $M_m = M_m(H)$ , а уравнение движения космического аппарата записать в виде

$$I\omega' = M, \quad \text{где } M = -dH/dt.$$

### 1.12. СИЛОВЫЕ ГИРОСКОПЫ

Вращающийся с постоянной скоростью  $\Omega$  маховик 1 установим в рамке 2, которая в подшипниках 3 поворачивается вокруг оси  $Oz$  космического аппарата (рис. 1.57). За счет рамки маховик получает дополнительную степень свободы движения. Такое устройство называется *двухстепенным силовым гироскопом*. Вращающийся с постоянной скоростью маховик называется ротором силового гироскопа. Рамка поворачивается специальным приводом или датчиком момента 4. Вектор кинетического момента ротора  $G$ , постоянный по модулю, меняет свое направление при поворотах рамки.

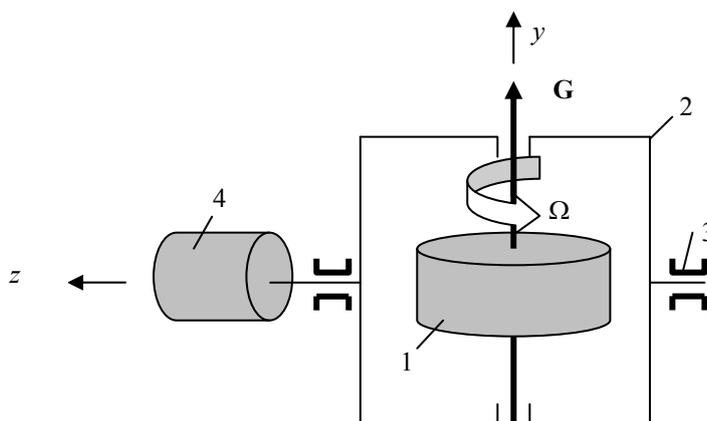


Рис. 1.57. Двухстепенный силовой гироскоп

Функциональная схема привода ротора изображена на рис. 1.58. Регулятор осуществляет плавный разгон при пуске и поддержание скорости вращения ротора с высокой точностью. В качестве гиromотора используется асинхронный двигатель. Через тахогенератор происходит замыкание отрицательной обратной связи по скорости. Привод ротора обеспечивает постоянство модуля вектора кинетического момента  $G$ .

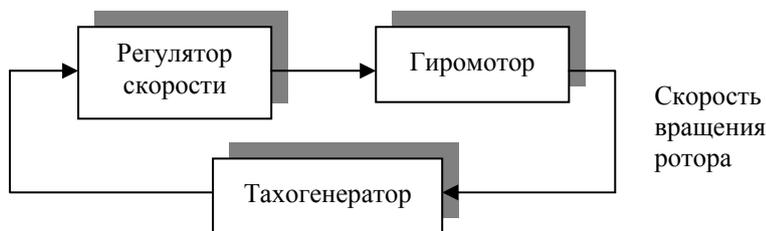


Рис. 1.58. Функциональная схема привода ротора

Сигнал требуемой скорости поворота гироузла – «скорости прецессии» – вычисляется в бортовой ЦВМ и реализуется приводом 4, который называется *приводом прецессии*.

Ротор удерживается внутри гиروزула при помощи электромагнитных опор – четырех радиальных и одной осевой. Каждая опора состоит из двух электромагнитов.

Предположим, что на космическом аппарате установлены два одинаковых силовых гироскопа ( $G_1 = G_2 = G$ ) и в начальный момент времени их векторы кинетического момента противоположны (рис. 1.59). На рисунке изображены гиروزулы гироскопов, состоящие из рамки 2 и ротора 1. Суммарный вектор кинетического момента пары гироскопов равен нулю.

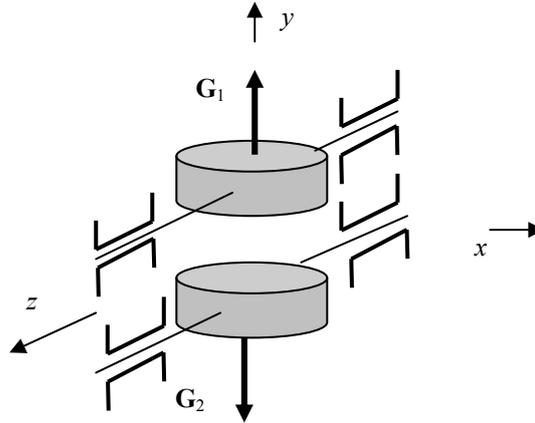


Рис. 1.59. Два силовых гироскопа в исходном состоянии

Будем изображать гироскопы в виде вращающихся векторов  $G_1$  и  $G_2$ . Векторы  $G_1$  и  $G_2$  поворачиваются в плоскости  $Oxy$ , а оси вращения рамок гироскопов перпендикулярны плоскости чертежа (рис. 1.60, а). Повернем векторы  $G_1$  и  $G_2$  на одинаковый угол  $\pi/2 - \beta$  навстречу друг другу (рис. 1.60, б).

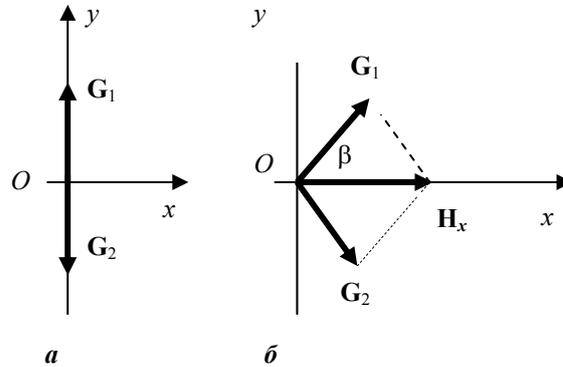


Рис. 1.60. Векторы кинетического момента в исходном состоянии (а) и после поворота (б)

Получим приращение кинетического момента инерционных вращающихся масс вдоль оси  $Ox$  космического аппарата

$$H_x = 2G \cos \beta.$$

В соответствии с законом сохранения момента количества движения такое же приращение кинетического момента, но противоположное по знаку, получит корпус космического аппарата:  $K_x = -H_x$ .

Если  $K_x = I\omega_x$ , то космический аппарат начнет вращаться с угловой скоростью

$$\omega_x = 2(G/I)\cos\beta.$$

Система двух одинаковых силовых гироскопов, позволяющая изменять кинетический момент вдоль оси  $Ox$  космического аппарата, эквивалентна одному электродвигателю-маховику с осью вращения, параллельной оси  $Ox$  (рис. 1.61).

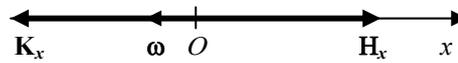


Рис. 1.61. Векторная диаграмма

Однако такая пара способна обеспечивать приращение кинетического момента и вдоль оси  $Oy$ , если поворачивать векторы  $G_1$  и  $G_2$  в одном направлении.

В отличие от двигателей-маховиков силовые гироскопы управляют угловым положением космического аппарата за счет изменения взаимного положения роторов, вращающихся с постоянной скоростью. Такое использование инерционной массы дает выигрыш в энергии, поскольку не нужно разгонять и тормозить ротор, а нужно изменять его угловое положение. Получается выигрыш и в массе, так как увеличение кинетического момента силовых гироскопов возможно путем увеличения скорости вращения ротора-маховика, а не за счет увеличения его момента инерции. Эти преимущества, достигаемые за счет усложнения конструкции, делают силовые гироскопы незаменимыми исполнительными органами крупных космических аппаратов.

При добавлении еще одной рамки силовой гироскоп становится трехстепенным. Три трехстепенных силовых гироскопа с кинетическим моментом 2500 Н·м·с использовались для управления ориентацией американской орбитальной станцией «Скайлаб» [59, 66].

Как и двигателям-маховикам силовым гироскопам присуще свойство насыщения по кинетическому моменту. В гиросиловых системах оно связано с эффектом «сложения рамок» гироскопов. Система из двух гироскопов теряет управляющие свойства в направлении векторов  $G_1$  и  $G_2$ , когда они становятся параллельными. В перпендикулярном направлении управляющие свойства сохраняются.

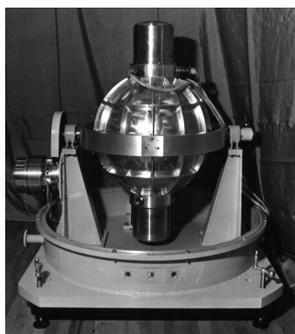


Рис. 1.62. Гироскоп

Двенадцать силовых гироскопов, получивших название «гиродинов» [28], использовались для управления ориентацией орбитальной станции «Мир» [2, 86, 102]. На фотографии гиродин (рис. 1.62) ось вращения гироузла – «ось прецессии» расположена вертикально, ось вращения ротора находится в горизонтальной плоскости. Привод прецессии закрыт цилиндрическим корпусом. Внутри другого цилиндрического корпуса установлены кольцевые токоподводы, обеспечивающие повороты гироузла на неограниченные углы, и синусно-косинусный датчик угла прецессии. Гироузел занимает

центральную сферическую часть. Внутренняя полость, в которой находится гироузел, соединена трубопроводом с открытым космосом. Тем самым исключаются аэродинамические потери при вращении ротора.

Ротор гиродина из высокопрочной стали диаметром 0,4 м и массой 40 кг вращается с постоянной скоростью 10000 оборотов в минуту, создавая постоянный по величине кинетический момент  $G = 1000$  Н·м·с. Гироузел (соответственно и вектор  $G$ ) может поворачиваться приводом прецессии со скоростью 12 град/с вокруг оси рамки. Создавая управляющий момент 200 Н·м, одинаковый с кольцевым двигателем-маховиком, гиродин потребляет в 10 раз меньше электроэнергии. Применение электромагнитных подшипников вместо обычных шариковых обеспечило непрерывное вращение роторов гиродинов в течение 15 лет [102].

**ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА  
ВОКРУГ ЦЕНТРА МАСС**

- ◆ Моменты инерции
- ◆ Определение положения  
космического аппарата,  
кинематические уравнения
- ◆ Динамические величины  
космического аппарата  
как твердого тела
- ◆ Динамические уравнения
  - ◆ Уравнения движения  
космического аппарата  
вокруг центра масс
- ◆ Линеаризованные уравнения  
движения и передаточные  
функции космического аппарата
- ◆ Движение вокруг центра масс  
космического аппарата,  
содержащего подвижные массы
  - ◆ Внешние возмущающие  
моменты

Изучение поведения управляемого объекта необходимо для оптимизации любой системы ориентации и построения математических моделей. Космический аппарат как объект управления представляет собой материальное тело, обладающее определенными механическими свойствами. Они зависят от конструкции и размеров космического аппарата, наличия подвижных частей и упругих элементов – панелей солнечных батарей, антенн, стыковочных узлов и выносных штаг. Естественно, что общее движение космического аппарата вокруг центра масс сопровождается относительными движениями его элементов. Возникает необходимость разработки математической модели космического аппарата как материального тела, имеющего сложную механическую структуру. «Гибкий» космический аппарат можно представить в виде центрального тела с тремя степенями свободы движения и  $n$  конечных элементов, связанных между собою механическими узлами [69, 110]. Каждый конечный элемент рассматривается как жесткое тело, имеющее шесть степеней свободы (три смещения и три поворота относительно осей, параллельных осям центрального тела). Если конечно-элементная модель космического аппарата содержит  $n$  узлов, то общее число степеней свободы механической системы составляет  $3 + 6n$ . С ростом числа элементов возрастает сложность модели и число уравнений, описывающих ее поведение. Случай  $n = 0$  соответствует принятию гипотезы о том, что космический аппарат абсолютно твердое тело. Такой подход вполне оправдан для первого знакомства с движением космического аппарата вокруг центра масс. *Абсолютно твердым называется тело, которое под действием приложенных сил и моментов не испытывает никаких деформаций.* Возмущающие моменты, действующие на корпус космического аппарата, обычно малы, малы и вызываемые ими деформации. Во многих случаях космический аппарат может рассматриваться как абсолютно твердое тело. Принятие этой гипотезы открывает возможность использования уравнений Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой для описания движения космического аппарата вокруг центра масс [21, 26]. Параметрами уравнений Эйлера являются моменты инерции, характеризующие распределение масс в твердом теле. Механические, при  $n = 0$  инерционные, свойства космического аппарата как твердого тела описываются тензором инерции [68].

## 2.1. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

В теоретической механике большую роль играют величины, связанные с распределением масс в теле и называемые моментами. Момент материальной точки вычисляется как произведение элементарной массы на ее координаты в некоторой степени. Учение об этих величинах носит название геометрии масс. В динамике абсолютно твердого тела используются моменты второй степени.

Пусть  $i$ -я материальная точка твердого тела имеет массу  $m_i$  и координаты  $x_i, y_i, z_i$  относительно связанных осей  $Oxyz$  (рис. 2.1).

Моменты второй степени относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$

$$I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2); \quad I_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2); \quad I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

называются *осевыми моментами инерции*. Суммирование осуществляется по всем элементам  $i$ . Если твердое тело сплошное, суммирование заменяется интегрированием.

Моменты второй степени

$$I_{xy} = \sum m_i x_i y_i; \quad I_{xz} = \sum m_i x_i z_i; \quad I_{yz} = \sum m_i z y_i$$

называются *центробежными моментами инерции или произведениями инерции*.

Момент второй степени относительно точки  $O$

$$I_o = \sum m_i r_i^2,$$

где  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ,  $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ , называется *полярным моментом инерции*.

Понятие момента инерции введено

Х. Гюйгенсом (1629 – 1695 гг.) при исследовании колебаний физического маятника.

Моменты инерции обладают свойством аддитивности, т. е. моменты инерции тела равны суммам моментов инерции его частей.

Для тел с непрерывным распределением массы следует воспользоваться интегральным представлением. Например

$$I_x = \int_0^M (y^2 + z^2) dm; \quad I_{yz} = \int_0^M zy dm,$$

где  $M$  – масса тела.

Если тело однородное с плотностью  $\rho$ , то суммирование заменяется интегрированием по объему  $V$ , например

$$I_x = \rho \int_0^V (y^2 + z^2) dv; \quad I_{yz} = \rho \int_0^V zy dv.$$

Моменты инерции измеряются в  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ .

Моменты инерции обладают следующими свойствами:

$$I_x + I_y + I_z = 2I_o; \quad I_x + I_y > I_z; \quad I_y + I_z > I_x; \quad I_x + I_z > I_y.$$

Осевой момент инерции твердого тела с массой  $M$  можно записать в виде

$$I = Mr_n^2,$$

где  $r_n$  – радиус инерции.

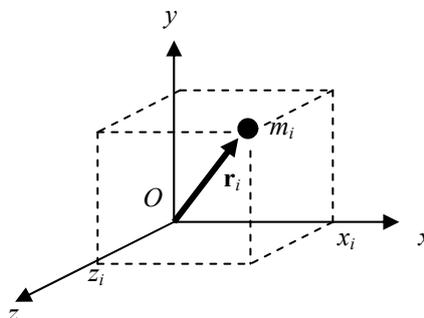


Рис. 2.1. Координаты материальной точки твердого тела

Радиус инерции равен расстоянию от оси точки, в которой нужно сосредоточить массу всего тела, чтобы получить момент инерции  $I$ . Применительно к электродвигателям-маховикам величина  $r_u^2 = I/M$  (момент инерции, приходящийся на 1 кг установленной массы) служит мерой эффективности использования подвижной массы для управления ориентацией космического аппарата.

Формулы для расчета моментов инерции различных геометрических тел можно найти в справочниках по физике, механике, сопротивлению материалов.

**Пример 2.1.** Вычислим момент инерции однородного кольцевого маховика с плотностью  $\rho$  относительно оси вращения  $Ox$  (рис. 2.2).

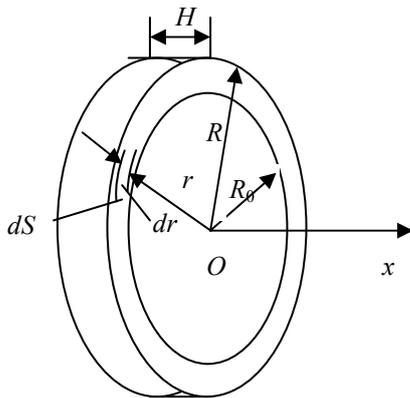


Рис. 2.2. Кольцевой маховик

Согласно определению

$$I_x = \int_0^M (y^2 + z^2) dm = \int_0^M r^2 dm,$$

где  $r$  – расстояние элементарной массы  $dm$  от оси  $Ox$ .

Так как

$$dm = \rho dv; \quad dv = HdS,$$

то

$$I_x = \rho \int_0^V r^2 dv = \rho H \int_0^S r^2 dS,$$

где  $dv$  – элементарный объем,  $dS$  – элементарная площадь.

В качестве элементарной площади выберем площадь кольца с внутренним радиусом  $r$  и толщиной  $dr$

$$dS = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r dr.$$

После подстановки  $dS = 2\pi r dr$  и интегрирования момент инерции выражается через геометрические параметры кольцевого маховика

$$I_x = 2\pi\rho H \int_{R_0}^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi\rho H (R^4 - R_0^4). \quad (2.1)$$

Используя формулу для массы кольца

$$M = \pi\rho H(R^2 - R_0^2), \quad (2.2)$$

получим окончательно

$$I_x = \frac{1}{2} M(R^2 + R_0^2). \quad (2.3)$$

Для примера вычислим массу и момент инерции кольцевого маховика из стали ( $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$ ) с геометрическими параметрами  $H = 0,01 \text{ м}$ ,  $R_0 = 1,4 \text{ м}$ ,  $R = 1,5 \text{ м}$ . Подставляя числовые значения в формулы (2.2) и (2.3), найдем  $M \cong 70 \text{ кг}$  и  $I_x \cong 135 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ .

При  $R_0 = 0$  из (2.3) получается формула для расчета моментов инерции сплошного маховика, сплошного цилиндра и ротора силового гироскопа с радиусом  $R$

$$I_x = \frac{1}{2} M R^2; \quad M = \pi\rho H R^2.$$

Важно отметить, что момент инерции зависит от радиуса цилиндра в четвертой степени:

$$I_x = \frac{1}{2} \pi \rho H R^4.$$

Радиус инерции

$$r_{и} = (I_x / M)^{1/2}$$

может рассматриваться как удельная характеристика, показывающая насколько удачно инерционная масса используется для создания момента инерции. При одинаковой массе радиус инерции кольцевого маховика в  $[1 + (R_0/R)^2]^{1/2}$  раз больше радиуса инерции сплошного маховика. В предельном случае, когда  $R_0 \rightarrow R$ , при одинаковых моментах инерции масса кольцевого маховика в два раза меньше массы сплошного ( $R_0 = 0$ ) маховика.

Если толщина кольца  $\Delta r = R - R_0$  удовлетворяет условию  $\Delta r \ll R$ , то подставляя в (2.1)  $R_0^4 = (R - \Delta r)^4 \cong R^4 - 4R^3\Delta r$ , получим приближенные формулы для расчета момента инерции и массы тонкостенного цилиндра, например оболочки космического аппарата

$$I_x \cong MR^2; \quad M \cong 2\pi\rho HR\Delta r.$$

Предположим, что твердое тело с массой  $M$  имеет момент инерции  $I$  относительно некоторой оси, проходящей через центр масс  $O$  (рис. 2.3). Согласно *теореме Гюйгенса-Штейнера*, момент инерции относительно параллельной оси  $I_1$ , расположенной на расстоянии  $d_1$  от центра масс  $O$ , вычисляется по формуле

$$I_1 = I + Md_1^2. \quad (2.4)$$

Из этого равенства следует, что для параллельного пучка осей наименьшим будет момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс ( $d_1 = 0$ ).

Пользуясь формулой (2.4), можно определить момент инерции твердого тела относительно любой оси параллельного пучка, если известен момент инерции относительно какой-либо оси этого пучка. Действительно,

$$I_1 = I + Md_1^2; \quad I_2 = I + Md_2^2,$$

где  $d_1, d_2$  – расстояние от центра масс до первой и второй оси. Отсюда

$$I_2 = I_1 + M(d_2^2 - d_1^2).$$

Теорема Гюйгенса-Штейнера справедлива и для центральных моментов инерции. Например

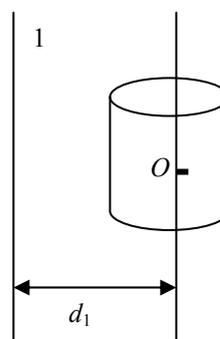


Рис. 2.3. Параллельные оси

$$I_{XY} = I_{xy} + M x_0 y_0,$$

где  $I_{XY}$  – центробежный момент инерции твердого тела относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$ ;  $x_0, y_0$  – координаты центра масс  $O$  твердого тела в осях  $XY$ , параллельных  $Ox$  и  $Oy$ .

Определим момент инерции относительно произвольной оси. Пусть задана система координат  $Oxyz$  твердого тела. Осевые и центробежные моменты считаются известными. Момент инерции твердого тела относительно произвольной оси, заданной единичным вектором  $\mathbf{r}$  с направляющими косинусами  $r_1, r_2, r_3$ , равными проекциям вектора  $\mathbf{r}$  на оси  $Oxyz$ , вычисляется по формуле [21, 26]:

$$I_r = I_x r_1^2 + I_y r_2^2 + I_z r_3^2 - 2I_{xy} r_1 r_2 - 2I_{xz} r_1 r_3 - 2I_{yz} r_2 r_3. \quad (2.5)$$

Таким образом, для определения момента инерции относительно любой оси пучка, проходящего через точку  $O$ , достаточно знать осевые и центробежные моменты инерции твердого тела и направляющие косинусы оси.

**Пример 2.2.** Вычислим момент инерции панели солнечных батарей массой  $M$  и размерами  $h_1 \times h_2 \times h_3$  относительно оси, расположенной в плоскости  $Oyz$  и составляющей угол  $\varphi$  с осью  $Oz$  (рис. 2.4).

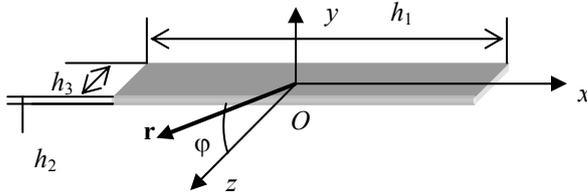


Рис. 2.4. Панель солнечной батареи

Поскольку панель симметрична относительно осей координат  $Oxyz$ , все центробежные моменты инерции будут равны нулю. Осевые моменты инерции вычисляются по формулам для моментов инерции параллелепипеда

Поскольку панель симметрична относительно осей координат  $Oxyz$ , все центробежные моменты инерции будут равны нулю. Осевые моменты инерции вычисляются по формулам для моментов инерции параллелепипеда

$$I_x = \frac{1}{12} M (h_2^2 + h_3^2); \quad I_y = \frac{1}{12} M (h_1^2 + h_3^2); \quad I_z = \frac{1}{12} M (h_1^2 + h_2^2).$$

Направляющие косинусы оси, заданной единичным вектором  $\mathbf{r}$ , равны

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \sin \varphi, \quad r_3 = \cos \varphi.$$

Используя формулу (2.5) и выражения для осевых моментов инерции, получим окончательно

$$I_r = I_y r_2^2 + I_z r_3^2 = \frac{1}{12} M (h_1^2 + h_2^2 \cos^2 \varphi + h_3^2 \sin^2 \varphi).$$

Моменты инерции можно расположить в виде симметричной матрицы, которая носит название *тензора инерции*

$$I = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}.$$

Диагональные компоненты тензора инерции – осевые моменты инерции, остальные – центробежные моменты инерции со знаком «минус». Причем  $I_{xy} = I_{yx}$ ;  $I_{xz} = I_{zx}$ ;  $I_{yz} = I_{zy}$ . Тензор инерции как симметричная матрица осуществляет линейные преобразования в пространстве. В уравнениях движения вокруг центра масс тензор инерции играет такую же роль, как и масса твердого тела в уравнениях движения центра масс.

Используя тензор инерции, формулу (2.5) для вычисления момента инерции относительно произвольной оси можно записать в сокращенном виде

$$I_r = (I\mathbf{r})\mathbf{r}.$$

Компоненты тензора инерции зависят от выбора системы связанных осей космического аппарата.

Оси координат  $Oxyz$ , относительно которых тензор инерции приобретает диагональный вид, называются *главными осями инерции*:

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}.$$

Главными осями инерции космического аппарата с равномерным распределением массы являются оси симметрии и оси, перпендикулярные плоскостям симметрии (рис. 2.5).

На рис. 2.5 точкой  $O$  отмечено положение центра масс космического аппарата;  $Ox$  – ось симметрии (продольная ось космического аппарата); ось  $Oy$  перпендикулярна плоскости симметрии  $Oxz$  – плоскости солнечных батарей; ось  $Oz$  перпендикулярна плоскости симметрии  $Oxy$ . Следовательно, связанные оси  $Oxyz$  – главные оси инерции.

Из-за неравномерного распределения масс внутри космического аппарата главные оси инерции могут не совпадать с осями симметрии, отклоняясь от них на небольшие углы.

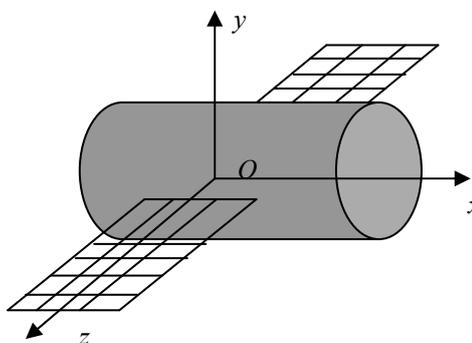


Рис. 2.5. Главные оси инерции космического аппарата

Оси космического аппарата, относительно которых размещаются бортовые приборы и устройства, иногда называются *строительными*. В качестве строительных осей часто выбираются оси симметрии. Если связанные (строительные) оси не совпадают с главными осями инерции, тензор инерции космического аппарата относительно связанных осей помимо диагональных элементов содержит центробежные моменты инерции.

## 2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА, КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

### 2.2.1. Матрица поворота и углы ориентации

Положение осей космического аппарата  $Oxyz$  относительно базовой системы координат (осей ориентации)  $Ox_0y_0z_0$  может быть определено различными способами, например при помощи таблицы направляющих косинусов  $a_{jk}$  углов между осями трехгранников  $Oxyz$  и  $Ox_0y_0z_0$

$$\begin{array}{ccc} & x_0 & y_0 & z_0 \\ x & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ y & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ z & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

Входящие в таблицу величины  $a_{jk}$  связаны между собой шестью условиями ортогональности

$$a_{1j} a_{1k} + a_{2j} a_{2k} + a_{3j} a_{3k} = \delta_{jk}, \quad (j, k = 1, 2, 3),$$

где  $\delta_{jk}$  – символ Кронекера:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ 1 & (j = k) \end{cases}$$

Условия ортогональности являются отображением свойства твёрдого тела сохранять неизменными расстояния между любыми его точками.

*Матрица, составленная из направляющих косинусов,*

$$A = [a_{jk}]$$

*называется матрицей поворота (вращения), осуществляющей перевод осей космического аппарата из начального положения, совпадающего с базовой системой координат  $Ox_0y_0z_0$ , в конечное  $Oxyz$ .*

Если известны проекции вектора  $\mathbf{r}$  в базовой системе координат, то проекции этого же вектора в связанной системе координат вычисляются через матрицу поворота

$$(\mathbf{r})_{Oxyz} = A \mathbf{r}.$$

Очевидно,

$$\mathbf{r} = A^T (\mathbf{r})_{Oxyz}.$$

Пользуясь матрицами поворота, можно вычислить тензор инерции относительно произвольной системы координат. Тензор инерции  $I_0$  в системе координат  $Ox_0y_0z_0$  и тензор инерции  $I$  в системе координат  $Oxyz$ , заданной относительно  $Ox_0y_0z_0$  матрицей поворота  $A$ , связаны между собой соотношениями [68]:

$$I = A I_0 A^T; \quad I_0 = A^T I A.$$

Положение космического аппарата относительно базовой системы координат, заданное матрицей поворота, определяется девятью элементами – девятью направляющими косинусами углов между осями трехгранников  $Ox_0y_0z_0$  и  $Oxyz$ . Минимальное число элементов, при помощи которых можно определить положение космического аппарата относительно осей ориентации равно трем – соответственно числу степеней свободы движения космического аппарата как твердого тела вокруг центра масс. Это три угла ориентации. Наибольшее распространение получили способы определения положения твердого тела, основанные на введении углов Эйлера и Крылова [7, 21, 26, 85].

Пусть первоначально оси космического аппарата совпадали с осями базовой системы координат  $Ox_0y_0z_0$ . Требуется перевести оси космического аппарата в новое произвольное положение  $Oxyz$ . При использовании углов Крылова этот перевод осуществляется посредством трех последовательных поворотов вокруг трех разных осей космического аппарата [85].

Первый поворот на угол  $\varphi$  совершается вокруг оси  $Ox_0$ . Вектор угловой скорости поворота  $\Phi'$  направлен по оси  $Ox_0$ . После первого поворота система осей космического аппарата занимает положение  $Ox_1y_1z_1$  (рис. 2.6). Второй поворот на угол  $\psi$  совершается вокруг оси  $Oy_1$ . Вектор угловой скорости поворота  $\Psi'$  направлен по оси  $Oy_1$ . После второго поворота система осей космического аппарата занимает положение  $Ox_2y_2z_2$ . Третий поворот на угол  $\vartheta$  совершается вокруг оси  $Oz_2$ . Вектор угловой скорости поворота  $\Theta'$  направлен по оси  $Oz_2$ . После третьего поворота система осей космического аппарата занимает конечное положение  $Oxyz$ .

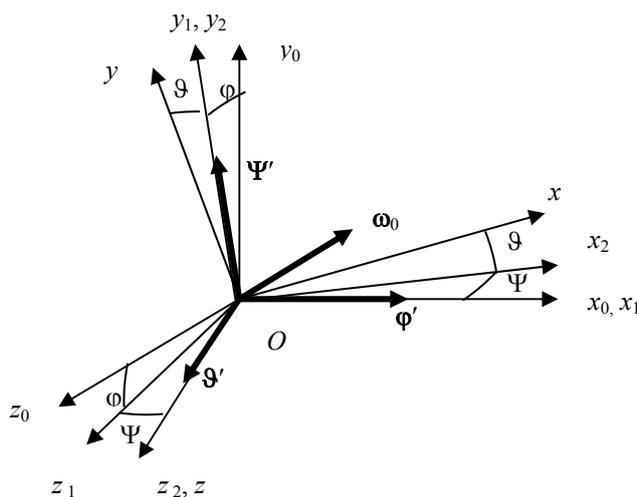


Рис. 2.6. Углы ориентации

Последовательность поворотов удобно изобразить в виде следующей схемы [55, 79]:

$$Ox_0y_0z_0 \xrightarrow[\varphi]{Ox_0} Ox_1y_1z_1 \xrightarrow[\psi]{Oy_1} Ox_2y_2z_2 \xrightarrow[\vartheta]{Oz_2} Oxyz.$$

Над стрелками указаны оси, относительно которых происходят повороты, под стрелками – углы поворотов. Операция трех поворотов космического аппарата в пространстве некоммукативна, т. е. конечное положение системы координат  $Oxyz$  будет зависеть от последовательности, в которой эти повороты производятся, поэтому последовательность поворотов всегда следует оговаривать.

Полет космического аппарата в орбитальной системе координат напоминает полет самолета. По терминологии, принятой в авиации, углы ориентации  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\vartheta$ , полностью определяющие положение космического аппарата в орбитальной системе координат  $Ox_0y_0z_0$ , называются соответственно *углами крена, рыскания и тангажа* [7, 22, 78]. Эти углы весьма наглядны и естественным образом связаны с процессом управления ориентацией, поскольку исполнительные органы создают управляющие моменты именно вокруг осей поворотов.

Матрица поворота  $A$ , составленная из направляющих косинусов углов между осями космического аппарата и осями ориентации, может быть выражена через тригонометрические функции углов  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\vartheta$ . Для этого составляются матрицы косинусов  $A_\varphi$ ,  $A_\psi$  и  $A_\vartheta$ , соответствующие трем отдельным поворотам на углы  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\vartheta$ :

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}; A_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix}; A_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Искомая матрица  $A$  выражается посредством произведения матриц  $A_\varphi$ ,  $A_\psi$  и  $A_\vartheta$  в обратном порядке:

$$A = A_\vartheta A_\psi A_\varphi.$$

Матрица поворота, выраженная через тригонометрические функции углов Крылова, примет вид

$$A = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta + \cos \varphi \sin \vartheta & -\cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta + \sin \varphi \sin \vartheta \\ -\cos \psi \sin \vartheta & -\sin \varphi \sin \psi \sin \vartheta + \cos \varphi \cos \vartheta & \cos \varphi \sin \psi \sin \vartheta + \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \psi & -\sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \cos \psi \end{bmatrix}.$$

Поскольку матрицы  $A_\varphi$ ,  $A_\psi$  и  $A_\vartheta$  являются ортогональными, матрица  $A$  также ортогональна и соответствует ортогональному преобразованию трехмерного пространства при переходе к новому базису. Поэтому

$$A^T = A^{-1}.$$

Принятая последовательность поворотов вокруг трех разных осей не является единственно возможной. Существует другая последовательность, когда третий поворот совершается не вокруг третьей оси, а вокруг нового положения первой оси. Это приводит к углам Эйлера [21, 26].

### 2.2.2. Кинематические уравнения

Кинематические уравнения устанавливают связь между углами ориентации и угловой скоростью космического аппарата. Аналогом этой зависимости для поступательного движения является связь между координатами движущейся точки и скоростью ее перемещения.

Угловая скорость космического аппарата  $\omega$  может быть представлена в виде суммы угловых скоростей трех последовательных поворотов и угловой скорости  $\omega_0$  базовой системы координат

$$\omega = \varphi' + \psi' + \vartheta' + \omega_0.$$

Для поступательно движущихся осей ориентации  $\omega_0 = 0$ , для орбитальной системы координат вектор  $\omega_0$  направлен по оси  $-Oz$  (см. рис. 2.6).

Спроектируем векторное равенство на оси космического аппарата  $Oxyz$ . Проекции  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  вектора  $\omega$  на оси  $Oxyz$  можно вычислить, используя матрицы поворотов. Умножая вектор  $\varphi' = (\varphi', 0, 0)$ , заданный в системе координат  $Ox_1y_1z_1$  на матрицу второго поворота  $A_\psi$ , получим проекции вектора  $\varphi'$  на оси  $Ox_2y_2z_2$ . Умножая найденные проекции на матрицу третьего поворота  $A_\vartheta$ , найдем проекции вектора  $\varphi'$  на оси  $Oxyz$ . Аналогично, вектор  $\psi' = (0, \psi', 0)$ , известный в системе координат  $Ox_2y_2z_2$ , следует умножить на матрицу третьего поворота  $A_\vartheta$ , а вектор  $\omega_0 = (0, 0, -\omega_0)$ , заданный в базовой системе координат  $Ox_0y_0z_0$ , следует умножить на матрицу полного поворота  $A = A_\vartheta A_\psi A_\varphi$ . Вектор  $\vartheta' = (0, 0, \vartheta')$  уже известен в конечной системе координат  $Oxyz$ . При умножении все векторы представляются в виде матриц-столбцов:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\vartheta \\ A_\vartheta \\ A_\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\psi \\ A_\psi \\ A_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_\vartheta \\ A_\vartheta \\ A_\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi' \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vartheta' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \\ A \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_0 \end{bmatrix}.$$

После перемножения матриц получим кинематические уравнения

$$\begin{aligned} \omega_x &= \varphi' \cos \psi \cos \vartheta + \psi' \sin \vartheta + \omega_0 \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta; \\ \omega_y &= -\varphi' \cos \psi \sin \vartheta + \psi' \cos \vartheta - \omega_0 \sin \varphi \cos \vartheta; \\ \omega_z &= \varphi' \sin \psi + \vartheta' - \omega_0 \cos \varphi \cos \psi. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Они связывают проекции вектора угловой скорости космического аппарата с производными от углов ориентации.

При малых углах ориентации и  $\omega_0 = 0$  кинематические уравнения принимают вид

$$\omega_x \approx \varphi' + \psi' \vartheta; \quad \omega_y \approx \psi' - \varphi' \vartheta; \quad \omega_z \approx \vartheta' + \varphi' \psi$$

и не зависят от последовательности поворотов.

Чтобы вычислить углы ориентации, необходимо разрешить кинематические уравнения относительно производных  $\varphi'$ ,  $\psi'$  и  $\vartheta'$ . Выполним эти преобразования для поступательно движущихся осей ориентации, когда  $\omega_0 = 0$ . Полагая  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  известными, будем рассматривать кинематические уравнения (2.6) как систему алгебраических уравнений для определения производных  $\varphi'$ ,  $\psi'$  и  $\vartheta'$ :

$$\begin{aligned} \varphi' \cos \psi \cos \vartheta + \psi' \sin \vartheta &= \omega_x; \\ -\varphi' \cos \psi \sin \vartheta + \psi' \cos \vartheta &= \omega_y; \\ \varphi' \sin \psi + \vartheta' &= \omega_z. \end{aligned}$$

По правилу Крамера

$$\varphi' = \Delta_{\varphi} / \Delta, \quad \psi' = \Delta_{\psi} / \Delta, \quad \vartheta' = \Delta_{\vartheta} / \Delta.$$

Вычисляя определитель системы уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\cos \psi \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ \sin \psi & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos \psi$$

и частные определители

$$\Delta_{\varphi} = \begin{vmatrix} \omega_x & \sin \vartheta & 0 \\ \omega_y & \cos \vartheta & 0 \\ \omega_z & 0 & 1 \end{vmatrix} = \omega_x \cos \vartheta - \omega_y \sin \vartheta;$$

$$\Delta_{\psi} = \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & \omega_x & 0 \\ -\cos \psi \sin \vartheta & \omega_y & 0 \\ \sin \psi & \omega_z & 1 \end{vmatrix} = \cos \psi (\omega_x \sin \vartheta + \omega_y \cos \vartheta);$$

$$\Delta_{\vartheta} = \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & \sin \vartheta & \omega_x \\ -\cos \psi \sin \vartheta & \cos \vartheta & \omega_y \\ \sin \psi & 0 & \omega_z \end{vmatrix} = -\omega_x \cos \vartheta \sin \psi + \omega_y \sin \vartheta \sin \psi + \omega_z \cos \psi,$$

получим *обратные кинематические уравнения*

$$\begin{aligned}\varphi' &= (\omega_x \cos \vartheta - \omega_y \sin \vartheta) / \cos \psi; \\ \psi' &= \omega_x \sin \vartheta + \omega_y \cos \vartheta; \\ \vartheta' &= (-\omega_x \cos \vartheta + \omega_y \sin \vartheta) \operatorname{tg} \psi + \omega_z.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Такая форма записи удобна для интегрирования кинематических уравнений в БЦВМ с целью построения на борту бескарданной базисной системы отсчета углов ориентации на основе поступающей в машину информации о текущих значениях  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ , измеряемых датчиками системы ориентации. Выполнение расчетов в БЦВМ связано с определенными неудобствами: когда  $\psi \rightarrow \pi/2$ , система уравнений вырождается, при этом  $\varphi'$ ,  $\vartheta' \rightarrow \infty$  и численное интегрирование кинематических уравнений затрудняется. Фактическое движение космического аппарата происходит с конечной скоростью, стремление  $\varphi'$  и  $\vartheta'$  к бесконечности связано лишь с вырождением при  $\psi \rightarrow \pi/2$  выбранной системы отсчета углов.

Нелинейность уравнений, наличие тригонометрических функций, отсутствие симметрии и возможность вырождения сохраняются и при использовании углов Эйлера [21, 26].

Трудности, связанные с интегрированием кинематических уравнений, удастся обойти, если вместо минимального числа параметров (трех углов ориентации) использовать четыре величины для определения углового положения космического аппарата: параметры Родрига-Гамильтона, Кейли-Клейна или кватернионы [6, 24, 25, 61]. Эти параметры не так наглядны, как углы ориентации, но дают возможность записать вместо громоздких тригонометрических выражений простые линейные соотношения, лишенные неприятных особенностей и удобные для численного интегрирования в БЦВМ [23, 24, 25, 75].

Любопытна история вопроса [25]. Основные результаты классической теории углового движения твердого тела были получены в XIX веке. Усилия исследователей были направлены на поиски удобной формы представления уравнений и к отысканию интегрируемых случаев движения. Вместо трёх углов Эйлера были предложены новые кинематические параметры, число которых равно четырём. В XX веке центр исследований переместился в область прикладной механики и прикладной теории гироскопов. При этом движение твердого тела задавалось исключительно углами Эйлера-Крылова, которые часто совпадали с углами поворотов рамок гироскопов. Другие способы описания углового движения упоминались главным образом для полноты изложения. После углов Эйлера-Крылова наиболее часто использовались направляющие косинусы. В настоящее время положение изменилось. Благодаря успехам в теории и технике управляемого движения все большее развитие стали получать нетрадиционные кинематические параметры – *кватернионы* [24, 25]. Это отразилось и на пакетах прикладных программ для математического моделирования. Версии MATLAB 6,5 и 7.0.1 содержат описание движения космического аппарата вокруг центра масс в форме кватернионов. Имеются структурные блоки, обеспечивающие переход от углов Эйлера-Крылова к кватернионам и обратно.

## 2.3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА КАК ТВЕРДОГО ТЕЛА

### 2.3.1. Угловая скорость, угловое ускорение, момент силы

Угловая скорость и угловое ускорение являются векторными величинами. Эти векторы направлены вдоль оси вращения.

Чтобы вычислить мгновенную угловую скорость  $\omega$ , необходимо знать зависимость углового перемещения  $\varphi$  от времени  $t$ .

Мгновенной угловой скоростью называется первая производная функции  $\varphi = \varphi(t)$ :

$$\omega = d\varphi / dt = \varphi'.$$



Рис. 2.7. Вектор угловой скорости

Направление вектора угловой скорости  $\omega$  определяется по правилу буравчика (правого винта), т. е. совпадает с направлением поступательного движения буравчика (винта), рукоятка (головка) которого движется в том же направлении, что и тело (рис. 2.7).

Таким образом, вращение твердого тела может быть определено тремя элементами: осью вращения, величиной угловой скорости и направлением вращения. С конца вектора  $\omega$  вращение видно происходящим против движения часовой стрелки.

Зная угловую скорость тела  $\omega$ , можно вычислить линейную скорость  $V$  точки, расположенной на расстоянии  $r$  от оси вращения,

$$V = \omega \times r. \quad (2.8)$$

Величина и направление скорости  $V$  не изменяются, если перемещать вектор  $\omega$  вдоль оси вращения, т. е.  $\omega$  – скользящий вектор.

Если тело участвует одновременно в  $n$  вращательных движениях, то результирующая угловая скорость определяется по правилу векторного сложения

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n.$$

Угловая скорость измеряется в рад/с или  $^\circ/\text{с}$ .

Угловое перемещение есть определенный интеграл по времени от угловой скорости

$$\varphi(t) = \int_0^t \omega(t) dt.$$

*Мгновенным угловым ускорением  $\varepsilon$*  называется первая производная угловой скорости по времени или вторая производная углового перемещения по времени.

Угловое ускорение измеряется в рад/с<sup>2</sup> или °/с<sup>2</sup>.

$$\varepsilon = d\omega/dt = \omega' = d^2\varphi/dt^2 = \varphi''.$$

Угловая скорость есть определенный интеграл по времени от углового ускорения

$$\omega(t) = \varphi'(t) = \int_0^t \varepsilon(t) dt.$$

*Момент силы  $\mathbf{M}$*  относительно некоторой точки равен векторному произведению вектора положения  $\mathbf{r}$  на силу  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

В системе единиц СИ моменты измеряются в Н·м.

Момент силы – свободный (аксиальный) вектор, он направлен вдоль оси вращения. Направление вектора  $\mathbf{M}$  определяется правилом буравчика (рис. 2.8). Свободные векторы не связаны с определенной линией действия, их можно перемещать в пространстве параллельно самим себе.

Если на тело действуют одновременно несколько сил, можно воспользоваться правилом сложения моментов: результирующий момент равен сумме составляющих моментов сил.

*Динамика* рассматривает силы и моменты в качестве причины движения тел.

Под действием момента  $M$  закрепленное на оси твердое тело с моментом инерции  $I$  приобретает угловое ускорение

$$\varepsilon = \varphi'' = M/I.$$

Если закон изменения во времени момента известен, то интегрируя полученное соотношение при нулевых начальных условиях, получим законы изменения во времени угловой скорости и угла поворота твердого тела

$$\omega(t) = \varphi'(t) = 1/I \int_0^t M(t) dt; \quad \varphi(t) = \int_0^t \omega(t) dt.$$

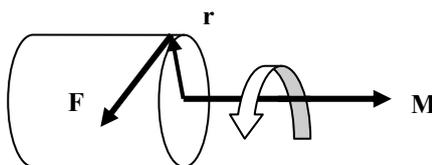
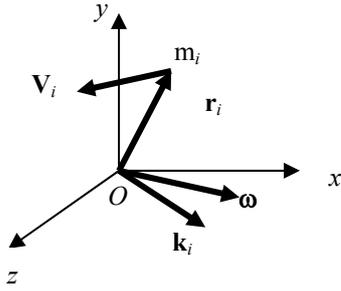


Рис. 2.8. Момент силы

2.3.2. Кинетический момент и кинетическая энергия



Пусть твердое тело, имеющее неподвижную точку  $O$  и состоящее из  $n$  элементарных масс  $m_i$ , расположенных на расстоянии  $\mathbf{r}_i(x_i, y_i, z_i)$  от точки  $O$ , вращается с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  (рис. 2.9).

Согласно определению момента количества движения  $\mathbf{k}_i$  материальной точки, которое принято в теоретической механике

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{V}_i,$$

Рис. 2.9. Момент количества движения материальной точки

момент количества движения твердого тела, состоящего из материальных точек, сокращенно «кинетический момент», вычисляется по формуле

$$\mathbf{k} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{V}_i,$$

где  $\mathbf{V}_i$  – линейная скорость элементарной массы  $m_i$ .

С учетом (2.8)

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i; \\ \mathbf{k} &= \sum m_i [\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)]. \end{aligned}$$

Используя свойство двойного векторного произведения, получим

$$\mathbf{k} = \boldsymbol{\omega} \sum m_i r_i^2 - \sum m_i \mathbf{r}_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i).$$

Спроектируем векторное равенство на связанную ось  $Ox$ :

$$\begin{aligned} k_x &= \omega_x \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \sum m_i x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) = \\ &= \omega_x \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i. \end{aligned}$$

Согласно определению осевых и центробежных моментов инерции

$$\begin{aligned} \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) &= I_x; \\ \sum m_i x_i y_i &= I_{xy}; \\ \sum m_i x_i z_i &= I_{xz}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$k_x = I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z.$$

Аналогично вычисляются проекции вектора кинетического момента на связанные оси  $Oy$  и  $Oz$ :

$$\begin{aligned} k_y &= -I_{yx} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z; \\ k_z &= -I_{zx} \omega_x - I_{zy} \omega_y + I_z \omega_z. \end{aligned}$$

Полученные формулы можно представить в матричной форме

$$\mathbf{k} = I\boldsymbol{\omega}$$

или

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}.$$

Поскольку тензор инерции осуществляет линейные преобразования в пространстве, которые сводятся к растяжениям векторов и к поворотам, в общем случае векторы кинетического момента и угловой скорости не совпадают по направлению.

Если за связанные оси взяты главные оси инерции космического аппарата, то произведения инерции обращаются в нуль и

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \omega_x \\ I_y \omega_y \\ I_z \omega_z \end{bmatrix}.$$

Из этих формул следует, что векторы кинетического момента и угловой скорости совпадают по направлению, когда тело имеет форму шара ( $I_x = I_y = I_z$ ) или вращается вокруг одной из главных осей инерции.

Кинетический момент имеет размерность  $[k] = [I][\omega] = \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ .

**Пример 2.3.** Вычислим кинетический момент  $G$  ротора гиродина цилиндрической формы с массой  $M = 50$  кг и радиусом  $r = 0,2$  м, вращающегося со скоростью  $n = 10000$  об/мин.

Момент инерции цилиндра относительно оси вращения вычисляется по формуле

$$I_p = \frac{1}{2} Mr^2 = 0,5 \cdot 50 \text{ кг} \cdot 0,04 \text{ м}^2 = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Угловая скорость ротора в рад/с:

$$\Omega = 2\pi n/60 \approx n/10 = 1000 \text{ с}^{-1}.$$

Кинетический момент ротора гиродина:

$$G = I_p \Omega = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 1000 \text{ с}^{-1} = 1000 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.$$

Кинетической энергией твердого тела называется скалярная величина, равная сумме кинетических энергий всех точек твердого тела

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i V_i^2.$$

Поскольку

$$\mathbf{V}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i,$$

то

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (\mathbf{V}_i \times \mathbf{V}_i) = \frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{V}_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i).$$

Используя свойство векторно-скалярного произведения, получим

$$T = \frac{1}{2} \sum \boldsymbol{\omega} (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{V}_i) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \Sigma (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{V}_i).$$

Согласно определению кинетического момента

$$\Sigma (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{V}_i) = \mathbf{k},$$

поэтому

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (k_x \omega_x + k_y \omega_y + k_z \omega_z).$$

Подставляя в последнее соотношение выражения для проекций вектора кинетического момента, найдем, что кинетическая энергия есть квадратичная функция угловой скорости

$$T = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 - 2I_{xy} \omega_x \omega_y - 2I_{xz} \omega_x \omega_z - 2I_{yz} \omega_y \omega_z).$$

Если  $Oxyz$  – главные оси инерции, то

$$T = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2).$$

Формулу для кинетической энергии можно представить в другом виде

$$T = \frac{1}{2} (I_x r_1^2 + I_y r_2^2 + I_z r_3^2 - 2I_{xy} r_1 r_2 - 2I_{xz} r_1 r_3 - 2I_{yz} r_2 r_3) \omega^2 = \frac{1}{2} I_r \omega^2,$$

где  $\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2$ ;  $r_1 = \omega_x / \omega$ ,  $r_2 = \omega_y / \omega$ ,  $r_3 = \omega_z / \omega$  – направляющие косинусы мгновенной оси вращения  $\mathbf{r}$ ,  $I_r$  – момент инерции твердого тела относительно мгновенной оси вращения.

Между кинетическим моментом и кинетической энергией существуют соотношения

$$k_x = \partial T / \partial \omega_x; \quad k_y = \partial T / \partial \omega_y; \quad k_z = \partial T / \partial \omega_z.$$

Кинетическая энергия измеряется в Джоулях.

**Пример 2.4.** Вычислим кинетическую энергию кольцевого маховика с моментом инерции  $I_M = 100 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , вращающегося со скоростью  $\Omega = 10 \text{ рад/с}$ , и среднюю мощность  $N_{\text{ср}}$ , потребляемую при разгоне до заданной скорости за время  $t_1 = 5 \text{ с}$ .

Согласно расчетной формуле

$$T = \frac{1}{2} I_M \Omega^2 = 0,5 \cdot 100 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 \cdot 100 \text{ с}^2 = 5000 \text{ Дж}.$$

Средняя мощность

$$N_{\text{ср}} = T / t_1 = 1000 \text{ Дж/с} = 1 \text{ кВт}.$$

**Пример 2.5.** Вычислим время разгона ротора гиродина с осевым моментом инерции  $I_p = 1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  до скорости 10000 об/мин ( $\Omega \approx 1000 \text{ рад/с}$ ) при условии, что для разгона используется источник энергии мощностью  $N = 100 \text{ Вт}$ .

Кинетическая энергия ротора

$$T = \frac{1}{2} I_M \Omega^2 = 0,5 \cdot 1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-2} = 5 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Время разгона

$$t_1 = T / N = 5000 \text{ с} = 1,39 \text{ ч}.$$

## 2.4. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Динамические уравнения, описывающие движение твердого тела около неподвижной точки, получаются при помощи теоремы об изменении кинетического момента, согласно которой производная по времени вектора кинетического момента относительно неподвижной точки, равна главному моменту внешних сил [21, 26]

$$d\mathbf{k}/dt = \mathbf{M}_0. \quad (2.9)$$

Пусть  $Ox_0y_0z_0$  – неподвижная система координат,  $Oxyz$  – подвижные оси, связанные с твердым телом, а  $O$  – неподвижная точка. Проектирование векторного равенства на неподвижные оси невыгодно: компоненты тензора инерции движущегося тела относительно этих осей являются сложными функциями времени и уравнения движения в проекциях на неподвижные оси

$Ox_0y_0z_0$  будут иметь сложный вид. Л. Эйлер (1707 – 1783 гг.) предложил проецировать векторное равенство (2.9) на связанные оси  $Oxyz$ .

Производная  $d\mathbf{k}/dt$  вектора  $\mathbf{k}$  относительно неподвижной системы координат называется «абсолютной» или «полной».

Производная  $d\tilde{\mathbf{k}}/dt$  вектора  $\mathbf{k}$  относительно подвижной системы координат называется «относительной» или «локальной». Между абсолютной и локальной производными существует связь

$$d\mathbf{k}/dt = d\tilde{\mathbf{k}}/dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}, \quad (2.10)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  – вектор мгновенной угловой скорости системы подвижных осей  $Oxyz$  относительно неподвижных  $Ox_0y_0z_0$ .

Формула (2.10) имеет определенное физическое содержание. Абсолютная скорость движения конца вектора  $\mathbf{k}$  (левая часть равенства) представлена как сумма относительной (по отношению к подвижной системе осей  $Oxyz$ ) и переносной скоростей.

После подстановки (2.10) в (2.9) получим

$$d\tilde{\mathbf{k}}/dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} = \mathbf{M}_0.$$

Спроектируем это векторное равенство на связанные оси. При проектировании знак локальной производной опустим, поскольку производная берется относительно подвижной системы. Учитывая, что

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ k_x & k_y & k_z \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – орты связанных осей  $Ox, Oy$  и  $Oz$ , найдем

$$\begin{aligned} k_x' + \omega_y k_z - \omega_z k_y &= M_{0x}; \\ k_y' + \omega_z k_x - \omega_x k_z &= M_{0y}; \\ k_z' + \omega_x k_y - \omega_y k_x &= M_{0z}. \end{aligned}$$

Подставим в уравнения выражения для кинетических моментов из раздела 2.3.2

$$\begin{aligned} k_x &= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z; \\ k_y &= -I_{yx} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z; \\ k_z &= -I_{zx} \omega_x - I_{zy} \omega_y + I_z \omega_z. \end{aligned}$$

С целью упрощения уравнений Эйлер предложил использовать в качестве связанных осей главные оси инерции. В этом случае

$$k_x = I_x \omega_x, k_y = I_y \omega_y, k_z = I_z \omega_z$$

и уравнения примут вид

$$\begin{aligned} I_x \omega_x' + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= M_{0x}; \\ I_y \omega_y' + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= M_{0y}; \\ I_z \omega_z' + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= M_{0z}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Уравнения (2.11) называются *динамическими уравнениями Эйлера* (1758 г.). Они нелинейны и имеют аналитическое решение только при отсутствии внешних моментов ( $\mathbf{M}_0 = 0$ ) и в некоторых частных случаях [21, 26, 64].

*Случай Эйлера-Пуансо.* неподвижная точка совпадает с центром масс тела, а правые части уравнений равны нулю.

*Случай Лагранжа-Пуассона.* Моменты инерции тела удовлетворяют условиям  $I_x = I_y$ , а центр тяжести находится на оси симметрии эллипсоида инерции.

*Случай Ковалевской С.В.* Моменты инерции тела удовлетворяют условиям  $I_x = I_y = 2I_z$ , а центр тяжести находится в экваториальной плоскости эллипсоида инерции.

Для свободного вращения твердого тела, когда  $\mathbf{M}_0 = 0$ , в [64] используется несколько иная форма записи уравнений:

$$\begin{aligned} d\omega_x/dt + [(I_z - I_y)/I_x] \omega_y \omega_z &= 0; \\ d\omega_y/dt + [(I_x - I_z)/I_y] \omega_x \omega_z &= 0; \\ d\omega_z/dt + [(I_y - I_x)/I_z] \omega_x \omega_y &= 0. \end{aligned}$$

Следует отметить, что динамические уравнения Эйлера могут быть получены из уравнений Ж. Лагранжа (1736 – 1813 гг.) второго рода [21].

Чтобы воспользоваться уравнениями Лагранжа второго рода, необходимо выбрать обобщенные координаты, определяющие положение твердого тела. В качестве таких координат можно принять углы ориентации, а в качестве осей твердого тела главные оси инерции  $Oxuz$ .

Угловые скорости, определяющие кинетическую энергию твердого тела

$$T = 1/2 (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2)$$

связаны с обобщенными координатами и их производными при помощи кинематических уравнений

$$\begin{aligned} \omega_x &= \varphi' \cos \psi \cos \vartheta + \psi' \sin \vartheta; \\ \omega_y &= -\varphi' \cos \psi \sin \vartheta + \psi' \cos \vartheta; \\ \omega_z &= \varphi' \sin \psi + \vartheta'. \end{aligned}$$

Запишем уравнение Лагранжа для обобщенной координаты  $\vartheta$ , характеризующей вращение твердого тела вокруг оси  $Oz$

$$d(\partial T/\partial \dot{\vartheta})/dt - \partial T/\partial \vartheta = M_{0z}.$$

Вычислим частные производные:

$$\begin{aligned} \partial T/\partial \dot{\vartheta} &= (\partial T/\partial \omega_z)(\partial \omega_z/\partial \dot{\vartheta}) = I_z \omega_z; \\ \partial T/\partial \vartheta &= (\partial T/\partial \omega_x)(\partial \omega_x/\partial \vartheta) + (\partial T/\partial \omega_y)(\partial \omega_y/\partial \vartheta) = I_x \omega_x \omega_y - I_y \omega_y \omega_x = -(I_y - I_x) \omega_x \omega_y. \end{aligned}$$

Подстановка частных производных в уравнение Лагранжа приводит к третьему уравнению Эйлера

$$I_z \omega_z' + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = M_{0z}.$$

Два других уравнения Эйлера не могут быть непосредственно получены из уравнений Лагранжа, поскольку параметры  $\varphi$  и  $\psi$  не соответствуют вращению твердого тела вокруг подвижных осей  $Ox$  и  $Oy$ , занимающих конечное положение после третьего поворота. Эти уравнения легко могут быть получены из третьего уравнения циклической перестановкой и переименованием осей [21].

## 2.5. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ВОКРУГ ЦЕНТРА МАСС

Динамические уравнения Эйлера связывают изменение угловой скорости космического аппарата с действием управляющих и возмущающих моментов. Этого недостаточно, чтобы судить об угловом положении космического аппарата в выбранной системе отсчета – относительно осей ориентации. Для полного описания движения космического аппарата вокруг центра масс уравнения Эйлера необходимо дополнить полученными ранее кинематическими уравнениями, устанавливающими связь между углами ориентации и угловой скоростью космического аппарата.

Таким образом, движение вокруг центра масс космического аппарата как абсолютно твердого тела описывается системой шести обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно шести неизвестных функций времени:  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\vartheta$ . В систему уравнений входят: три уравнения динамики и три кинематические уравнения.

Записывая уравнения динамики, главный момент внешних сил  $\mathbf{M}_0$ , действующих на космический аппарат, можно представить в виде двух составляющих:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M} + \mathbf{M}_B,$$

где  $\mathbf{M}$  – вектор управляющего момента, создаваемый исполнительными органами системы ориентации,  $\mathbf{M}_в$  – вектор внешних возмущающих моментов (гравитационных, аэродинамических, сил светового давления, магнитных).

Уравнения динамики в общем случае, когда связанные оси космического аппарата не являются главными осями инерции ( $I_{ij} \neq 0$ ), представим в векторном виде

$$d\tilde{\mathbf{k}}/dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_в, \mathbf{k} = I \boldsymbol{\omega}. \quad (2.12)$$

Если оси космического аппарата  $Oxyz$  – главные оси инерции, то уравнения динамики упрощаются:

$$\begin{aligned} I_x \omega_x' + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= M_x + M_{вх}; \\ I_y \omega_y' + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= M_y + M_{вy}; \\ I_z \omega_z' + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= M_z + M_{вz}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Добавим к уравнениям динамики (2.13) кинематические уравнения

$$\begin{aligned} \omega_x &= \varphi' \cos \psi \cos \vartheta + \psi' \sin \vartheta + \omega_0 \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta; \\ \omega_y &= -\varphi' \cos \psi \sin \vartheta + \psi' \cos \vartheta - \omega_0 \sin \varphi \cos \vartheta; \\ \omega_z &= \varphi' \sin \psi + \vartheta' - \omega_0 \cos \varphi \cos \psi \end{aligned} \quad (2.14)$$

при использовании орбитальной системы координат или кинематические уравнения

$$\begin{aligned} \omega_x &= \varphi' \cos \psi \cos \vartheta + \psi' \sin \vartheta; \\ \omega_y &= -\varphi' \cos \psi \sin \vartheta + \psi' \cos \vartheta; \\ \omega_z &= \varphi' \sin \psi + \vartheta' \end{aligned} \quad (2.15)$$

при использовании поступательно движущихся осей ориентации.

Общие интегралы системы шести дифференциальных уравнений первого порядка должны содержать шесть произвольных постоянных, которые определяются, если известны начальное положение и начальная угловая скорость

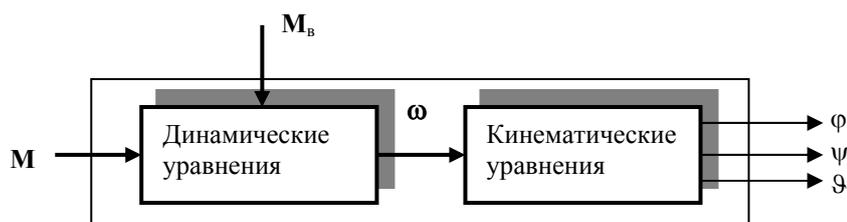


Рис. 2.10. Математическая модель космического аппарата

космического аппарата:  $\varphi(0), \psi(0), \vartheta(0), \omega_x(0), \omega_y(0), \omega_z(0)$ . Если принять во внимание, что в общем случае управляющие и возмущающие моменты являются функциями углов ориентации, то становятся понятными трудности, возникающие при интегрировании системы шести уравнений. Обычно они решаются численными методами на ЦВМ. Совместно динамические и кинематические уравнения позволяют судить об изменении углового положения космического аппарата под действием управляющих и возмущающих моментов. Математическая модель космического аппарата как объекта управления может быть представлена в виде схемы, изображенной на рис. 2.10.

Подставляя в уравнения динамики кинематические уравнения (2.14) или (2.15), можно получить вместо шести уравнений первого порядка три дифференциальных уравнения второго порядка относительно трех углов ориентации  $\varphi, \psi$  и  $\vartheta$ . Такие уравнения устанавливают непосредственную связь между углами ориентации, определяющими угловое положение космического аппарата, и действующими на космический аппарат внешними моментами.

## 2.6. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Пусть  $Ox_0y_0z_0$  – поступательно движущиеся оси ориентации,  $Oxyz$  – связанные оси космического аппарата. Рассмотрим режим поддержания ориентации. В режиме идеальной ориентации  $\varphi = \psi = \vartheta = 0$ . В реальных условиях углы ориентации не равны нулю, но малы. Полагая угловые отклонения и угловые скорости бесконечно малыми (так что их произведениями можно пренебречь) и не учитывая действие возмущающих моментов, получим из уравнений динамики (2.13) и кинематических уравнений (2.15):

$$I_x \omega_x' = M_x; I_y \omega_y' = M_y; I_z \omega_z' = M_z;$$

$$\omega_x = \varphi'; \omega_y = \psi'; \omega_z = \vartheta'.$$

В замкнутой системе ориентации управляющие моменты могут создаваться как функции углов ориентации и угловых скоростей космического аппарата, т. е.

$$M_x = M_x(\varphi, \varphi'); M_y = M_y(\psi, \psi'); M_z = M_z(\vartheta, \vartheta').$$

Тогда

$$I_x \varphi'' = M_x(\varphi, \varphi'); I_y \psi'' = M_y(\psi, \psi'); I_z \vartheta'' = M_z(\vartheta, \vartheta').$$

Исходная система уравнений движения космического аппарата вокруг центра масс распалась на три независимых уравнения второго порядка относительно трех углов ориентации  $\varphi, \psi$  и  $\vartheta$ . Полученное упрощение имеет глубокий практический смысл: каждая компонента вектора управляющего мо-

мента ( $M_x, M_y, M_z$ ) вызывает угловое ускорение только вокруг одной оси. Такое упрощение стало возможным благодаря выбору в качестве осей космического аппарата главных осей инерции. Естественно устанавливать датчики и исполнительные органы системы ориентации с учетом расположения главных осей инерции космического аппарата так, чтобы управление вокруг трех взаимно перпендикулярных осей  $Ox, Oy$  и  $Oz$  было независимым. Это существенно упрощает логику управления.

Таким образом, если *оси ориентации движутся поступательно, то вместо сложных пространственных поворотов космического аппарата можно изучать три независимые плоские угловые движения*. Это справедливо и в том случае, когда компоненты вектора внешнего возмущающего момента являются функциями только соответствующих углов ориентации. Таким свойством внешние возмущающие моменты, действующие на космический аппарат, часто обладают.

Поскольку возмущающие моменты зависят от углов ориентации, по аналогии с определениями, принятыми в авиации, вводятся понятия статически устойчивого, неустойчивого и нейтрального космического аппарата [22, 78, 85]. Если неуправляемый космический аппарат, будучи отклонённым на некоторый угол, под действием возмущающего возвращается в исходное состояние, его называют статически устойчивым. Если угол возрастает, космический аппарат статически неустойчив. Если космический аппарат сохраняет отклоненное состояние, его называют нейтральным объектом управления.

Получим линеаризованные уравнения при движении космического аппарата в орбитальной системе координат.

Из кинематических уравнений (2.14) с учетом малости углов и угловых скоростей (так что их произведением можно пренебречь) найдём

$$\begin{aligned}\omega_x &= \varphi' + \omega_0 \psi; \\ \omega_y &= \psi' - \omega_0 \varphi; \\ \omega_z &= \vartheta' - \omega_0.\end{aligned}$$

Подставляя упрощенные кинематические уравнения в динамические уравнения Эйлера (2.13), полагая орбиту круговой ( $\omega_0 = \text{const}$ ) и пренебрегая внешними возмущающими моментами, получим линеаризованные уравнения движения космического аппарата вокруг центра масс

$$\begin{aligned}I_x \varphi'' + (I_x + I_y - I_z)\omega_0 \psi' + (I_z - I_y)\omega_0^2 \varphi &= M_x; \\ I_y \psi'' + (-I_x - I_y + I_z)\omega_0 \varphi' + (I_z - I_x)\omega_0^2 \psi &= M_y; \\ I_z \vartheta'' &= M_z.\end{aligned}\quad (2.16)$$

В отличие от поступательно движущихся осей ориентации пространственное угловое движение космического аппарата здесь не разделяется на независимые плоские движения относительно трех угловых координат. Оно разделяется на два движения: плоское по координате  $\vartheta$  и неразделимое по координате

натам  $\varphi$  и  $\psi$ . Используя терминологию, принятую в авиации [22, 78], можно говорить, что движение разделяется на продольное (по тангажу) и боковое (по крену и рысканию). Следует отметить, что самолетные углы и углы космического аппарата совпадают лишь при малых значениях. При больших углах ориентации самолетные термины можно употреблять условно. Например космический аппарат может лететь «бокком», повернувшись на угол  $\psi = 90^\circ$  вокруг оси рыскания, что невозможно для самолета.

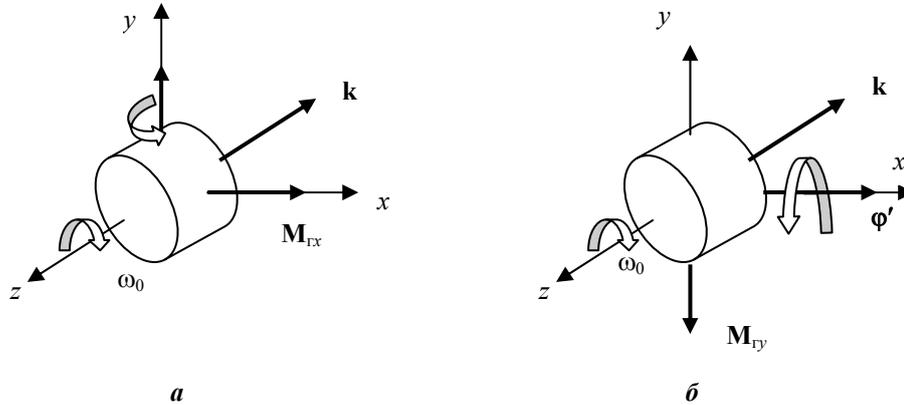


Рис. 2.11. Взаимное влияние каналов рыскания и крена

Свойство системы уравнений движения (2.16) распадаться на одно независимое уравнение и систему двух уравнений имеет вполне объяснимую физическую природу. В режиме стабилизации, когда углы ориентации малы, космический аппарат вращается с угловой орбитальной скоростью  $\omega_0$  вокруг оси, близкой к связанной оси  $Oz$ . Вдоль оси  $Oz$  космический аппарат имеет кинетический момент  $\mathbf{k} = -I\omega_0$ , вследствие чего он обладает свойствами, присущими гироскопам. Если космический аппарат поворачивается со скоростью  $\psi'$  вокруг оси  $Oy$ , то возникающий гироскопический момент  $\mathbf{M}_{gx}$  стремится совместить вектор кинетического момента  $\mathbf{k}$  с вектором  $\psi'$ , т. е. стремится повернуть ось  $-Oz$  в вертикальное положение (рис. 2.11, а). Гироскопический момент  $\mathbf{M}_{gx}$ , действующий вокруг оси  $Ox$ , вызовет появление угловой скорости  $\varphi'$ . Если космический аппарат поворачивается со скоростью  $\varphi'$  вокруг оси  $Ox$ , то возникающий гироскопический момент  $\mathbf{M}_{gy}$  стремится совместить вектор  $\mathbf{k}$  с вектором  $\varphi'$  (рис. 2.11, б).

Таким образом, вращение космического аппарата вокруг оси  $Ox$  вызывает появление гироскопического момента относительно оси  $Oy$  и наоборот, поэтому повороты на углы  $\varphi$  и  $\psi$  оказываются связанными. Вокруг оси  $Oz$  космический аппарат может разогнаться или тормозиться, при этом моменты по другим осям не возникают.

Если желательно сделать движение по координатам  $\varphi$  и  $\psi$  развязанным, то управляющие моменты вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$  нужно выбирать так, чтобы они компенсировали влияние средних членов уравнений, т. е. управляющий мо-

мент  $M_x$  должен зависеть не только от  $\varphi$  и  $\varphi'$ , но и от  $\psi'$ , а момент  $M_y$  должен зависеть не только от  $\psi$  и  $\psi'$ , но и от  $\varphi'$ . Это означает введение перекрестных связей в логику системы ориентации.

Угловая орбитальная скорость для низких околоземных орбит составляет  $\omega_0 \approx 0,07^\circ/\text{с}$ , для суточных –  $\omega_0 \approx 0,0042^\circ/\text{с}$ . Угловые скорости и угловые отклонения современных космических аппаратов в режиме стабилизации достаточно малы. При конкретном анализе величинами  $\omega_0\psi'$ ,  $\omega_0^2\varphi$ ,  $\omega_0\varphi'$  и  $\omega_0^2\psi$ , входящими в уравнения движения (2.16), иногда можно пренебречь. В ряде случаев уравнения (2.16) можно упростить, если принять допущение о сравнительно быстром протекании переходных процессов в системе ориентации. Если время переходного процесса значительно меньше периода обращения по орбите  $T = 2\pi/\omega_0$ , а влиянием внешних возмущающих моментов можно пренебречь, то уравнения (2.16) дополнительно упрощаются и их можно записать в таком же виде, как линеаризованные уравнения при поступательно движущихся осях ориентации:

$$I_x \varphi'' = M_x; I_y \psi'' = M_y; I_z \vartheta'' = M_z.$$

Преобразуя линеаризованные уравнения движения по Лапласу, получим *передаточные функции космического аппарата* по отношению к управляющему моменту

$$W_\varphi(s) = \varphi(s)/M_x(s) = 1/I_x s^2; W_\psi(s) = \psi(s)/M_y(s) = 1/I_y s^2; W_\vartheta(s) = \vartheta(s)/M_z(s) = 1/I_z s^2.$$

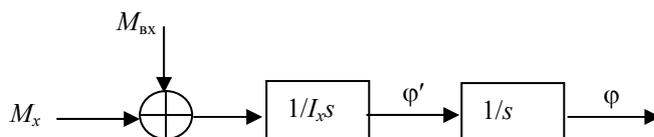


Рис. 2.12. Структурная схема космического аппарата (канал крена)

Как объект управления космический аппарат представляет собой дважды интегрирующее звено, т.е. обладает астатизмом второго порядка.

Аналогичный вид имеют передаточные функции по отношению к внешним возмущающим моментам  $\mathbf{M}_в$ .

Математическая модель космического аппарата как объекта управления при исследовании одного канала системы ориентации, например канала крена, может быть представлена структурной схемой, изображённой на рис. 2.12.

Линеаризованная модель космического аппарата полезна на начальных стадиях проектирования системы ориентации, когда производится предварительный выбор ее структуры и параметров.

## 2.7. ДВИЖЕНИЕ ВОКРУГ ЦЕНТРА МАСС КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА, СОДЕРЖАЩЕГО ПОДВИЖНЫЕ МАССЫ

### 2.7.1. Уравнения движения

Функционирование современных космических аппаратов нередко связано с перемещением масс. Передвигаются космонавты, перемещаются научные приборы, перекачиваются жидкости (вода, топливо), вращаются панели солнечных батарей и антенны, включаются и выключаются электродвигатели. Инерционные вращающиеся массы в электромеханических исполнительных органах используются для управления ориентацией космического аппарата. Возникает необходимость вывода уравнений движения космического аппарата, аналогичных динамическим уравнениям Эйлера, с учетом подвижных масс. Вывод уравнений движения можно найти в [85].

Изучаемая механическая система представляется в виде абсолютно твердого тела  $S$  (несущее тело или корпус космического аппарата) и подвижной массы  $S'$ . Обозначим через  $S^*$  совокупность тел  $S$  и  $S'$  в предположении, что тело  $S'$  неподвижно относительно тела  $S$  и находится в положении, которое соответствует данному моменту времени (тело с «замороженной» массой). Вектор кинетического момента механической системы «несущее тело + подвижная масса»  $\mathbf{k}_c$  вычисляется как сумма кинетического момента  $\mathbf{k}$  тела  $S^*$  и кинетического момента  $\mathbf{H}$  подвижной массы в ее движении по отношению к телу  $S$ :

$$\mathbf{k}_c = \mathbf{k} + \mathbf{H}.$$

Как и раньше проекции вектора кинетического момента тела  $S^*$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} k_x &= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z; \\ k_y &= -I_{yx} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z; \\ k_z &= -I_{zx} \omega_x - I_{zy} \omega_y + I_z \omega_z. \end{aligned}$$

Однако в этих формулах все компоненты тензора инерции являются функциями координат подвижной массы.

В соответствии с теоремой об изменении кинетического момента

$$d \mathbf{k}_c / dt = \mathbf{M}_0$$

или

$$d (\mathbf{k} + \mathbf{H}) / dt = \mathbf{M}_0,$$

где  $\mathbf{M}_0$  – главный момент внешних сил.

Используя понятие локальной производной (2.10)

$$d\mathbf{k}_c/dt = d\tilde{\mathbf{k}}_c/dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_c,$$

запишем уравнение движения относительно связанной системы координат

$$d\tilde{(\mathbf{k} + \mathbf{H})}/dt + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{k} + \mathbf{H}) = \mathbf{M}_0.$$

Если подвижная масса является инерционной массой электромеханического исполнительного органа и используется для управления ориентацией космического аппарата, то величину  $-d\tilde{\mathbf{H}}/dt - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}$  следует рассматривать как управляющий момент. Его действие аналогично действию главного момента внешних сил, поэтому все переменные, связанные с  $\mathbf{H}$ , целесообразно перенести в правую часть уравнения:

$$d\tilde{\mathbf{k}}/dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} = \mathbf{M}_0 - d\tilde{\mathbf{H}}/dt - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}. \quad (2.17)$$

Полученное векторное уравнение отличается от уравнений движения (2.12) космического аппарата, не содержащего подвижных масс. Усложнение уравнения движения связано с переменностью моментов инерции «замороженного» тела  $S_*$ , изменением во времени кинетического момента движущихся масс, наличием гироскопических моментов  $-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}$ .

### 2.7.2. Гиростат

В частном случае, несмотря на наличие подвижных масс, моменты инерции тела  $S_*$  остаются неизменными. *Несущее тело с подвижными массами и неизменными моментами инерции называется гиростатом* [21, 85]. Моменты инерции остаются постоянными, если подвижные массы симметричны, вращаются вокруг осей симметрии, а их центры масс не меняют своего положения относительно несущего тела. Примером гиростата является космический аппарат, управляемый тремя электродвигателями-маховиками или шаровым двигателем-маховиком. Во многих других случаях космический аппарат также может рассматриваться как гиростат [62].

В качестве связанных осей гиростата выберем главные оси инерции несущего тела. Проектируя векторное уравнение (2.17) на связанные оси и учитывая постоянство моментов инерции гиростата, получим

$$\begin{aligned} I_x \omega_x' + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= M_{0x} - H_x' + H_y \omega_z - H_z \omega_y; \\ I_y \omega_y' + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= M_{0y} - H_y' + H_z \omega_x - H_x \omega_z; \\ I_z \omega_z' + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= M_{0z} - H_z' + H_x \omega_y - H_y \omega_x. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Предположим, что вращающиеся массы используются в системе ориентации космического аппарата. Правые части уравнений динамики показывают, что управляющий момент, создаваемый системой исполнительных органов, связан с изменением модуля вектора  $\mathbf{H}$ , изменением его направления относительно осей несущего тела и скоростью вращения вектора  $\mathbf{H}$  вместе с несущим телом.

Для полного описания движения гиростата уравнения динамики (2.18) необходимо дополнить тремя кинематическими соотношениями (2.14) или (2.15), которые связывают угловые скорости несущего тела с углами ориентации, и начальными условиями.

Линеаризуем уравнения движения гиростата в предположении малости углов ориентации и угловых скоростей. Пренебрегая произведениями бесконечно малых величин в уравнениях динамики (2.18) и кинематических уравнениях (2.15), получим

$$\begin{aligned} I_x \omega_x' &= M_{0x} - H_x' + H_y \omega_z - H_z \omega_y; \\ I_y \omega_y' &= M_{0y} - H_y' + H_z \omega_x - H_x \omega_z; \\ I_z \omega_z' &= M_{0z} - H_z' + H_x \omega_y - H_y \omega_x; \\ \omega_x &= \varphi'; \quad \omega_y = \psi'; \quad \omega_z = \vartheta'. \end{aligned}$$

После подстановки кинематических уравнений в уравнения динамики найдем линеаризованные уравнения движения гиростата относительно поступательно движущихся осей ориентации

$$\begin{aligned} I_x \varphi'' &= M_{0x} - H_x' + H_y \vartheta' - H_z \psi'; \\ I_y \psi'' &= M_{0y} - H_y' + H_z \varphi' - H_x \vartheta'; \\ I_z \vartheta'' &= M_{0z} - H_z' + H_x \psi' - H_y \varphi'. \end{aligned}$$

Видно, что линеаризованные уравнения движения не распадаются на три независимых плоских движения, как это было у абсолютно твердого тела. Чтобы добиться прежнего результата, необходимо дополнительно ввести ограничения на величину вектора  $\mathbf{H}$ . Когда проекции вектора  $\mathbf{H}$  достаточно малы, двумя последними слагаемыми в каждом уравнении можно пренебречь. Если теперь допустить, что компоненты  $H_x'$ ,  $H_y'$  и  $H_z'$  регулируются независимо, то управление ориентацией сведется к трем независимым плоским движениям:

$$\begin{aligned} I_x \varphi'' &= M_{0x} - H_x'; \\ I_y \psi'' &= M_{0y} - H_y'; \\ I_z \vartheta'' &= M_{0z} - H_z'. \end{aligned}$$

Линеаризованные уравнения движения гиростата в орбитальной системе координат получаются после подстановки кинематических уравнений (2.14), которые с учетом малости углов ориентации имеют вид

$$\begin{aligned}\omega_x &= \varphi' + \omega_0 \psi; \\ \omega_y &= \psi' - \omega_0 \varphi; \\ \omega_z &= \vartheta' - \omega_0,\end{aligned}$$

в уравнения динамики (2.18):

$$\begin{aligned}I_x \varphi'' + (I_x + I_y - I_z) \omega_0 \psi' + (I_z - I_y) \omega_0^2 \varphi &= M_{0x} - H_x' + H_y \vartheta' - H_z \psi' + \omega_0(H_z \varphi - H_y); \\ I_y \psi'' + (-I_x - I_y + I_z) \omega_0 \varphi' + (I_z - I_x) \omega_0^2 \psi &= M_{0y} - H_y' + H_z \varphi' - H_x \vartheta' + \omega_0(H_z \psi + H_x); \\ I_z \vartheta'' &= M_{0z} - H_z' + H_x \omega_y - H_y \omega_x - \omega_0(H_x \varphi + H_y \psi).\end{aligned}$$

Все каналы ориентации оказываются связанными за счет действия гироскопических моментов. В предположении малости модуля  $|\mathbf{H}|$  движение разделяется на боковое

$$\begin{aligned}I_x \varphi'' + (I_x + I_y - I_z) \omega_0 \psi' + (I_z - I_y) \omega_0^2 \varphi &= M_{0x} - H_x' - \omega_0 H_y; \\ I_y \psi'' + (-I_x - I_y + I_z) \omega_0 \varphi' + (I_z - I_x) \omega_0^2 \psi &= M_{0y} - H_y' + \omega_0 H_x.\end{aligned}$$

и продольное

$$I_z \vartheta'' = M_{0z} - H_z',$$

так же как это было у абсолютно твердого тела.

### 2.7.3. Внутренние возмущающие моменты

Если появление вектора  $\mathbf{H}$  не связано с работой электромеханических исполнительных органов, а обусловлено включением различных бортовых устройств (электродвигателей, сканеров, магнитофонов, вентиляторов), то входящие в правые части уравнений динамики (2.17), (2.18) слагаемые следует рассматривать как возмущающие моменты. Они действуют внутри замкнутой механической системы, образуемой корпусом космического аппарата и подвижными массами, и называются внутренними возмущающими моментами. Эти моменты действуют во время разгона и торможения инерционных масс ( $dH/dt$ ) или проявляются в виде гироскопических моментов, когда вращающаяся масса начинает поворачиваться вместе с космическим аппаратом. Внутренние возмущающие моменты влияют на точность ориентации и нередко могут быть главными источниками погрешности стабилизации.

При проектировании системы ориентации производится оценка внутренних возмущающих моментов, с тем чтобы управляющие моменты исполнительных органов космического аппарата могли компенсировать их вредное влияние. Для расчета внутренних возмущающих моментов можно использовать правые части уравнений динамики космического аппарата, содержащего подвижные массы (2.17) и (2.18).

Влияние внутренних возмущающих моментов на динамику космического аппарата можно уменьшить за счет ограничения кинетических моментов бортовых устройств. При включении на борту двух одинаковых приборов вредное воздействие возмущающих моментов на корпус космического аппарата удастся исключить за счет их взаимной компенсации, когда роторы приборов вращаются в противоположные стороны. Такие же результаты дает применение специальных компенсаторов. Идея компенсации возмущающего момента от солнечных батарей реализована на метеорологическом спутнике «Метеор». Вращение солнечных батарей с большим моментом инерции вызывает вращение в противоположную сторону корпуса космического аппарата. Чтобы этого не происходило, одновременно с приводом солнечных батарей включается компенсирующий маховик, вращающийся в противоположную сторону. Скорость вращения маховика регулируется так, чтобы суммарный кинетический момент панелей солнечных батарей и компенсирующего маховика всегда был близок к нулю. Подробнее этот вопрос обсуждается в главе 7.

## **2.8. ВНЕШНИЕ ВОЗМУЩАЮЩИЕ МОМЕНТЫ**

Малая плотность вещества, заполняющего космическое пространство, даже при огромных скоростях движения не приводит к возникновению заметных возмущающих моментов от взаимодействия космического аппарата со средой. Однако их влияние приходится учитывать. В разделе 2.6 показано, что в режимах стабилизации поведение космического аппарата как объекта управления описывается дважды интегрирующим звеном. При отсутствии демпфирования со стороны окружающей среды отклонения космического аппарата от исходного положения могут непрерывно нарастать даже под воздействием очень малых моментов. В этих условиях приходится учитывать действие возмущающих моментов, влиянием которых в других технических приложениях обычно пренебрегают. Природа действующих на космический аппарат возмущающих моментов разнообразна. Это гравитационные, аэродинамические, магнитные моменты, моменты сил светового давления и др. Расчет возмущающих моментов необходим для правильного выбора характеристик исполнительных органов системы ориентации и расчета запасов реактивного топлива на борту.

### **2.8.1. Гравитационные моменты**

Природа гравитационных возмущений обусловлена законом всемирного тяготения. Пусть в центральном ньютоновском поле сил находится тело (рис. 2.13). Представим его в виде двух точечных масс, соединенных невесомым стержнем (так называемая гантель).

Силы тяжести действуют вдоль линий  $B_1O_1$  и  $B_2O_1$ . Величина силы в точке  $B_1$  будет меньше, чем в точке  $B_2$ , поскольку силы, действующие на точечные массы, обратно пропорциональны квадратам расстояний от центра притяжения  $O_1$ . Появляется гравитационный момент  $M_r$ , стремящийся развернуть гантель по направлению  $OO_1$ .

Гравитационный момент  $\mathbf{M}_r$ , действующий на тело произвольной формы, вычисляется как интеграл по объему тела  $V$

$$\mathbf{M}_r = \int \boldsymbol{\rho} \times d\mathbf{G},$$

где  $d\mathbf{G}$  – вектор силы тяжести, действующий на элементарную массу;  $\boldsymbol{\rho}$  – радиус-вектор элементарной массы относительно центра масс тела.

Вывод расчетных формул можно найти в [85]. Приведем формулу для вычисления гравитационных моментов в векторном виде [68]:

$$\mathbf{M}_r = -3\mu/r_0^3 (I\mathbf{e}_r) \times \mathbf{e}_r, \quad (2.19)$$

где  $\mu \cong 398602 \text{ км}^3/\text{с}^2$  – гравитационная постоянная Земли [1];  $r_0$  – радиус орбиты (расстояние от центра масс космического аппарата до центра Земли);  $I$  – тензор инерции космического аппарата;  $\mathbf{e}_r = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3]^T$  – единичный вектор, направленный по радиусу-вектору орбиты (по оси  $Oy_0$  орбитальной системы координат);  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – проекции единичного вектора  $\mathbf{e}_r$  на связанные оси  $Oxuz$  (направляющие косинусы углов между осью  $Oy_0$  и осями  $Ox, Oy$  и  $Oz$ ).

При движении космического аппарата по круговой орбите с угловой скоростью  $\omega_0$

$$\mu/r_0^3 = \omega_0^2. \quad (2.20)$$

Проектируя векторное равенство (2.19) на связанные оси, получим формулы для вычисления гравитационных моментов, действующих по осям космического аппарата,

$$\begin{aligned} M_{rx} &= -3\omega_0^2 [(I_y - I_z) \gamma_2 \gamma_3 - I_{yx} \gamma_1 \gamma_3 + I_{zx} \gamma_1 \gamma_2 + I_{yz} (\gamma_2^2 - \gamma_3^2)]; \\ M_{ry} &= -3\omega_0^2 [(I_z - I_x) \gamma_1 \gamma_3 + I_{xy} \gamma_2 \gamma_3 - I_{zy} \gamma_1 \gamma_2 + I_{xz} (\gamma_3^2 - \gamma_1^2)]; \\ M_{rz} &= -3\omega_0^2 [(I_x - I_y) \gamma_1 \gamma_2 - I_{xz} \gamma_2 \gamma_3 + I_{yz} \gamma_1 \gamma_3 + I_{xy} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

В расчетные формулы входят только угловая орбитальная скорость  $\omega_0$  и компоненты тензора инерции, поэтому компоненты гравитационного момента могут быть определены с достаточно высокой точностью.

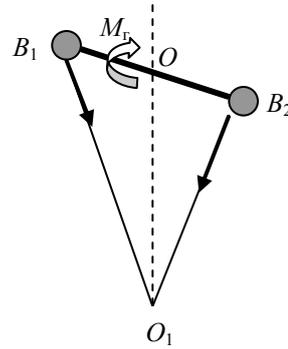


Рис. 2.13. Гантель

**Пример 2.6.** Вычислим гравитационный момент, действующий на космический аппарат, движущийся по круговой орбите с угловой скоростью  $\omega_0$  и стабилизированный в орбитальной системе координат.

Если космический аппарат идеально стабилизирован в орбитальной системе координат, то его оси  $Oxyz$  совпадают с осями ориентации  $Ox_0y_0z_0$ , при этом  $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$ ,  $\gamma_2 = 1$  и гравитационные моменты согласно (2.21) вычисляются по формулам

$$M_{Гx} = -3\omega_0^2 I_{yz}; M_{Гy} = 0; M_{Гz} = 3\omega_0^2 I_{xy}.$$

Величина гравитационных моментов зависит от центробежных моментов инерции.

Уровень гравитационных моментов, действующих на метеорологический спутник «Метеор» с высотой орбиты 850 км, не превышает  $10^{-4}$  Н·м.

Выберем в качестве связанных осей главные оси инерции. Проектируя векторное равенство (2.19) на связанные оси, получим удобные формулы для вычисления гравитационных моментов

$$\begin{aligned} M_{Гx} &= 3\omega_0^2 (I_z - I_y) \gamma_2 \gamma_3; \\ M_{Гy} &= 3\omega_0^2 (I_x - I_z) \gamma_1 \gamma_3; \\ M_{Гz} &= 3\omega_0^2 (I_y - I_x) \gamma_1 \gamma_2. \end{aligned}$$

**Пример 2.7.** Вычислим гравитационный момент, действующий на космический аппарат с диагональным тензором инерции

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix},$$

движущийся по круговой орбите с угловой скоростью  $\omega_0$ .

Если космический аппарат идеально стабилизирован в орбитальной системе координат, то его оси  $Oxyz$  совпадают с осями ориентации  $Ox_0y_0z_0$ , при этом  $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$ ,  $\gamma_2 = 1$  и гравитационный момент равен нулю (рис. 2.14).

Предположим, что космический аппарат повернулся на угол  $\vartheta$  вокруг оси тангажа

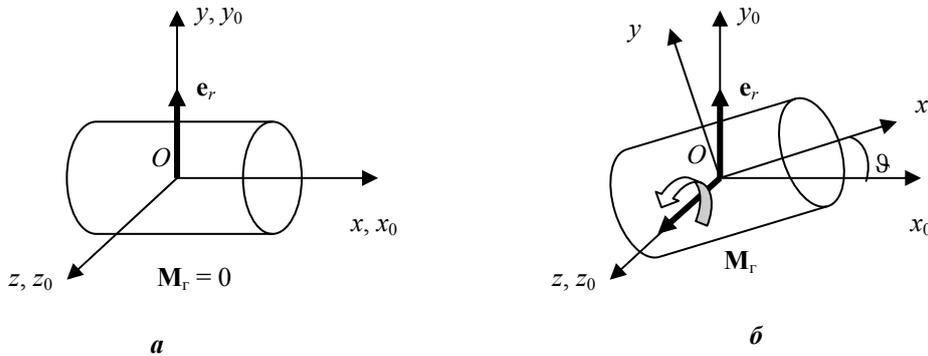


Рис. 2.14. Гравитационный момент

$Oz$  (рис. 2.14). Теперь направляющие косинусы единичного вектора  $e_r$  (направленного по оси  $Oy_0$ ) относительно связанных осей  $Oxyz$  составляют

$$\gamma_1 = \sin\vartheta, \gamma_2 = \cos\vartheta, \gamma_3 = 0.$$

Используя расчетные формулы (2.21), получим

$$M_{rx} = M_{ry} = 0; \quad M_{rz} = 3\omega_0^2(I_y - I_x) \sin\vartheta \cos\vartheta = 3/2\omega_0^2(I_y - I_x) \sin 2\vartheta.$$

Гравитационный момент вокруг оси  $Oz$  максимален при  $\vartheta = \pi/4$

$$(M_{rz})_{\max} = 3/2\omega_0^2(I_y - I_x).$$

Оценим гравитационный момент, действующий на орбитальную станцию типа «Мир» с моментами инерции  $I_x = 2 \cdot 10^5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  и  $I_y = 22 \cdot 10^5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  на круговой орбите с высотой  $H = 350 \text{ км}$  при угловом отклонении по тангажу  $\vartheta = 1^\circ$ .

С учетом среднего радиуса Земли  $R = 6370 \text{ км}$  [1, 53] расстояние станции до центра притяжения составит

$$r_0 = R + H = 6720 \text{ км}.$$

Для расчета угловой орбитальной скорости воспользуемся формулой (2.20)

$$\omega_0^2 = \mu/r_0^3 = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-2}.$$

Гравитационный момент, действующий по оси тангажа:

$$M_{rz} = 3/2\omega_0^2(I_y - I_x) \sin 2\vartheta = 1,5 \cdot 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-2} \cdot 20 \cdot 10^5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 \sin 2^\circ = 0,122 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

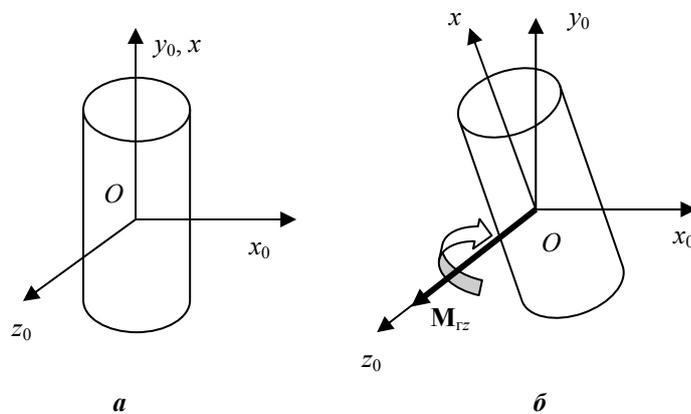


Рис. 2.15. Положение статически устойчивого равновесия космического аппарата

Рассмотрим *положения равновесия космического аппарата*, при которых гравитационный момент по оси  $Oz$  равен нулю. Пусть вначале оси  $Ox$  и  $Ox_0$  совпадают по направлению (рис. 2.14, *а*). Если отклонить космический аппарат на малый угол  $\vartheta$ , появляется гравитационный момент, стремящийся увеличить угол  $\vartheta$  (рис. 2.14, *б*). Это положение равновесия статически неустойчивое, нарастающий гравитационный момент является опрокидывающим.

При  $\vartheta = \pi/2$  ось  $Ox$  космического аппарата совпадает с осью  $Oy_0$  орбитальной системы координат (рис. 2.14, *а*). Если отклонить космический аппарат на малый угол из этого положения равновесия, появляется гравитационный момент, стремящийся вернуть космический аппарат в исходное положение. Это положение равновесия статически устойчивое, а гравитационный момент является восстанавливающим (см. рис. 2.15).

Состояние устойчивости или неустойчивости определяется знаком производной

$$\partial M_{gz}/\partial \vartheta = 3\omega_0^2(I_y - I_x) \cos 2\vartheta.$$

Если  $\partial M_{gz}/\partial \vartheta > 0$ , то положение равновесия неустойчивое ( $\vartheta = 0$ ); если  $\partial M_{gz}/\partial \vartheta < 0$ , то положение равновесия устойчивое ( $\vartheta = \pi/2$ ).

Аналогичные рассуждения о положениях равновесия могут быть сделаны и для оси крена  $Ox$ . Гравитационный момент вокруг оси  $Oy$  равен нулю и не зависит от угла рыскания  $\psi$ .

Таким образом, *вытянутое в вертикальном направлении тело обладает устойчивостью по тангажу и крену и является нейтральным по отношению к углу рыскания*. Говоря по другому, ньютоновское поле сил стремится расположить вытянутое тело по радиусу-вектору орбиты. Это свойство использовалось для гравитационной ориентации на Землю связки орбитальной станции «Салют» с космическим кораблем «Союз» [48]. По этому же принципу строятся пассивные гравитационные системы, в которых роль «вытянутого тела» играют гравитационные штанги [82].

**Пример 2.8.** Вычислим гравитационный момент, действующий на космический аппарат «Метеор-М» с тензором инерции

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y - I_{yz} & \\ 0 & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix},$$

движущийся по круговой орбите с угловой скоростью  $\omega_0$ .

В отличие от предыдущих примеров оси орбитальной системы координат вводятся здесь следующим образом. Ось  $Oz_0$  вытянута вдоль радиуса-вектора орбиты. Перпендикулярно к ней, в плоскости орбиты и в направлении полета космического аппарата вокруг Земли направлена ось  $Ox_0$ . Ось  $Oy_0$ , образующая правую систему координат, перпендикулярна плоскости орбиты (см. рис. 2.15). Вектор угловой орбитальной скорости  $\omega_0$  направлен по оси  $Oy$ .

Подставляя в формулы (2.21)  $I_{xy} = I_{xz} = 0$ , получим

$$\begin{aligned} M_{rx} &= -3\omega_0^2 [(I_y - I_z) \gamma_2 \gamma_3 + I_{yz}(\gamma_2^2 - \gamma_3^2)]; \\ M_{ry} &= -3\omega_0^2 [(I_z - I_x) \gamma_1 \gamma_3 - I_{zy} \gamma_1 \gamma_2]; \\ M_{rz} &= -3\omega_0^2 [(I_x - I_y) \gamma_1 \gamma_2 + I_{yz} \gamma_1 \gamma_3]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Найдем компоненты единичного вектора  $\mathbf{e}_r = [\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3]^T$  в связанной системе координат.

Взаимное положение связанной и орбитальной систем координат определяется матрицей поворота, которая является функцией трех углов ориентации. В качестве углов ориентации выберем углы Крылова. Они вводятся тремя последовательными поворотами вокруг трех связанных осей космического аппарата.

Пусть первоначально оси космического аппарата совпадали с осями базовой системы координат  $Ox_0y_0z_0$ . Первый поворот на угол  $\varphi$  совершается вокруг оси  $Ox_0$ . После первого поворота система осей космического аппарата занимает положение  $Ox_1y_1z_1$  (рис. 2.16). Второй поворот на угол  $\vartheta$  совершается вокруг оси  $Oy_1$ .

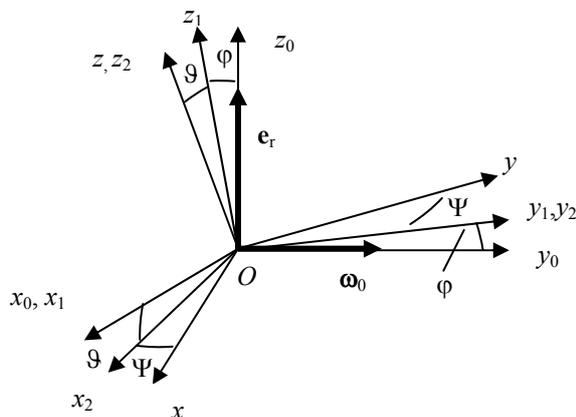


Рис. 2.16. Углы ориентации

После второго поворота система осей космического аппарата занимает положение  $Ox_2y_2z_2$ . Третий поворот на угол  $\psi$  совершается вокруг оси  $Oz_2$ . После третьего поворота система осей космического аппарата занимает конечное положение  $Oxyz$ .

Последовательность поворотов удобно изобразить в виде следующей схемы

$$Ox_0y_0z_0 \xrightarrow[\varphi]{Ox_0} Ox_1y_1z_1 \xrightarrow[\vartheta]{Oy_1} Ox_2y_2z_2 \xrightarrow[\psi]{Oz_2} Oxyz.$$

Над стрелками указаны оси, относительно которых происходят повороты, под стрелками – углы поворотов.

Матрица поворота  $A$ , составленная из направляющих косинусов углов между осями космического аппарата и осями ориентации, может быть выражена через тригонометрические функции углов  $\varphi$ ,  $\vartheta$ ,  $\psi$ . Для этого составим матрицы направляющих косинусов  $A_\varphi$ ,  $A_\vartheta$  и  $A_\psi$ , соответствующие трем отдельным поворотам на углы  $\varphi$ ,  $\vartheta$ ,  $\psi$ :

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}; \quad A_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix}; \quad A_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Искомая матрица  $A$  выражается посредством произведения матриц  $A_\varphi$ ,  $A_\psi$  и  $A_\vartheta$  в обратном порядке:

$$A = A_\psi A_\vartheta A_\varphi.$$

Матрица поворота, выраженная через тригонометрические функции углов Крылова, примет вид

$$A = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & \sin \varphi \sin \vartheta \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & -\cos \varphi \sin \vartheta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \\ -\cos \vartheta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi \sin \vartheta + \cos \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \psi \sin \vartheta + \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \vartheta & -\sin \varphi \cos \vartheta & \cos \varphi \cos \vartheta \end{bmatrix}.$$

Отметим, что полученная матрица поворота отличается от матрицы  $A$ , найденной в разделе 2.2 для последовательности поворотов  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\vartheta$ . Это свидетельствует о том, что операция трех поворотов космического аппарата в пространстве некоммутативна, т. е. конечное положение системы координат  $Oxyz$  зависит от последовательности, в которой эти повороты производятся.

Умножая единичный вектор  $e_r = [0 \ 0 \ 1]^T$ , известный в орбитальной системе координат, на матрицу поворота  $A$ , получим искомые проекции вектора  $e_r$  на оси связанной системы координат

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\cos \varphi \sin \vartheta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi; \\ \gamma_2 &= \cos \varphi \sin \psi \sin \vartheta + \sin \varphi \cos \psi; \\ \gamma_3 &= \cos \varphi \cos \vartheta. \end{aligned}$$

После подстановки направляющих косинусов вектора  $e_r$  в формулы (2.22) можно вычислить гравитационные моменты для произвольных углов ориентации космического аппарата. В режиме стабилизации, когда угловые отклонения малы, формулы (2.22) могут быть линеаризованы. Линеаризуя формулы (2.22) в предположении малости углов ориентации, получим формулы для вычисления гравитационных моментов в режиме стабилизации

$$\begin{aligned} M_{gx} &= -3\omega_0^2 [(I_y - I_z)\varphi + I_{yz}]; \\ M_{gy} &= -3\omega_0^2 (I_z - I_x)\vartheta; \\ M_{gz} &= -3\omega_0^2 I_{yz}\gamma_1\vartheta. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Угловая скорость  $\omega_0$  зависит от высоты орбиты  $H$  и может быть рассчитана по формуле (2.20) или из равенства центростремительной силы, действующей на космический аппарат массой  $m$ , силе тяготения

$$m\omega_0^2(R + H) = mg, \quad (2.24)$$

где  $R$  – радиус Земли,  $g$  – ускорение силы тяжести на высоте  $H$ .

Подставляя в (2.24)

$$g = g_0 R^2 / (R + H)^2,$$

получим

$$\omega_0^2 = g_0 R^2 / (R + H)^3, \quad (2.25)$$

где  $g_0$  – ускорение силы тяжести на поверхности Земли.

При  $R = 6370$  км [1, 53],  $H = 800$  км по формуле (2.25) найдем  $\omega_0 \approx 0,00104$  с<sup>-1</sup>.

Оценим величину гравитационных моментов, действующих на космический аппарат с моментами инерции  $I_x = 5200$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_y = 11100$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_z = 6900$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{yz} = -210$  кг·м<sup>2</sup>, при угловых отклонениях  $\varphi = \nu = -2^\circ$ .

По формулам (2.23) найдем  $M_{gx} = 10,7 \cdot 10^{-4}$  Н·м;  $M_{gy} = 1,8 \cdot 10^{-4}$  Н·м;  $M_{gz} = -0,22 \cdot 10^{-4}$  Н·м.

При идеальной ориентации ( $\varphi = \nu = 0$ ) гравитационный момент, равный  $6,3 \cdot 10^{-4}$  Н·м, действует только вокруг оси  $Ox$ .

### 2.8.2. Аэродинамические моменты

Движение космического аппарата с большой скоростью в космической среде приводит к возникновению аэродинамических моментов. Они определяются в первую очередь высотой орбиты и формой космического аппарата. Вычисление аэродинамических моментов сопряжено с преодолением ряда трудностей. При расчете аэродинамических моментов необходимо учитывать, что плотность верхних слоев атмосферы, определяющая величину аэродинамических сил, зависит от солнечной активности, геомагнитных возмущений, времени года и положения космического аппарата на орбите. Физические процессы взаимодействия самолета с атмосферой и космического аппарата с разреженной космической средой существенно различны. Самолёт обтекается сплошной средой, а космический аппарат «бомбардируется» отдельными молекулами. Взаимодействие молекулы с корпусом космического аппарата может рассматриваться как упругое соударение с зеркальным отражением молекулы или как абсолютно неупругий удар. Второй вариант лучше описывает явления, наблюдаемые на практике, и поэтому кладётся в основу расчётов. По аналогии с обычной аэродинамикой полагают, что возникающие аэродинамические силы при движении космического аппарата со скоростью  $V$  в среде с плотностью  $\rho$  пропорциональны *скоростному напору* [22, 78]

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2.$$

Такое слагаемое входит в уравнение Д. Бернулли для установившегося движения идеальной, несжимаемой жидкости [116]. Оно определяет кинетическую энергию, приходящуюся на единицу объёма, имеет размерность давления, называется скоростным или динамическим «давлением». Однако не следует связывать с этим названием физического представления о давлении.

Выделим на поверхности космического аппарата элементарную площадку  $dS$  (рис. 2.17). Полагаем, что взаимодействие корпуса с набегающими молекулами

носит характер абсолютно неупругого удара. Элементарная сила  $dF_a$ , действующая на площадку, пропорциональна скоростному напору  $q$  и площади  $dS$ :

$$dF_a = -cq dS \cos \gamma V/V,$$

где  $c$  – коэффициент;  $\gamma$  – угол между внешней нормалью  $\mathbf{n}$  к элементарной площадке и вектором скорости  $\mathbf{V}$  этой площадки относительно внешней среды. Знак «минус» означает, что вектор силы, действующей на космический аппарат, противоположен вектору скорости. Это соотношение является следствием закона сохранения импульса.

Коэффициент  $c$  зависит от характера взаимодействия молекул набегающего потока с поверхностью космического аппарата. Если рассматривать это взаимодействие как абсолютно неупругий удар, то из закона сохранения импульса следует, что  $c = 2$  [85].

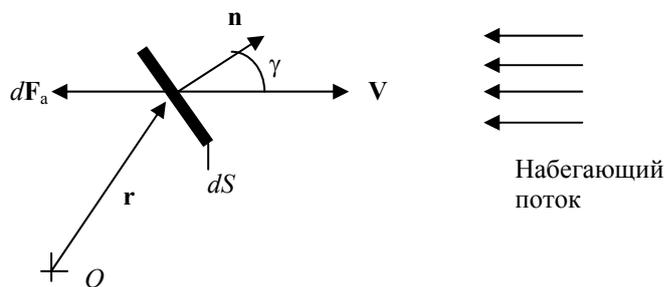


Рис. 2.17. Аэродинамическая сила, действующая на элементарную площадку

Аэродинамический момент  $M_a$  вычисляется как интеграл по поверхности  $S$ , омываемой внешней средой:

$$M_a = \int \mathbf{r} \times dF_a,$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор площадки  $dS$  относительно центра масс  $O$  космического аппарата.

Для осесимметричного космического аппарата (рис. 2.18) при малых углах атаки  $\alpha$  выражение для аэродинамического момента, действующего вокруг оси тангажа  $Oz$ , может быть записано в виде [7, 78]

$$M_a = M_a^\alpha \alpha; \quad M_a^\alpha = c x_{цд} S q,$$

где  $S$  – характерная площадь (площадь проекции космического аппарата на плоскость, перпендикулярную набегающему потоку); в авиации ее называют площа-

дью мидельного сечения [78];  $x_{цд}$  – расстояние между центром масс и центром давления – точкой приложения равнодействующей аэродинамических сил.

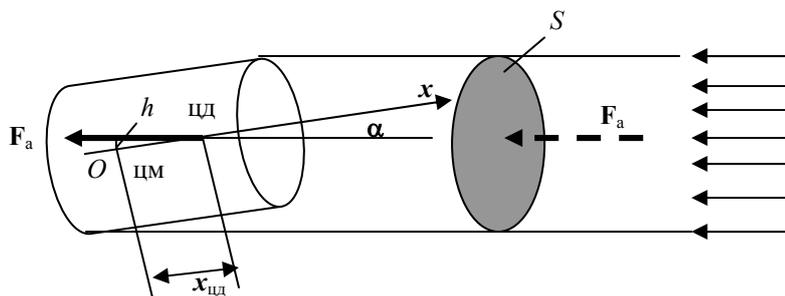


Рис. 2.18. Статически неустойчивый космический аппарат

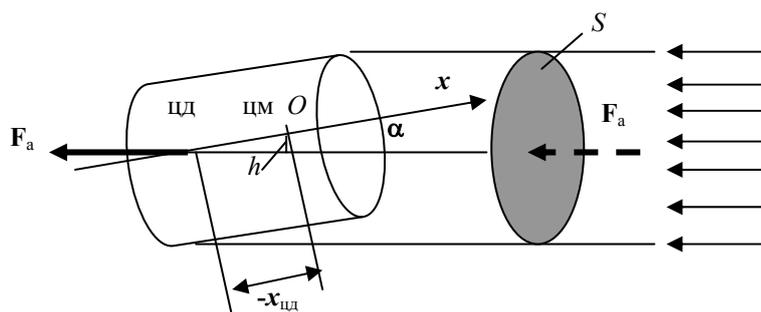


Рис. 2.19. Статически устойчивый космический аппарат

Аэродинамический момент равен нулю при  $\alpha = 0$ . Рассмотрим два случая равновесия.

Пусть центр давления находится впереди центра масс. Если космический аппарат повернулся из положения равновесия на малый угол  $\alpha$ , возникает опрокидывающий аэродинамический момент

$$M_a = F_a h \approx F_a x_{цд} \alpha,$$

действующий на плече  $h$  против часовой стрелки и стремящийся вывести космический аппарат из состояния равновесия. При таком взаимном расположении центра масс и центра давления положение равновесия статически неустойчиво (рис. 2.18).

Пусть центр давления находится позади центра масс. Если космический аппарат повернулся из положения равновесия на малый угол  $\alpha$ , то появляется восстанавливающий аэродинамический момент, действующий на плече  $h$  по часовой стрелке и стремящийся вернуть космический аппарат в исходное состояние. Такое положение равновесия статически устойчиво (рис. 2.19).

Устойчивость или неустойчивость состояния равновесия определяется знаком производной

$$\partial M_a / \partial \alpha = M_a^\alpha = c x_{\text{цд}} S q.$$

Положение равновесия неустойчиво, если  $\partial M_a / \partial \alpha > 0$  ( $x_{\text{цд}} > 0$ ), и устойчиво, если

$$\partial M_a / \partial \alpha < 0 \quad (x_{\text{цд}} < 0).$$

Аэродинамические моменты удается рассчитать весьма приблизительно, поскольку плотность атмосферы, входящая в формулу скоростного напора, может изменяться в широких пределах в зависимости от многих факторов, таких как время года и солнечная активность. На больших высотах (более 140 км) плотность атмосферы в ночное и дневное время различается в десятки раз [53]. Методика расчета плотности верхней атмосферы содержится в [72]. Там же даются рекомендации по расчету аэродинамических коэффициентов элементарной площадки. Зависимости аэродинамических коэффициентов от местного угла атаки построены в [70, с. 96].

Уровень аэродинамических моментов, действующих на спутник «Метеор» на высоте 850 км, не превышает  $2 \cdot 10^{-6}$  Н·м.

### 2.8.3. Моменты сил светового давления и магнитные моменты

Величина светового давления равна отношению потока световой энергии  $E$  к скорости света  $c$ . Поток энергии изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от точечного источника света. Световое давление  $p$  на расстоянии  $R$  определяется по формуле

$$p = E_0(R_0/R)^2/c,$$

где  $E_0$  – известное значение потока световой энергии для известного расстояния  $R_0$ . В качестве  $R_0$  обычно берется среднее расстояние от Земли до Солнца.

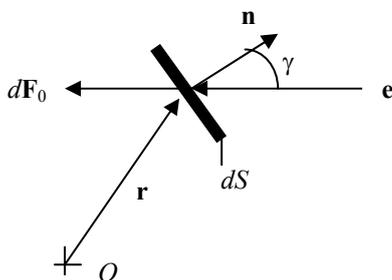


Рис. 2.20. Сила светового давления, действующая на элементарную площадку при  $\epsilon = 0$

Взаимодействие светового потока с поверхностью космического аппарата зависит от коэффициента отражения и во многом аналогично взаимодействию молекул разреженной газовой среды с его корпусом [85]. Коэффициент отражения  $\epsilon$  равен отношению плотности энергии отраженного потока к плотности энергии падающего потока. При  $\epsilon = 0$  (абсолютно черное тело) эффект погло-

щения солнечных лучей аналогичен абсолютно неупругому удару, при  $\varepsilon = 1$  (зеркало) эффект зеркального отражения аналогичен упругому соударению. Для промежуточных значений  $0 < \varepsilon < 1$  действуют оба механизма одновременно – поглощение и отражение.

Рассмотрим случай  $\varepsilon = 0$ .

Выделим на поверхности космического аппарата элементарную площадку  $dS$  (рис. 2.20).

Элементарная сила  $d\mathbf{F}_0$ , действующая на площадку  $dS$ , пропорциональна световому давлению:

$$d\mathbf{F}_0 = p \cos \gamma dS \mathbf{e},$$

где  $\gamma$  – угол падения солнечных лучей – угол между ортом направления солнечных лучей  $\mathbf{e}$  и ортом внешней нормали к площадке  $\mathbf{n}$ . Сила  $d\mathbf{F}_0$  действует в направлении солнечных лучей.

По своей структуре формула для  $d\mathbf{F}_0$  совпадает с формулой для аэродинамической силы  $d\mathbf{F}_a$  при замене светового давления  $p$  на скоростной напор  $q$  (с коэффициентом  $c$ ) и введении обозначения  $\mathbf{e} = -\mathbf{V}/V$ .

Рассмотрим случай  $\varepsilon = 1$ . При зеркальном отражении давление на площадку оказывают и падающие и отраженные лучи (рис. 2.21).

Обе элементарные силы численно равны  $dF_0$ , их равнодействующая  $d\mathbf{F}_1$  направлена по внутренней нормали к площадке. Сила  $d\mathbf{F}_1$  численно равна сумме проекций двух элементарных сил на внутреннюю нормаль –  $\mathbf{n}$ :

$$d\mathbf{F}_1 = -2 dF_0 \cos \gamma \mathbf{n} = -2p \cos^2 \gamma dS \mathbf{n}.$$

При  $0 < \varepsilon < 1$  суммарная сила, действующая на элементарную площадку, связана с поглощением и отражением солнечных лучей:

$$d\mathbf{F}_c = (1 - \varepsilon)d\mathbf{F}_0 + \varepsilon d\mathbf{F}_1 = p \cos \gamma [(1 - \varepsilon)\mathbf{e} - 2\varepsilon \cos \gamma \mathbf{n}] dS.$$

Коэффициенты  $(1 - \varepsilon)$  и  $\varepsilon$  определяют соотношение между силами, вызванными поглощением и отражением солнечных лучей.

Момент сил светового давления вычисляется как интеграл по поверхности  $S$ , освещенной Солнцем,

$$\mathbf{M}_c = \int \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_c,$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор площадки  $dS$  относительно центра масс  $O$  космического аппарата.

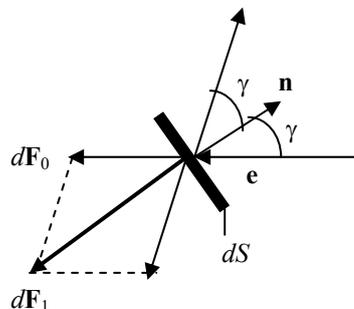


Рис. 2.21. Равнодействующая  $d\mathbf{F}_1$  сил светового давления от падающих и отраженных лучей

Точное вычисление момента  $M_c$  затруднено, поскольку космический аппарат имеет сложную конфигурацию, а поверхность  $S$ , освещенная Солнцем, меняется в зависимости от ориентации космического аппарата. Трудности возрастают, если различные части поверхности космического аппарата имеют разные коэффициенты отражения. По аналогии с аэродинамическими моментами, для оценки возмущающего момента  $M_c$  могут использоваться эмпирические формулы [7].

На геостационарной орбите преобладают моменты сил светового давления. Экспериментами с системой разгрузки метеорологического спутника «Электро» установлено, что уровень возмущающих моментов на геостационарной орбите не превышает  $10^{-5}$  Н·м. Эта величина, как обобщенный показатель, характеризует уровень технических достижений, связанных с конструированием и компоновкой космических аппаратов.

**Пример 2.9.** Рассчитаем момент сил светового давления, действующий на космический аппарат «Метеор-М».

Исходным материалом для расчета момента сил светового давления является компоновочная схема космического аппарата (рис. 2.22). Ее особенность состоит в том, что ось вращения солнечных батарей (СБ) параллельна оси  $Ox$  и вынесена на консоли за пределы цилиндрического корпуса.

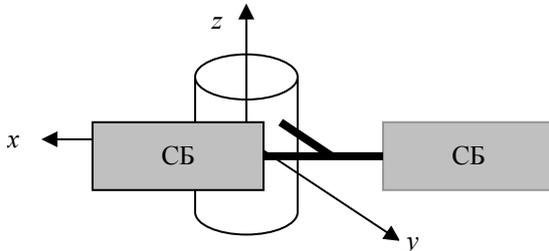


Рис. 2.22. Схема космического аппарата

предела цилиндрического корпуса.

На космический аппарат действует момент сил светового давления, если линия действия результирующей силы светового давления не проходит через центр масс космического аппарата. Ось вращения солнечных батарей расположена на значительном удалении от центра масс космического аппарата, что служит предпосылкой возникновения

момента сил светового давления. Пусть  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, нормальный к активной поверхности солнечных батарей. Положение вектора  $\mathbf{n}$  и плоскости солнечных батарей относительно связанных

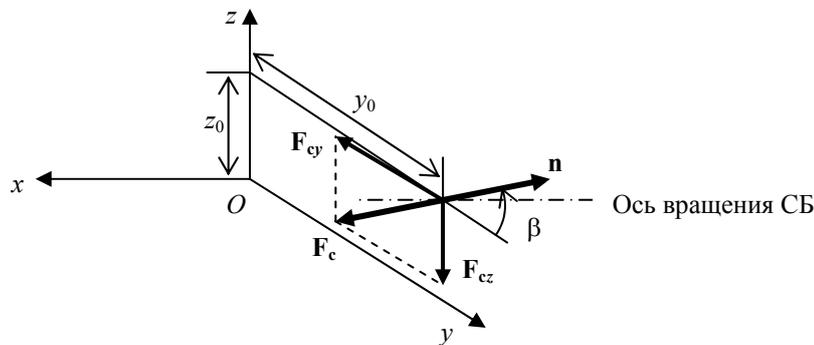


Рис. 2.23. Сила солнечного давления

осей космического аппарата  $Oxuz$  определяется углом  $\beta$ , который отсчитывается от оси  $Oy$ . Положительному направлению отчета угла соответствует вращение против часовой стрелки, если смотреть со стороны оси  $Ox$ .

Примем гипотезу зеркального отражения солнечных лучей от поверхности батарей. В этом случае сила солнечного давления направлена противоположно вектору  $\mathbf{n}$ . Солнечные батареи расположены симметрично относительно корпуса космического аппарата, поэтому центр приложения результирующей силы  $\mathbf{F}_c$  совпадает с точкой пересечения оси вращения солнечных батарей с координатной плоскостью  $Oyz$  (рис. 2.23). Положение центра давления относительно центра масс космического аппарата  $O$  определяется вектором  $\mathbf{r} = (0, y_0, z_0)$ .

Момент сил солнечного давления

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_c$$

действует вокруг оси  $Ox$  и зависит от углового положения солнечных батарей

$$M_{cx} = F_{cz}y_0 - F_{cy}z_0,$$

где  $F_{cy} = -F_c \cos\beta$ ;  $F_{cz} = -F_c \sin\beta$ .

Сила солнечного давления  $F_c$  является функцией времени, поскольку угол падения солнечных лучей  $\gamma$  зависит от угла поворота солнечных батарей  $\beta$  и углового положения Солнца в связанной системе координат [85, с. 171]:

$$F_c = 2PS\cos^2\gamma(t),$$

где  $P$  – солнечное давление,  $S$  – площадь солнечных батарей.

Определим временную зависимость  $\gamma(t)$ .

Пусть  $\mathbf{s}$  – единичный вектор, направленный из центра  $O$  на Солнце. Угол между линией визирования Солнца и бинормалью орбиты обозначим  $i$ . Изменения угла  $i$  связаны с прецессией плоскости орбиты и годовым движением Солнца по эклиптике. Для коротких интервалов времени, соизмеримых с периодом обращения космического аппарата по орбите, будем считать угол  $i$  постоянным. При таком допущении вектор  $\mathbf{s}$  описывает в орбитальной системе координат  $Ox_0y_0z_0$  поверхность кругового конуса с осью симметрии  $Oy_0$  и углом  $2i$  при вершине. Положение вектора  $\mathbf{s}$  на поверхности конуса в текущий момент времени  $t$  может быть задано углом  $u = \omega_0 t$ , где  $\omega_0$  – угловая скорость орбитального движения (рис. 2.24). За начало отсчета времени выберем момент восхода Солнца над плоскостью местного горизонта  $Ox_0y_0$ .

Будем полагать, что оси связанной системы координат совпадают с одноименными осями орбитальной системы координат. Найдем проекции единич-

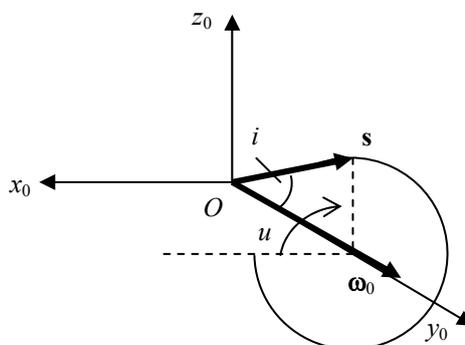


Рис. 2.24. Угловое положение Солнца

ных векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{s}$  на связанные оси

$$\begin{aligned} n_x &= 0; n_y = \cos\beta; n_z = \sin\beta; \\ s_x &= \sin i \cos u; s_y = \cos i; s_z = \sin i \sin u. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Угол падения солнечных лучей (угол между вектором  $\mathbf{n}$ , приведенным в точку  $O$ , и единичным вектором  $\mathbf{s}$ )

$$\gamma = \arccos(\mathbf{n} \times \mathbf{s})$$

после подстановки соотношений (2.26) вычисляется по формуле

$$\gamma = \arccos(\cos\beta \cos i + \sin\beta \sin i \sin\omega_0 t).$$

Возмущающий момент равен нулю, когда космический аппарат попадает в тень Земли. Время пребывания в тени  $T_T$  зависит от высоты орбиты  $H$  и углового положения Солнца относительно бинормали орбиты  $i$

$$T_T = T \arccos[1 - R^2/(R + H)^2]^{1/2} / \pi \sin i,$$

где  $R$  – радиус Земли,  $T = 2\pi/\omega_0$  – период обращения космического аппарата.

Космический аппарат не попадает в тень Земли, если угловое положение Солнца удовлетворяет условию

$$i < \arccos[R/(R+H)].$$

Солнечное давление действует не только на солнечные батареи, но и на корпус космического аппарата.

Однако общая площадь продольных сечений цилиндрического корпуса и аппаратуры, установленной в торце корпуса, значительно меньше площади солнечных батарей.

В силу относительной симметрии конструкции центр давления находится вблизи центра масс.

Поэтому моментом силы солнечного давления на корпус можно пренебречь по сравнению с моментом силы, действующей на солнечные батареи.

Оценим максимальную величину момента сил солнечного давления. Действие максимального момента

$$(M_{cx})_{\max} = 2PS(y_0^2 + z_0^2)^{1/2}$$

связано с выполнением условий  $u = 1/2\pi$ ,  $\beta = i = -\arcsin y_0(y_0^2 + z_0^2)^{-1/2}$ . При этом направление солнечных лучей перпендикулярно поверхности солнечных батарей ( $\gamma = 0$ ), а линия действия силы солнечного давления перпендикулярна отрезку, соединяющему центр давления и центр масс.

При  $S = 30 \text{ м}^2$ ,  $P = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ Н/м}^2$  [14 с.34],  $y_0 = 1 \text{ м}$ ,  $z_0 = 0,35 \text{ м}$  момент сил солнечного давления не превышает  $3 \cdot 10^{-4} \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

Магнитный момент  $\mathbf{M}_m$  возникает в результате взаимодействия магнитного поля космического аппарата с геомагнитным полем

$$\mathbf{M}_m = \mathbf{P} \times \mathbf{B},$$

где  $\mathbf{P}$  – вектор магнитного момента,  $\mathbf{B}$  – вектор индукции магнитного поля Земли.

Вектор  $\mathbf{P}$  можно представить в виде суммы двух составляющих

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2,$$

где  $\mathbf{P}_1$  – вектор магнитного момента, обусловленный наличием на космическом аппарате токовых систем и постоянных магнитов;  $\mathbf{P}_2$  – вектор магнитного момента, обусловленный намагничиванием оболочки космического аппарата в магнитном поле Земли.

Причинами появления магнитных моментов могут служить остаточные моменты магнитоприводов, применяемых в системах разгрузки электромеханических систем, постоянные магниты, кабельная сеть, вихревые токи, возникающие при вращении космического аппарата.

#### 2.8.4. Анализ возмущающих моментов

Суммарный момент  $\mathbf{M}$ , действующий на космический аппарат, вычисляется как сумма гравитационного, аэродинамического, магнитного моментов и момента сил светового давления

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_c + \mathbf{M}_m.$$

В зависимости от конкретных условий каждый из названных моментов может оказаться основным в сумме, составляющей полный момент [70, 85].

На малой высоте (200 – 300 км) преобладает аэродинамический момент. Аэродинамические силы и моменты пропорциональны скоростному напору  $q = \frac{1}{2}\rho V^2$ . При изменении высоты полёта на малую долю радиуса Земли скорость  $V$  изменяется мало, а плотность  $\rho$  чрезвычайно сильно зависит от высоты. С увеличением высоты орбиты аэродинамический момент резко убывает, поскольку по экспоненциальной зависимости убывает плотность окружающей газовой среды [1, 116].

На высотах более 400 км преобладает гравитационный момент. При удалении от Земли он убывает в соответствии с формулами (2.20), (2.26), но значительно медленнее, чем аэродинамический момент.

Магнитный момент обычно сравним с гравитационным, но его величина в значительной степени зависит от электротехнических характеристик космического аппарата.

При полетах вблизи Земли момент сил солнечного давления мал по сравнению с гравитационным, аэродинамическим и магнитным моментами.

На высотах, превышающих несколько радиусов Земли (например для геостационарного метеорологического спутника «Электро»), гравитационный момент мал и преобладает момент сил солнечного давления.

На высотах более 700 км (например для спутника «Метеор») момент сил светового давления превышает аэродинамический момент.

На высотах 300 – 400 км гравитационный, аэродинамический и магнитный моменты сравнимы по величине.

Существуют и другие возмущающие моменты, например от ударов микрометеоритов. Обычно их влиянием пренебрегают. Существует возмущающий момент от кулоновых сил. Он возрастает на низких орбитах, однако остается на 2-3 порядка меньше гравитационного момента.

Возмущающие моменты могут возникать и по техническим причинам: при нарушениях герметичности корпуса космического аппарата и утечках газа.

Следует оговориться, что проведенное сравнение составляющих полного момента носит условный характер, поскольку численное значение моментов зависит от формы космического аппарата, траектории полета и многих других факторов.

**РЕАКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ  
КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ**

- ◆ Назначение и состав системы
- ◆ Динамика релейной системы  
в режиме стабилизации
- ◆ Двусторонние одноимпульсные  
колебания
- ◆ Односторонние колебания
- ◆ Программные повороты

### 3.1. НАЗНАЧЕНИЕ И СОСТАВ СИСТЕМЫ

Среди активных систем ориентации реактивные системы появились первыми. Космические корабли «Восток», «Восход», «Союз», «Салют», «Джемини», «Аполлон», «Шатл» оборудованы реактивными системами ориентации.

Исполнительными органами реактивных систем ориентации являются реактивные двигатели [7, 85]. Реактивные системы ориентации могут применяться на всех типах космических аппаратов в различных режимах ориентации:

- успокоение космического аппарата после отделения от носителя;
- поиск ориентиров;
- стабилизация в орбитальной и инерциальной системах координат;
- программные повороты.

Для полной ориентации космического аппарата необходимо управлять его угловым положением вокруг трех осей.

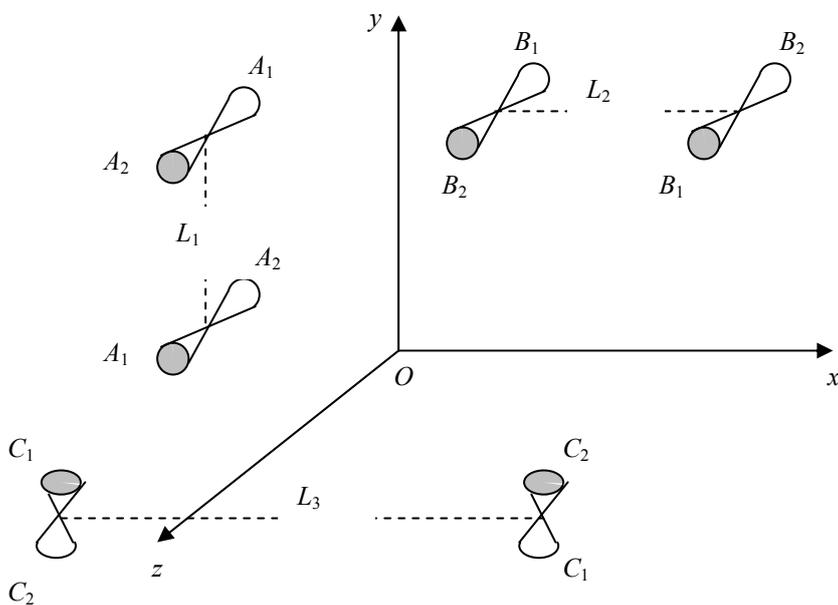


Рис. 3.1. Схема установки реактивных двигателей

Желательно располагать реактивные двигатели на большом плече относительно центра масс.

Минимальное число двигателей, обеспечивающее независимое управление вокруг трёх осей, равно шести. Оси сопел должны располагаться в плоскостях, проходящих через центр масс и перпендикулярных главным осям инерции космического аппарата. Конструкция космического аппарата не всегда позволяет выполнить такое условие расположения. При «свободном» расположении двигателей на космическом аппарате их число приходится

увеличивать. Схема из двенадцати двигателей, объединённых в пары, изображена на рис. 3.1 [85].

Пара реактивных двигателей  $A_1A_1$  создает положительный управляющий момент вокруг оси  $Ox$ :

$$M_x = PL_1,$$

где  $P$  – тяга одного двигателя;  $L_1$  – расстояние между двигателями.

Пара реактивных двигателей  $A_2A_2$  создает отрицательный управляющий момент вокруг оси  $Ox$ :

$$M_x = -PL_1.$$

Аналогично пары  $B_1B_1$  и  $B_2B_2$  создают соответственно положительный и отрицательный управляющие моменты вокруг оси  $Oy$ :

$$\begin{aligned} M_y &= PL_2; \\ M_y &= -PL_2, \end{aligned}$$

а пары  $C_1C_1$  и  $C_2C_2$  создают моменты вокруг оси  $Oz$ :

$$\begin{aligned} M_z &= PL_3; \\ M_z &= -PL_3, \end{aligned}$$

где  $L_2, L_3$  – расстояния между двигателями пары.

Использованием пар реактивных двигателей (см. рис. 3.1) обеспечивается независимое управление по трём осям, при этом к центру масс космического аппарата не прикладывается никаких сил и не искажается его орбита.

Реактивные двигатели могут располагаться несимметрично относительно осей космического аппарата, поскольку величина управляющего момента зависит только от расстояния между ними.

Известны и другие схемы установки реактивных двигателей [85].

Реактивные системы обладают высоким быстродействием, что обусловлено большими управляющими моментами, создаваемыми реактивными двигателями.

Внешние и внутренние возмущающие моменты, действующие на космический аппарат, значительно меньше управляющих моментов реактивных двигателей, поэтому влиянием возмущающих моментов на динамику космических аппаратов часто можно пренебречь.

Это позволяет использовать упрощенные (линеаризованные) уравнения движения космического аппарата вокруг центра масс и рассматривать три канала системы ориентации независимо.

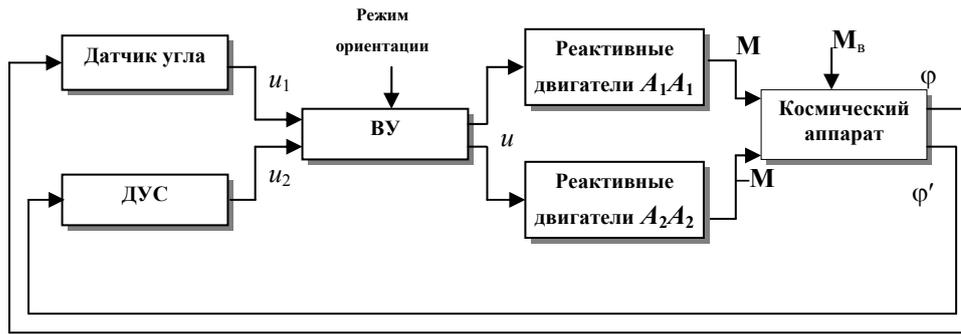


Рис. 3.2. Функциональная схема реактивной системы ориентации

В состав реактивной системы ориентации входят датчики угла ориентации и угловой скорости (ДУС), вычислительное устройство (ВУ) и реактивные двигатели [7, 85]. Функциональная схема одного канала реактивной системы ориентации изображена на рис. 3.2.

На основе информации  $u_1$ ,  $u_2$ , поступающей с датчиков угла и угловой скорости, вычислительное устройство вычисляет сигналы управления реактивными двигателями  $u$ . Управляющий момент  $M$  реактивных двигателей вызывает изменения углового положения  $\varphi$  и угловой скорости  $\varphi'$  космического аппарата, которые фиксируются датчиками. На космический аппарат действует возмущающий момент  $M_b$ .

Сигнал датчика угловой скорости используется при выполнении программных поворотов и для демпфирования колебаний, что обеспечивает устойчивость и качество замкнутой системы.

Наибольшее распространение получили релейные системы ориентации. Для их исследования широко используется метод фазовой плоскости [85, 90].

#### Метод фазовой плоскости

Применение метода фазовой плоскости для исследования движения космического аппарата вокруг центра масс рассмотрим на примере канала крена. Движение космического аппарата вокруг оси крена описывается дифференциальным уравнением второго порядка [85]

$$Jd^2\varphi/dt^2 = M(\varphi, d\varphi/dt),$$

где  $\varphi$  – угол крена;  $J$  – момент инерции космического аппарата вокруг оси крена;  $M$  – управляющий момент.

Введем новые переменные  $x = \varphi$ ,  $y = \varphi' = d\varphi/dt$ .

В новых переменных исходному уравнению движения будет соответствовать система уравнений

$$\begin{aligned} Jdy/dt &= M(x, y), \\ dx/dt &= y. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Произведем деление первого равенства (3.1) на второе:

$$dy/dx = \varepsilon(x, y)/y, \quad (3.2)$$

где  $\varepsilon(x, y)/J$  – ускорение космического аппарата, обусловленное действием управляющего момента.

Исследуем движение космического аппарата на фазовой плоскости (рис. 3.3).

Пусть начальное состояние космического аппарата задано точкой  $A$ . Оно характеризуется угловым отклонением  $\varphi_A$  и угловой скоростью  $\varphi'_A$ . Если  $\varepsilon = 0$ , то из уравнения (3.2) получим

$$dy/dx = 0$$

и  $y = \varphi'_A = \text{const}$ , т. е. фазовая траектория будет прямой, параллельной оси  $Ox$ . Это

естественно: если управляющий момент равен нулю, космический аппарат вращается по инерции и его угловая скорость остается постоянной. С течением времени угол будет возрастать, так как  $\varphi'_A > 0$ , при этом изображающая точка будет двигаться по фазовой плоскости из точки  $A$  в точку  $B$ . Поскольку верхней полуплоскости соответствуют положительные скорости  $\varphi'_A$ , все траектории в верхней полуплоскости будут идти вправо. Нижней полуплоскости соответствуют отрицательные скорости  $\varphi'$ , все траектории в ней будут идти влево.

Пусть в точке  $B$  на космический аппарат начинает действовать постоянное управляющее ускорение отрицательного знака  $\varepsilon = \text{const} < 0$ . Из уравнения (3.2) получим

$$ydy = \varepsilon dx. \quad (3.3)$$

Интегрируя соотношение (3.3), найдем уравнение фазовой траектории

$$1/2 y^2 = \varepsilon x + C_1.$$

Фазовая траектория будет параболой с вершиной, лежащей на оси  $Ox$ . Постоянная интегрирования  $C_1$  определяется начальными условиями.

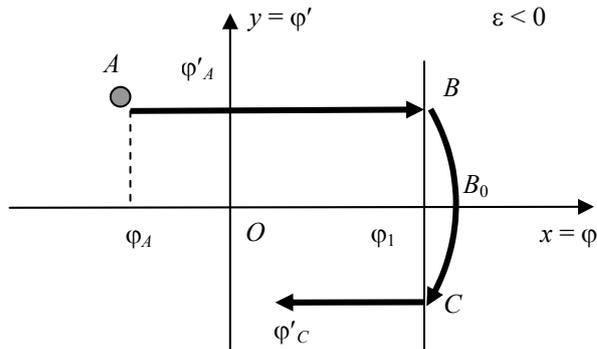


Рис. 3.3. Фазовые траектории

В точке  $B_0$  фазовой траектории вращение космического аппарата прекращается, затем под действием момента скорость меняет знак ( $\varphi' < 0$ ). Фазовая траектория пересекает ось  $Ox$  под прямым углом. Действительно, при  $y \rightarrow 0$   $dy/dx \rightarrow \infty$  ( $\varepsilon \neq 0$ ). Если в точке  $C$  действие момента прекратится ( $\varepsilon = 0$ ), то изображающая точка начинает двигаться влево параллельно оси  $Ox$  с постоянной скоростью  $\varphi'_C$ .

Таким образом, полученная фазовая траектория состоит из участков прямых, параллельных оси  $Ox$ , и парабол с вершинами на оси  $Ox$ .

### 3.2. ДИНАМИКА РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В РЕЖИМЕ СТАБИЛИЗАЦИИ

В режиме стабилизации, когда угловые отклонения и угловые скорости космического аппарата малы, датчики угла и угловой скорости полагаем линейными, без насыщения и запаздывания. Роль вычислительного устройства в режиме стабилизации играет управляющее реле, которое включается и отключается по сигналам датчиков. Полагаем, что в течение всего времени включения реактивных двигателей их управляющий момент  $M$  остается постоянным, а его знак зависит от знака выходного сигнала реле  $u$ . Включение и отключение реактивных двигателей происходит с запаздыванием  $h$ . Влиянием внешних возмущающих моментов будем пренебрегать ( $M_v = 0$ ).

Структурная схема реактивной системы в режиме стабилизации с учетом принятых допущений изображена на рис. 3.4.

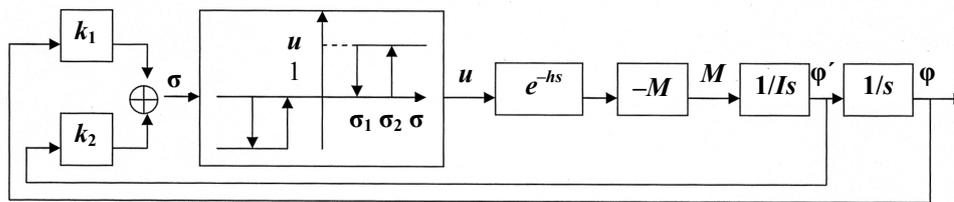


Рис. 3.4. Структурная схема канала крена реактивной системы ориентации

Сигнал управления  $\sigma$  на входе реле формируется как линейная комбинация сигналов угла  $\varphi$  и угловой скорости  $\varphi'$

$$\sigma = k_1\varphi + k_2\varphi' = k_1(\varphi + \tau\varphi'), \quad (3.4)$$

где  $k_1, k_2$  – коэффициенты усиления (передачи) сигналов углового рассогласования и угловой скорости;  $\tau = k_2/k_1$  – коэффициент суммирования сигналов.

Величина  $\sigma_2$  определяет размеры нейтралы, т. е. зоны значений  $\varphi$  и  $\varphi'$ , при которых управляющий момент  $M$  остается равным нулю. Эта величина непо-

средственно связана с допустимой ошибкой системы ориентации. Так как в режиме стабилизации угловая скорость космического аппарата должна быть малой, то отбрасывая в (3.4) слагаемое с  $\varphi'$ , можно дать такую оценку погрешности стабилизации:

$$\varphi_0 \cong \sigma_2/k_1.$$

Зависимость сигнала управления  $\sigma$  от  $\varphi$  необходима для получения заданной точности стабилизации, в то время как зависимость от  $\varphi'$  имеет целью введение в процесс стабилизации демпфирования.

Исследуем влияние параметров системы ориентации на динамику стабилизации космического аппарата [85].

Предположим вначале, что  $\sigma_1 = \sigma_2$ , запаздывание на включение и выключение реактивных двигателей отсутствует ( $h = 0$ ), а в сигнале управления используется только информация об угловом положении космического аппарата ( $k_2 = 0$ ). Пусть исходное положение космического аппарата определяется точкой  $A$  на фазовой плоскости (рис. 3.5).

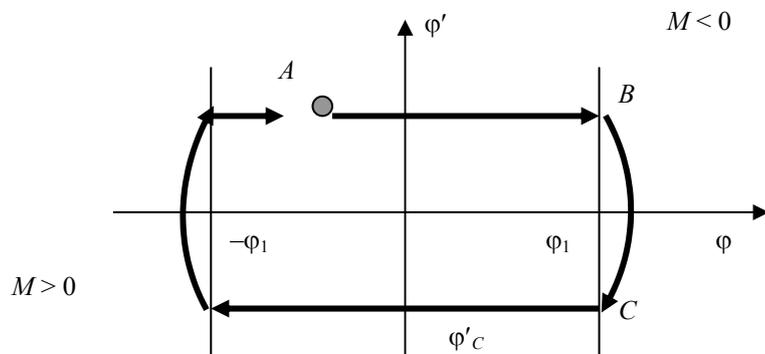


Рис. 3.5 Незатухающие колебания

Наличие положительной угловой скорости у космического аппарата приводит к нарастанию углового отклонения. Когда угол  $\varphi$  достигнет значения

$$\varphi_1 = \sigma_1/k_1,$$

произойдет включение реле (точка  $B$ ) и на космический аппарат начнет действовать управляющий момент, знак которого противоположен знаку угла. Под действием управляющего момента изображающая точка движется по параболе. Когда угол  $\varphi$  становится меньше  $\varphi_1$  (точка  $C$ ), реактивные двигатели отключаются и движение изображающей точки влево происходит с постоянной отрицательной скоростью  $\varphi'_C = -\varphi'_B = -\varphi'_A$ . На линии  $\varphi = -\varphi_1$  реле включается в противополож-

ную сторону. Космический аппарат совершает незатухающие колебания. Параметры колебаний зависят от начальных условий (начального положения точки  $A$ ).

Учтем влияние на движение космического аппарата запаздывания реактивных двигателей  $h$ .

Когда угловое отклонение космического аппарата достигнет значения  $\varphi_1 = \sigma_1/k_1$  (точка  $B$ ), включается управляющее реле, однако управляющий момент появится только через время  $h$ . За это время угол увеличится на величину  $\Delta\varphi_1 = \varphi'_A h$  (рис. 3.6). Управляющий момент появится, когда изображающая точка займет положение  $B_1$ . После этого движение происходит по параболе. В точке  $C$  на линии  $\varphi = \varphi_1$  управляющее реле отключается, но управляющий момент продолжает действовать и изображающая точка в течение времени  $h$  продолжает двигаться по параболе. Управляющий момент становится равным нулю только в точке  $C_1$ . Из точки  $C_1$  движение происходит влево по инерции с постоянной скоростью  $|\varphi'_{C1}| > \varphi'_B = \varphi'_A$ . Космический аппарат совершает колебания с возрастающей амплитудой и частотой.

Исследуем влияние на движение космического аппарата гистерезиса управляющего реле ( $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ), полагая  $h = 0$ . Включение реле происходит в точке  $B$  на линии  $\varphi = \varphi_2 = \sigma_2/k_1$  и в точке  $D$  на линии  $\varphi = -\varphi_2$  (рис. 3.7). Отключение реле происходит в точке  $C$  на линии  $\varphi = \varphi_1 = \sigma_1/k_1$  и в точке  $E$  на линии  $\varphi = -\varphi_1$ . Поскольку  $|\varphi'_{C1}| > \varphi'_B$ , а  $\varphi'_E > |\varphi'_{D1}| = |\varphi'_{C1}|$ , космический аппарат, как и в предыдущем случае, совершает колебания с возрастающей амплитудой и частотой.

Рассмотренные случаи показывают, что временное запаздывание реактивных двигателей и гистерезис управляющего реле вызывают неустойчивость системы. Для обеспечения устойчивости системы в закон управления вводится сигнал угловой скорости  $\varphi'(k_2 \neq 0)$ . Это приводит к наклону линий переключения реле на фазовой плоскости (рис. 3.8). Уравнение правой линии включения:

$$k_1 \varphi + k_2 \varphi' = \sigma_2$$

или

$$\varphi' = 1/\tau (-\varphi + \varphi_2),$$

где  $\varphi_2 = \sigma_2/k_1$ ;  $\tau = k_2/k_1$ .

Уравнение левой линии включения:

$$k_1 \varphi + k_2 \varphi' = -\sigma_2$$

или

$$\varphi' = 1/\tau (-\varphi - \varphi_2).$$

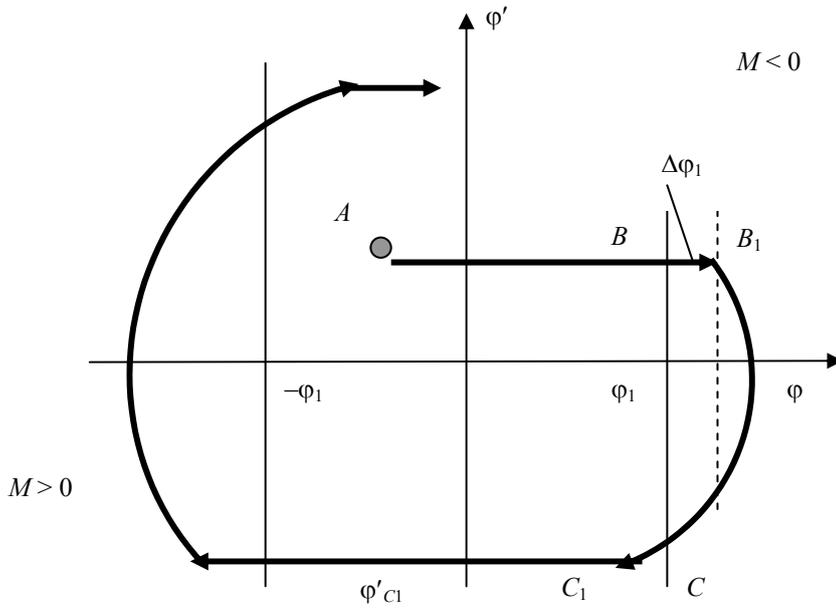


Рис. 3.6. Расходящиеся колебания, вызванные запаздыванием  $h$

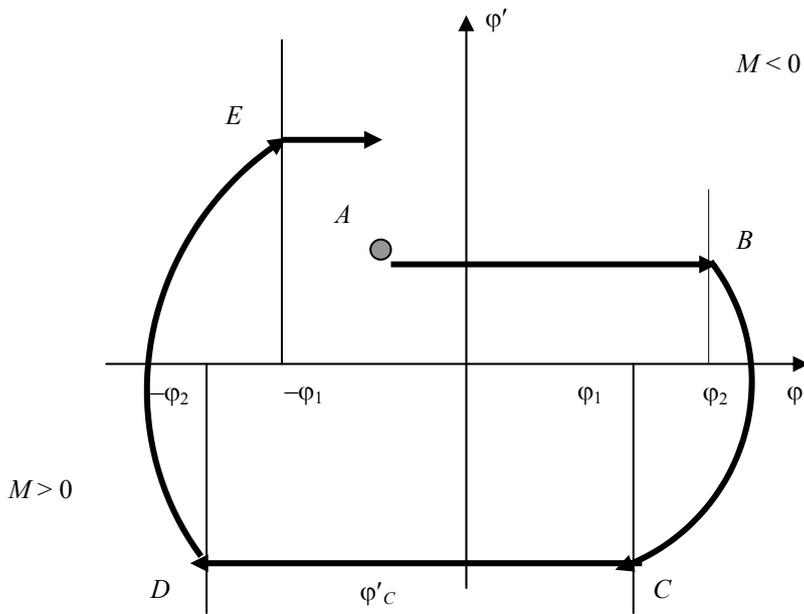


Рис. 3.7. Расходящиеся колебания при наличии гистерезиса реле

Аналогично записываются уравнения для правой и левой линий отключения реле:

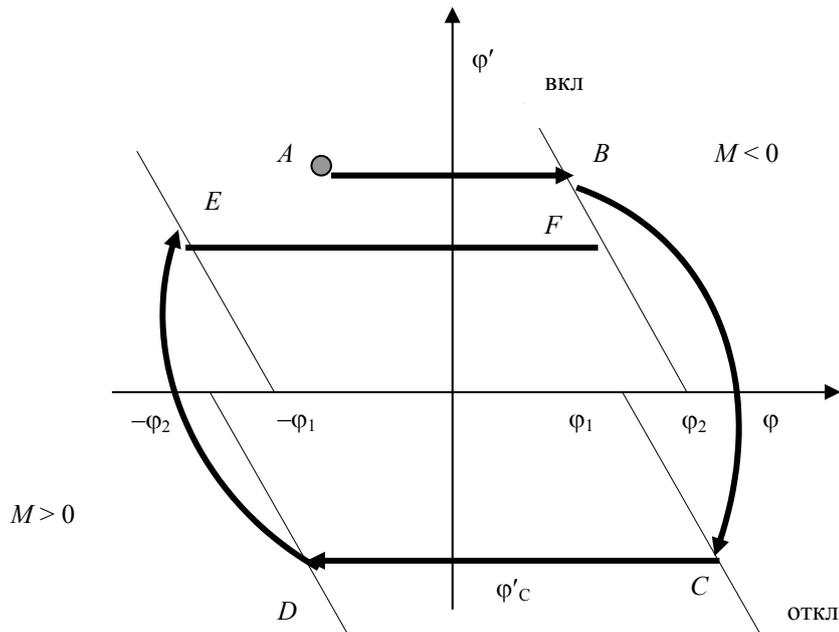
$$\begin{aligned}\varphi' &= 1/\tau (-\varphi + \varphi_1); \\ \varphi' &= 1/\tau (-\varphi - \varphi_1),\end{aligned}$$

где  $\varphi_1 = \sigma_1/k_1$ .

Линии включения проходят через точки  $\varphi_2$  и  $-\varphi_2$ , а линии отключения через точки  $\varphi_1$  и  $-\varphi_1$  на оси угловых отклонений. Их наклон зависит от  $\tau$ :

$$\partial\varphi'/\partial\varphi = -1/\tau.$$

При  $\tau = 0$  ( $k_2 = 0$ ) линии переключения параллельны оси  $\varphi'$ , как это было в предыдущих случаях.



**Рис. 3.8. Затухающие колебания космического аппарата при введении сигнала угловой скорости**

Предположим, что в начальный момент времени космический аппарат имеет сравнительно большую скорость  $\varphi'_A$ . Изображающая точка пересекает правую линию включения в точке  $B$  (см. рис. 3.8). Управляющий момент  $M < 0$  переводит ее по параболической траектории в точку  $C$ , лежащую на правой линии отключения. На отрезке фазовой траектории  $CD$  управляющий момент равен нулю, а в точке  $D$ , лежащей на левой линии включения, возникает момент противоположного знака ( $M > 0$ ), который переводит фазовую траекто-

рию в точку  $E$ . Далее по прямой  $EF$  изображающая точка возвратится на первую линию включения. Если абсолютная величина угловой скорости в точке  $F$  меньше, чем в точке  $B$  ( $\varphi'_F < \varphi'_B$ ), то происходит демпфирование колебаний (угловая скорость снижается). Из условия симметрии парабол относительно оси абсцисс следует, что для уменьшения угловой скорости  $|\varphi'|$  за время действия управляющего момента нужно, чтобы угол  $\varphi$ , при котором происходит включение, был бы дальше от вершины параболы, чем угол, при котором производится выключение. Это условие демпфирования колебаний можно записать в виде

$$(\varphi_{\text{вкл}} - \varphi_{\text{выкл}})\text{sign}M > 0.$$

В частности при отсутствии гистерезиса ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2$ ) демпфирование происходит, если  $k_2 > 0$ .

Фазовая диаграмма показывает, что последующий цикл колебаний начинается с меньшей угловой скоростью, чем предыдущий. Однако подобный процесс не будет продолжаться беспрестанно. При малых угловых скоростях характер движения меняется. Начиная с некоторой угловой скорости, крутизна параболы становится больше наклона линии переключения и фазовая траектория перейдет в траекторию ступенчатого вида, заключенную между линиями включения и отключения. Возникает скользящий режим (рис. 3.9). Скользящий режим возникает и при отсутствии гистерезиса реле, поскольку у реальных двигателей существует минимальная продолжительность включения [85]. В конечном итоге космический аппарат начнет колебаться с угловой скоростью, не превышающей величины одной ступеньки. Эти колебания называются двусторонними одноимпульсными колебаниями.

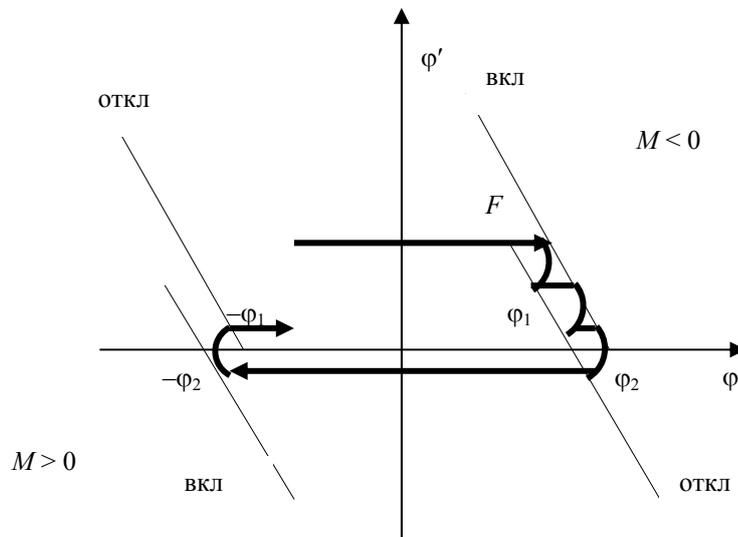
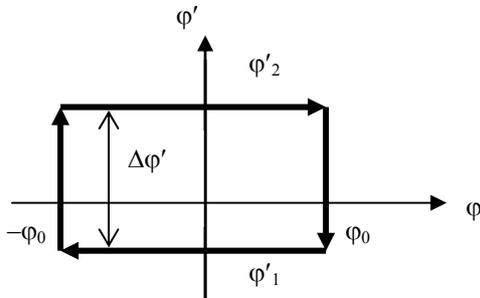


Рис. 3.9. Скользящий режим

Таким образом, вращательное движение космического аппарата характеризуется тремя этапами:

- затухающие колебания;
- скользящий режим;
- незатухающие двусторонние одноимпульсные колебания.

### 3.3. ДВУСТОРОННИЕ ОДНОИМПУЛЬСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ



**Рис. 3.10. Двусторонние одноимпульсные колебания**

Рективные двигатели, включаемые при помощи реле, могут создавать три значения управляющего момента:  $-M$ ,  $0$ ,  $+M$ . Рассмотрим идеализированный цикл, который возникает при отсутствии внешних возмущающих моментов (рис. 3.10) [85].

Пусть  $\Delta t$  – минимальное время, на которое может быть включен двигатель-маховик. Полагая, что скорость космического аппарата при этом мгновенно изменяется на величину  $\Delta\dot{\varphi}$ . Если  $\sigma_1 = \sigma_2$ , то величина  $\varphi_0 = \sigma_1/k_1$  определяет погрешность стабилизации.

Время движения от  $\varphi_0$  до  $-\varphi_0$

$$T_1 = 2\varphi_0 / |\dot{\varphi}'_1|;$$

от  $-\varphi_0$  до  $\varphi_0$

$$T_2 = 2\varphi_0 / |\dot{\varphi}'_2|.$$

Время полного цикла

$$T = T_1 + T_2 = 2\varphi_0 \frac{|\dot{\varphi}'_1| + |\dot{\varphi}'_2|}{|\dot{\varphi}'_1 \dot{\varphi}'_2|}.$$

Поскольку  $|\dot{\varphi}'_1| + |\dot{\varphi}'_2| = \Delta\dot{\varphi}$ ,

$$T = 2\varphi_0 \frac{\Delta\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}'_1 \dot{\varphi}'_2|}.$$

Изменения во времени угла и угловой скорости изображены на рис 3.11.

Оценим расход топлива одним реактивным двигателем при одном его включении на время  $\Delta t$ .

Воспользуемся уравнением движения космического аппарата с моментом инерции  $J$  вокруг оси крена

$$J\varphi'' = M.$$

Чтобы упростить дальнейшие рассуждения, будем полагать, что управляющий момент одного знака  $M = PL$  создается одним двигателем с тягой  $P$ , расположенным на расстоянии (плече)  $L$  от оси вращения.

Интегрируя уравнение движения за время  $\Delta t$ , найдем

$$J\Delta\varphi' = PL\Delta t \quad (3.5)$$

Определим импульс тяги двигателя  $P\Delta t$  через расход массы  $\Delta m$  за время  $\Delta t$  и удельный импульс  $I$  [85]. Поскольку

$$I = P\Delta t / \Delta mg,$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести, то

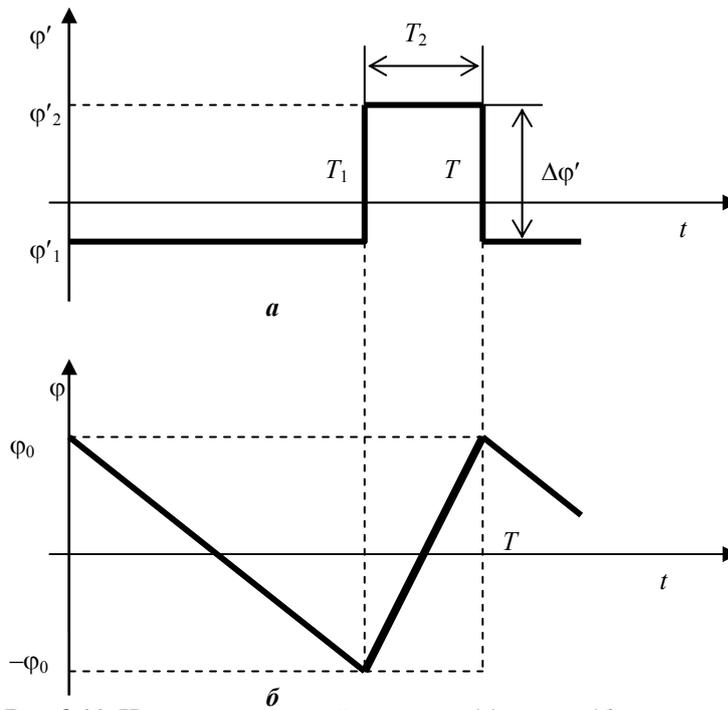


Рис. 3.11. Изменение угловой скорости (а) и угла (б) при двухсторонних колебаниях

$$P\Delta t = \Delta mgL. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.5) в (3.6), получим:

$$J\Delta\varphi' = \Delta m(gL). \quad (3.7)$$

К равенству (3.7) легко прийти, если непосредственно воспользоваться законом сохранения момента количества движения для этого случая в форме, приведённой в разделе 1.9:

$$J\Delta\varphi' = L(\Delta mw),$$

где  $w = gL$  – скорость истечения.

Формула (3.7) распространяется и на пары двигателей, если полагать, что  $L$  – расстояние между двигателями.

Из равенства (3.7) найдем расход массы за время  $\Delta t$

$$\Delta m = U_m \Delta\varphi',$$

где  $U_m = J/gL$  – коэффициент расхода массы топлива.

Для полного цикла, содержащего включение двух одинаковых двигателей, расход топлива составит

$$\Delta m_\Sigma = 2\Delta m = 2U_m \Delta\varphi'.$$

Средний расход  $m_{cp}$  за время цикла

$$T = 2\varphi_0 \frac{\Delta\varphi}{|\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2|},$$

т. е. расход в единицу времени, составит

$$m_{cp} = \frac{\Delta m_\Sigma}{T} = U_m \frac{|\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2|}{\varphi_0}.$$

Величины  $\varphi'_1$  и  $\varphi'_2$ , входящие в формулу для среднего расхода, случайные, зависящие от того, как развивался переходный процесс. Максимум произведения  $|\varphi'_1 \varphi'_2|$  при условии  $|\varphi'_1| + |\varphi'_2| = \Delta\varphi'$  имеет место, когда  $|\varphi'_1| = |\varphi'_2| = \frac{1}{2} \Delta\varphi'$ . Поэтому максимальный расход соответствует симметричному циклу

$$m_{\max} = \frac{1}{4} U_m \frac{\Delta\dot{\varphi}^2}{\varphi_0}. \quad (3.8)$$

Эта формула полезна для оценки наибольшего возможного расхода топлива.

**Пример 3.1.** Вычислим расход топлива при следующих параметрах системы:

$$J = 10^5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; I = 100 \text{ с}; L = 1 \text{ м}; \Delta\varphi' = 10^{-4} \text{ рад/с}; \varphi_0 = 10^{-3} \text{ рад}.$$

Вычислим коэффициент расхода:

$$U_m = J/gIL = 10^5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/9,8 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}\cdot 1\text{ м}\cdot 100 \text{ с} \cong 100 \text{ кг}\cdot\text{с}.$$

Используя формулу (3.8), оценим максимальный расход топлива за одну секунду

$$m_{\max} = 0,25 \cdot 100 \text{ кг}\cdot\text{с}\cdot 10^{-8} \text{ с}^{-2}/10^{-3} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ кг/с}.$$

Расход топлива за один час составит 0,9 кг, за сутки 21,6 кг, за год – примерно 8 т.

Из формулы (3.8) следует, что *расход реактивного топлива возрастает с увеличением точности стабилизации* (с уменьшением угловой ошибки  $\varphi_0$ ).

Чтобы уменьшить расход, нужно стремиться к малым  $U_m$ . Для этого следует использовать экономичные двигатели (с высоким удельным импульсом) и устанавливать их на большом расстоянии от оси вращения космического аппарата. Средневременной расход массы пропорционален квадрату угловой скорости на цикле. Для уменьшения допустимой скорости  $\Delta\varphi'$  в режиме стабилизации необходимо уменьшать импульс реактивного двигателя  $P\Delta t$ . Поэтому минимально возможный импульс является важной характеристикой реактивного двигателя.

Реактивный двигатель не может одновременно развивать большую тягу и обладать малой величиной  $P\Delta t$ . Такое требование является противоречивым. Чтобы разрешить это противоречие, на борту устанавливаются разные системы реактивных двигателей: одни для быстрых поворотов космического аппарата (с большой тягой), другие – для длительной стабилизации (с малой тягой и соответственно малым импульсом).

### 3.4. ОДНОСТОРОННИЕ КОЛЕБАНИЯ

Двусторонние одноимпульсные колебания возникают при отсутствии внешних моментов. Другим крайним случаем является действие на космический аппарат большого возмущающего момента. Будем полагать, что он постоянный и начал действовать в тот момент, когда состояние космического аппарата характеризуется изображающей точкой  $A$ . Поскольку до действия момента в системе существовал двусторонний цикл, максимальная скорость в точке  $A$  не может превышать  $\Delta\varphi'$  ( $\Delta\varphi'$  – изменение скорости космического аппарата при включении реактивных двигателей на минимально-возможное время  $\Delta t$ ). Возмущающий момент  $M_v$  меняет вид фазовой траектории: изображающая точка движется по параболе в соответствии с уравнением

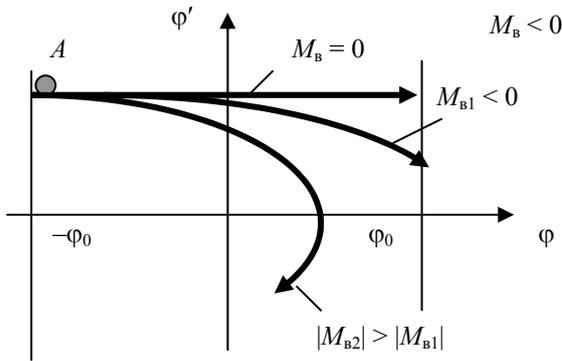


Рис. 3.12. Возникновение односторонних колебаний

Если возмущающий момент будет достаточно большим, то фазовая траектория перейдет из верхней полуплоскости в нижнюю, не достигнув линии переключения. Возникают односторонние колебания (рис. 3.12) [85].

Условие возникновения односторонних колебаний можно записать в виде [85]

$$M_B > \frac{1}{4} J \frac{\Delta \dot{\varphi}^2}{\varphi_0}$$

Односторонние колебания с максимально возможной угловой скоростью  $\Delta \dot{\varphi}'$  и наибольшим размахом  $2\varphi_0$  изображены на рис. 3.13, а.

Пусть теперь точка  $A$  занимает на линии включения случайное положение  $\varphi'_A < \Delta \varphi'$ . В силу симметрии изображающая точка вернется на линию переключения в точке  $A'$  (рис. 3.13, б). Импульс реактивного двигателя переместит ее в точку  $B$ :  $\varphi'_B = \varphi'_A + \Delta \varphi'$ . Внешний момент переведет изображающую точку в симметричное положение  $B'$ :

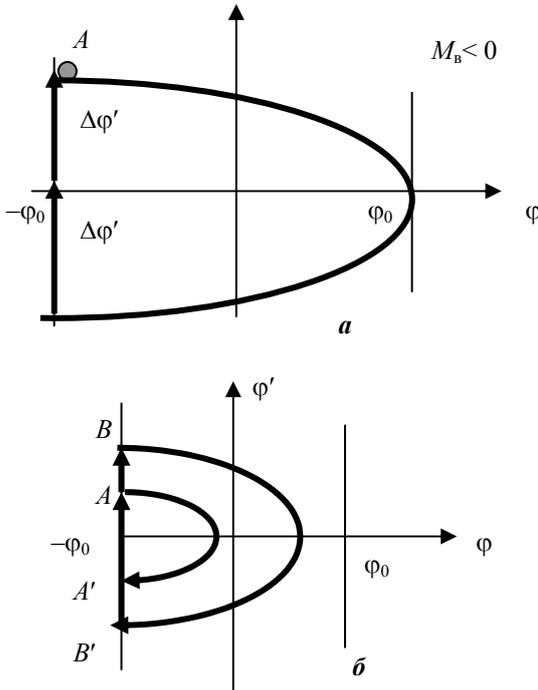


Рис. 3.13. Односторонние колебания: а – с максимальным размахом; б – при случайном положении точки  $A$

$$\varphi'_{B'} = -(\varphi'_A + \Delta \varphi') = \varphi'_A - \Delta \varphi'$$

Затем включается реактивный двигатель и изображающая точка из положения  $B'$  переходит в точку с координатой

$$\varphi'_{B'} + \Delta \varphi' = \varphi'_A,$$

т. е. в точку  $A$ .

Чтобы вычислить время цикла, воспользуемся уравнением движения

$$\varphi'' = -\varepsilon_B,$$

где  $\varepsilon_B = |M_B|/J$  – возмущающее ускорение.

Интегрируя уравнение движения при  $\varepsilon_B = \text{const}$ , получим

$$\varphi' = -\varepsilon_B t + \varphi'_A.$$

Обозначим через  $T_1$  время перехода из точки  $A$  в  $A'$ . Тогда

$$\varphi'_{A'} = -\varepsilon_B T_1 + \varphi'_A.$$

Отсюда

$$T_1 = (\varphi'_A - \varphi'_{A'})/\varepsilon_B = 2\varphi'_A/\varepsilon_B.$$

Аналогично, время перехода из точки  $B$  в точку  $B'$  составит

$$T_2 = 2\varphi'_B/\varepsilon_B.$$

Время цикла

$$T = T_1 + T_2 = 2(\varphi'_A + \varphi'_B)/\varepsilon_B = 2(\varphi'_A + \varphi'_{A'} + \Delta\varphi)/\varepsilon_B = 2\Delta\varphi/\varepsilon_B.$$

Отметим основные свойства одностороннего цикла [85]. В отличие от двустороннего цикла этот цикл всегда симметричен относительно оси абсцисс. На периоде односторонних колебаний существуют два элементарных цикла длительностью  $T_1$  и  $T_2$ . Реактивные двигатели включаются лишь на одной линии переключения и фазовый портрет как бы «прижат» к этой линии переключения.

Процесс изменения угловой скорости космического аппарата во времени изображен на рис. 3.14.

Рассмотрим частные случаи. Если  $T_1 \rightarrow 0$  и  $T_2 \rightarrow T$ , то возникает односторонний цикл, изобра-

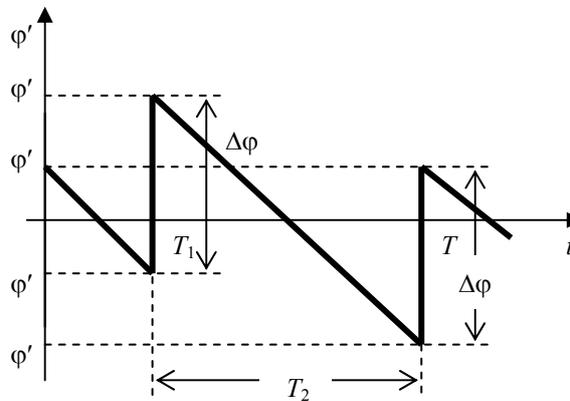


Рис. 3.14. Изменение угловой скорости при односторонних колебаниях

женный на рис. 3.13, а. На левой линии переключения сразу вырабатываются два импульса реактивных двигателей, один непосредственно за другим. Такой цикл условно можно считать состоящим из двух элементарных циклов, из которых один имеет нулевую амплитуду изменения угла. При  $T_1 = T_2$  величину  $T_1$  можно было бы рассматривать как период колебаний, однако для сохранения общности в этом случае будем считать односторонний цикл состоящим из двух одинаковых элементарных циклов, полагая  $T = 2T_1$ .

До сих пор мы считали, что на космический аппарат действует возмущающий момент отрицательного знака. При этом фазовая траектория из точки  $A$  идет в сторону сближения с осью  $\varphi$ , а односторонние колебания возникают около левой линии переключения. Если возмущающий момент положительный ( $\varepsilon_b > 0$ ), то после окончания переходных процессов односторонний цикл возникает на правой линии переключения [85].

Оценим расход реактивного топлива при односторонних колебаниях. Расход, соответствующий одному включению реактивного двигателя, вычисляется по формуле

$$\Delta m = U_m \Delta \varphi',$$

где  $U_m$  – коэффициент расхода.

За период колебаний реализуются два элементарных цикла, поэтому расход за период колебаний составит

$$\Delta m_\Sigma = 2\Delta m = 2U_m \Delta \varphi'.$$

Отсюда найдем расход в единицу времени

$$m_{\text{ср}} = \Delta m_\Sigma / T = 2U_m \Delta \varphi' / T = U_m \varepsilon_b,$$

где  $\varepsilon_b = M_b / J$  – ускорение космического аппарата с моментом инерции  $J$  под действием возмущающего момента  $M_b$ .

Полученное соотношение показывает, что при заданном коэффициенте расхода  $U_m$  средневременной расход топлива пропорционален внешнему возмущающему моменту и не зависит от  $\varphi_0$  и начальных условий. В этом смысле односторонний цикл существенно отличается от двустороннего цикла, который характеризуется сильной зависимостью от точности стабилизации.

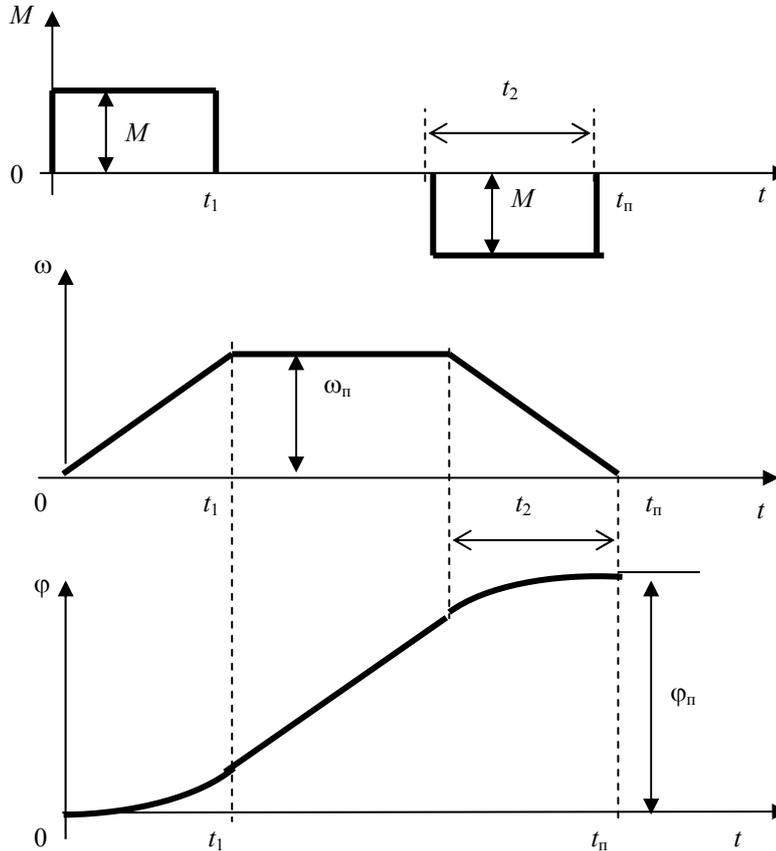
### 3.5. ПРОГРАММНЫЕ ПОВОРОТЫ

Рассмотрим одноканальную реактивную систему в режиме плоского поворотного маневра [85]. Полагаем, что в начальный момент времени космический аппарат находится в состоянии покоя:  $\omega(0) = 0$ .

Программный поворот космического аппарата на заданный угол  $\varphi_n$  складывается из трех движений:

- разгон за время  $t_1$  до заданной угловой скорости  $\omega_n$ ;
- вращение по инерции с программной скоростью  $\omega_n$ ;
- торможение за время  $t_2$  до нулевой скорости (рис. 3.15).

Аналогично осуществляется поиск ориентиров. Разница лишь в том, что угол программного поворота  $\varphi_n$  заранее известен. А при поиске ориентиров вращение космического аппарата прекращается тогда, когда появляется сигнал датчика угла, свидетельствующий о том, что нужный ориентир, например Солнце, находится в его поле зрения.



**Рис. 3.15. Программный поворот**

Подсчитаем затраты топлива  $m$  на один поворот, полагая что на участках разгона и торможения включается один реактивный двигатель с тягой  $P$ , находящийся на расстоянии  $L$  от оси вращения космического аппарата.

Воспользуемся соотношением

$$m = m_c(t_1 + t_2),$$

где  $m_c$  – секундный расход массы.

На участке разгона реактивный двигатель развивает постоянный управляющий момент

$$M = PL.$$

Время разгона космического аппарата

$$t_1 = J\omega_n/M,$$

где  $J$  – момент инерции космического аппарата;  $M/J$  – ускорение.

Полагаем, что время торможения равно времени разгона, т. е.  $t_2 = t_1$ . Учитывая связь между секундным расходом, тягой и удельным импульсом  $I$  реактивного двигателя

$$m_c = P/gI,$$

( $g$  – ускорение силы тяжести), получим

$$m = 2U_m\omega_n,$$

где  $U_m = J/LgI$  – коэффициент расхода.

К полученному результату легко прийти, если для участка разгона непосредственно воспользоваться законом сохранения момента количества движения в форме, приведённой в разделе 1.9:

$$J\omega_n = L(m_p w),$$

где  $m_p$  – расход топлива на участке разгона;  $w = gI$  – скорость истечения.

Такое же количество топлива затрачивается на участке торможения. Полученные соотношения справедливы и для пар двигателей, если полагать, что  $L$  – расстояние между двигателями.

**Пример 3.2.** Пусть  $J = 10^5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $\omega_n = 1^\circ/\text{с}$ ,  $L = 1 \text{ м}$ ,  $I = 100 \text{ с}$ .  
Вычислим коэффициент расхода

$$U_m = J/LgI \cong 102 \text{ кг}\cdot\text{с}.$$

Расход топлива на один поворот составит

$$m = 2U_m\omega_n = 2 \cdot 102 \text{ кг}\cdot\text{с} \cdot \frac{1}{57,3} \text{ с}^{-1} \cong 3,56 \text{ кг}.$$

Свяжем расход топлива с программным углом  $\varphi_n$  и длительностью поворота  $t_n$ . Поскольку

$$\varphi(t) = \int_0^t \omega(t) dt,$$

угол  $\varphi_n$  может быть вычислен как площадь трапеции, образуемой функцией  $\omega(t)$ :

$$\varphi_n = \omega_n(t_n - t_1).$$

Подставляя  $\omega_n = \varphi_n/(t_n - t_1)$  в формулу для расхода, получим

$$m = 2U_m \frac{\varphi_n}{t_n (1 - t_1 / t_n)}.$$

Рассмотрим два критерия оптимальности программных поворотов: минимальный расход реактивного топлива и минимальное время поворотов.

Как следует из последней формулы, минимальный расход топлива имеет место при  $t_1 \rightarrow 0$ . В этом случае

$$m \rightarrow m_{\min} = 2U_m \varphi_n / t_n.$$

Повышение экономичности системы требует увеличения момента. Условие  $t_1 \rightarrow 0$  выполняется, если  $M \rightarrow \infty$  ( $t_1 = J\omega_n/M$ ).

В соответствии с принципом максимума Понтрягина минимальное время поворота обеспечивает релейное управление. Половину времени поворота двигателя системы ориентации включены на разгон космического аппарата, другую половину – на торможение (рис. 3.16).

Для программного поворота, оптимального по быстродействию,  $t_1 = 1/2 t_n$ . Поэтому

$$m = 4U_m \varphi_n / t_n,$$

т. е. расход при таком повороте в два раза превышает  $m_{\min}$ .

Установим, как зависит время программного поворота от управляющего момента  $M$ .

Угол  $\varphi_n$  может быть вычислен как площадь треугольника, образуемого функцией  $\varphi(t)$ :

$$\varphi_n = 1/2 \omega_n t_n.$$

Если учесть, что

$$\omega_n = Mt_1/J; \quad t_1 = 1/2 t_n,$$

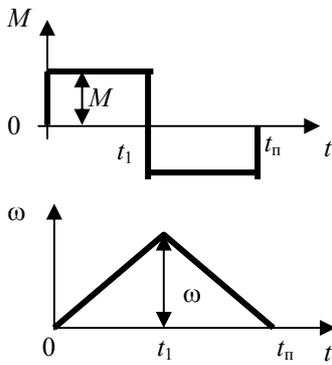
то

$$\varphi_n = 1/4 M t_n^2 / J.$$

При заданной величине управляющего момента  $M$  минимальное время поворота составит

$$t_{\min} = 2\sqrt{\frac{I\varphi_n}{M}}.$$

Таким образом, выполнение как первого, так и второго критериев оптимальности связано с увеличением управляющего момента реактивных двигателей. Это противоречит требованию экономичности режима стабилизации. Поэтому для программных поворотов и режима стабилизации, как уже говорилось, используются реактивные двигатели с различной тягой.



**Рис. 3.16. Оптимальный по быстрдействию поворот**

Повышению экономичности системы (при заданном  $\varphi_n$ ) способствует увеличение длительности программных поворотов. При  $t_n \gg t_1$

$$m \cong 2U_m\varphi_n/t_n.$$

Экономичность повышается за счет удлинения второго участка программного поворота, когда космический аппарат вращается по инерции без затраты реактивного топлива. В первом приближении расход топлива на весь программный маневр пропорционален углу поворота. Следует напомнить, что в наших рассуждениях не учитывается действие на космический аппарат внешних возмущающих моментов. С увеличением продолжительности маневров влияние возмущающих моментов возрастает.

Реализация программного поворота с учетом того или иного критерия оптимальности осуществляется вычислительным устройством. В него поступают сигналы углового отклонения и угловой скорости космического аппарата. Располагая этой информацией, вычислительное устройство вырабатывает команды на включение и отключение реактивных двигателей, с тем чтобы в нужный момент прекратился разгон космического аппарата и в нужный момент началось его торможение.

Возникает задача синтеза оптимального управления. В рассмотренной нами задаче маневр космического аппарата начинался при нулевой угловой скорости и мы изучали программный поворот как некоторую временную последовательность. В общем случае, когда в начальный момент времени космический аппарат не находится в состоянии покоя, моменты переключения реактивных двигателей являются функциями не только  $\varphi_n$ , но и текущих значений  $\varphi$  и  $\varphi'$ . Для синтеза оптимального управления необходимо измерение угловой скорости. Известно, что на фазовой плоскости оптимальная по быстрдействию линия переключения имеет вид парабол [85, 90].

Следует отметить, что с целью экономии реактивного топлива могут использоваться импульсные режимы реактивных двигателей. Импульсный элемент осуществляет импульсную модуляцию управляющего момента, тем самым достигается эффект регулирования управляющего момента [7, 85].

## МАХОВИЧНЫЕ СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

- ◆ Назначение и состав системы
- ◆ Устройство и принцип действия  
двигателя-маховика
  - ◆ Математическая модель  
двигателя-маховика
- ◆ Релейные маховичные системы  
ориентации
- ◆ Линейные маховичные системы  
ориентации
  - ◆ Алгоритмы управления  
избыточными системами  
электродвигателей-маховиков
  - ◆ Программные повороты
- ◆ Выбор основных динамических  
характеристик  
двигателя-маховика

Маховичные системы широко применяются на небольших спутниках-автоматах. Они управляют угловым положением космических аппаратов путем обмена кинетическим моментом между инерционными вращающимися массами и корпусом космического аппарата. Изменение кинетического момента маховичной системы осуществляется за счет регулирования скорости вращения маховиков. В отличие от реактивных систем, маховичные системы используют для работы не реактивное топливо, а электроэнергию, запасы которой на борту восполняются при помощи солнечных батарей. Применение маховичных систем оправдано в тех случаях, когда суммарная масса маховичной системы, включая маховики, солнечные батареи, аппаратуру управления и преобразователи, меньше, чем масса реактивной системы, включая запасы реактивного топлива.

Использование инерционных масс для ориентации космических аппаратов было предложено К.Э. Циолковским, а реализовать эту идею удалось только в шестидесятые годы. 13 апреля 1963 г. с космодрома Капустин Яр был выведен на орбиту первый космический аппарат разработки ВНИИЭМ – космическая электротехническая лаборатория «Омега» («Космос-14»). Впервые в мировой практике ориентация космического аппарата по трем осям осуществлялась при помощи электродвигателей-маховиков [86].

#### 4.1. НАЗНАЧЕНИЕ И СОСТАВ СИСТЕМЫ

Исполнительными органами маховичных систем ориентации являются электродвигатели-маховики. Маховичные системы ориентации применяются на спутниках «Метеор», «Ресурс» и «Электро», предназначенных для метеорологических, геофизических, экологических наблюдений и изучения природных ресурсов Земли [86].

Принцип действия маховичных систем основан на законе сохранения момента количества движения. В маховичных системах изменение кинетического момента осуществляется за счет регулирования скорости вращения маховиков.

Особенность маховичных систем – высокая точность стабилизации. В отличие от реактивных повышение точности маховичных систем не приводит к дополнительному расходу реактивного топлива.

Маховичные системы используются в основных режимах ориентации космического аппарата:

- в поиске ориентиров;
- в стабилизации в орбитальной и инерциальной системах координат;
- в программных поворотах.

Для начального успокоения используются реактивные или магнитные системы.

Для полной ориентации космического аппарата необходимо управлять его угловым положением вокруг трех осей. Чтобы получить независимые управляющие моменты по трем осям космического аппарата, на его борту устанавливаются три электродвигателя-маховика с осями вращения параллельными трем осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  (рис. 4.1).

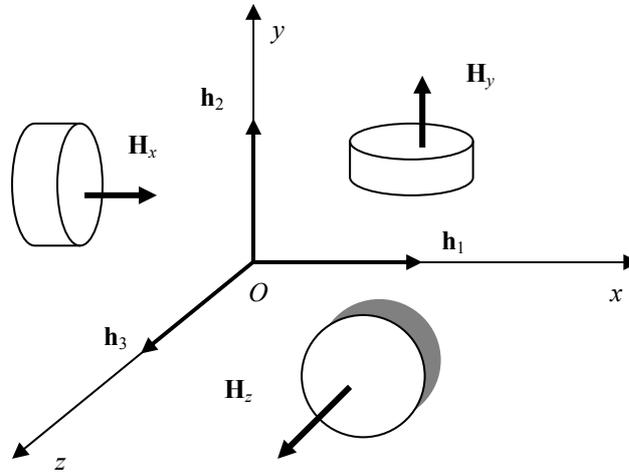


Рис. 4.1. Схема установки трех двигателей-маховиков

Маховик 1 создает управляющий момент вокруг оси  $Ox$ :

$$M_x = -dH_x(t)/dt;$$

маховик 2 создает управляющий момент вокруг оси  $Oy$ :

$$M_y = -dH_y(t)/dt;$$

маховик 3 создает управляющий момент вокруг оси  $Oz$ :

$$M_z = -dH_z(t)/dt,$$

где  $H_x(t)$ ,  $H_y(t)$ ,  $H_z(t)$  – кинетические моменты двигателей-маховиков.

Эти формулы справедливы для маховичной системы, установленной на неподвижном основании, и не учитывают гироскопических составляющих вектора управляющего момента, которые появляются при вращении маховичной системы вместе с космическим аппаратом.

Управляющий момент двигателя-маховика не зависит от места его установки на космическом аппарате. Необходимо только, чтобы ось вращения двигателя-маховика оставалась параллельной соответствующей оси космического аппарата. В этом легко убедиться, если момент двигателя-маховика

представить как момент «пары сил», равных по величине и направленных в противоположные стороны. Из теоретической механики известно, что момент пары сил является «свободным вектором», который можно переносить в любую точку пространства.

Вместо трех двигателей-маховиков может использоваться один шаровой электродвигатель-маховик с электромагнитным подвесом ротора [86]. Такой исполнительный орган был установлен на орбитальной станции «Алмаз» [20].

В настоящее время ставится задача повышения ресурса космических аппаратов и их систем. Повышение ресурса маховичных систем может быть достигнуто за счет установки на борту дополнительного числа двигателей-маховиков и отказа от традиционной схемы установки двигателей-маховиков параллельно осям космического аппарата. Система, в которой число двигателей-маховиков больше трех, называется избыточной.

Введение *избыточности* в маховичную систему позволяет ставить и решать различные оптимизационные задачи, например регулировать кинетические моменты отдельных исполнительных органов, что способствует повышению ресурса двигателей-маховиков и маховичной системы в целом [14].

Первая проблема, возникающая при проектировании избыточной маховичной системы, связана с выбором схемы установки двигателей-маховиков на космическом аппарате [14, 58].

Рассмотрим избыточную маховичную систему, в состав которой входят  $n > 3$  одинаковых двигателей-маховиков. Пусть  $Oxyz$  – связанная система координат, относительно которой определяется схема установки двигателей-маховиков. Обозначим через  $\mathbf{h}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – единичный вектор, параллельный оси вращения  $i$ -го маховика. За начало всех векторов  $\mathbf{h}_i$  выберем точку  $O$ . Совокупность векторов  $\mathbf{h}_i$  определяет схему установки двигателей-маховиков на космическом аппарате. Положение вектора  $\mathbf{h}_i$  в системе координат  $Oxyz$  может быть задано тремя направляющими косинусами.

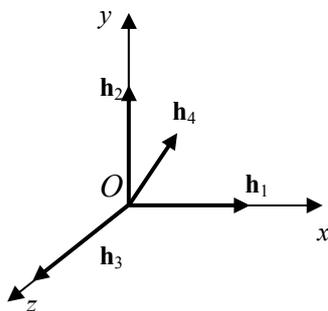


Рис. 4.2. Схема установки четырех двигателей-маховиков

В традиционной системе с тремя маховиками установочные векторы  $\mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{h}_2$  и  $\mathbf{h}_3$  направлены вдоль трех осей координат (см. рис. 4.1).

Известны минимально избыточные системы, в которых дополнительный (четвертый) двигатель-маховик  $\mathbf{h}_4$ , установленный под равными углами к остальным двигателям-маховикам, включается в работу только при отказе любого двигателя-маховика в основных каналах (рис. 4.2). В штатном режиме и при отказах работают по три двигателя-маховика.

В ряде случаев требуется, чтобы маховичная система могла создавать равные кинетические моменты в любом произвольном направлении. При ограниченном числе двигателей-маховиков точное выполнение этого требования невозможно.

Можно лишь говорить о некотором распределении кинетических моментов внутри сферического телесного угла  $4\pi$ . «Равномерное» распределение обеспечивает установка осей вращения перпендикулярно непараллельным граням правильных многогранников, боковым граням правильных пирамид или по образующим некоторого конуса [58].

При  $n = 4$  оси вращения маховиков устанавливаются перпендикулярно боковым граням правильной четырехугольной пирамиды [14]. Такая система изображена на рис. 4.3.

Маховичная система установлена на подставке, имеющей форму усеченной четырехугольной пирамиды. Два двигателя-маховика расположены снаружи, два других внутри подставки. Оси вращения двигателей-маховиков перпендикулярны боковым граням пирамиды. Конструкция подставки обеспечивает точное взаимное угловое расположение посадочных мест двигателей-маховиков на малом космическом аппарате. Справа от подставки виден периферийный адаптер для подключения маховичной системы к вычислительной сети космического аппарата.



Рис. 4.3. Система четырех двигателей-маховиков

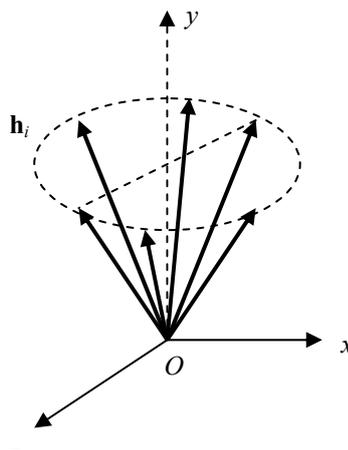


Рис. 4.4. Схема установки шести двигателей-маховиков

При  $n = 6$  оси вращения маховиков следует устанавливать ортогонально боковым граням правильной шестигранной пирамиды. Выбором угла при вершине пирамиды можно оптимизировать область изменения кинетического момента системы маховиков, исходя из тактико-технических требований к угловым маневрам и стабилизации космического аппарата. Например если требуются программные повороты космического аппарата по одной из осей стабилизации, то, уменьшая угол при вершине пирамиды, можно вытянуть область изменения кинетического момента вдоль оси пирамиды, а затем совместить ось пирамиды с осью программного поворота. Установочные векторы  $\mathbf{h}_i$  равномерно располагаются на правильной круговой конической поверхности с вершиной в точке  $O$ . Для определенности счи-

таем, что ось симметрии конуса совпадает с осью  $Oy$  – осью программного поворота (рис. 4.4). Концы векторов  $\mathbf{h}_i$ , расположенные на круговом основании конуса с интервалом  $60^\circ$ , являются вершинами вписанного в основание правильного шестиугольника.

На космическом аппарате двигатели-маховики могут устанавливаться в разных местах при выполнении условия: ось вращения  $i$ -го маховика должна быть параллельна соответствующему установочному вектору  $\mathbf{h}_i$ . Пример конструктивного решения показан на фото (рис. 4.5).



Рис. 4.5. Система шести двигателей-маховиков на измерительной платформе

Двигатели-маховики расположены на двух подставках. На одной установлены двигатели-маховики с нечётными номерами, на другой – с чётными. Обе подставки закреплены на специальной платформе, предназначенной для измерения управляющих моментов, создаваемых маховичной системой относительно трёх взаимно перпендикулярных осей. Оси измерительной платформы имитируют строительные оси космического аппарата.

Проблемы управления избыточными системами обсуждаются в главе 4.6.

Независимо от конструкции и типа электродвигателя общим недостатком двигателей-маховиков является зависимость управляющего момента  $M_m$  от скорости вращения  $\Omega$  [85]. Типичная моментная характеристика двигателя-маховика изображена на рис. 1.46. Если кинетические моменты двигателей-маховиков изменяются в небольшом диапазоне, то их управляющие моменты

можно считать постоянными. Одновременно можно использовать упрощенные (линеаризованные) уравнения движения космического аппарата, а каналы стабилизации рассматривать как независимые.

По принципу действия различают релейные, импульсные и линейные маховичные системы [7, 56, 85]. Для исследования динамики маховичных систем используются известные методы теории автоматического регулирования и оптимального управления [90, 91, 105].

В состав маховичной системы входят датчики угла ориентации и угловой скорости (ДУС), бортовая ЦВМ и двигатели-маховики. Функциональная схема одного канала маховичной системы ориентации изображена на рис. 4.6.

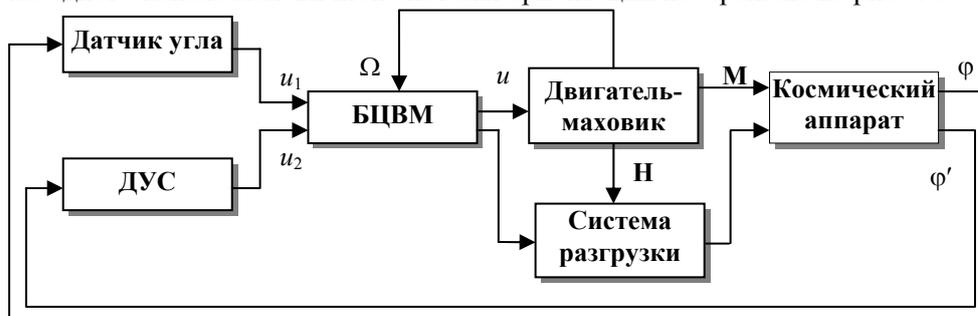


Рис. 4.6. Функциональная схема маховичной системы ориентации

На основе информации  $u_1$ ,  $u_2$ , поступающей с датчиков угла и угловой скорости, бортовая ЦВМ вычисляет сигналы управления двигателями-маховиками – сигналы требуемых управляющих моментов. Бортовая ЦВМ изображена на фото (рис. 4.7).

Управляющий момент  $M$  двигателя-маховика вызывает изменения углового положения  $\varphi$  и угловой скорости  $\varphi'$  космического аппарата, которые фиксируются датчиками.

Сигнал датчика угловой скорости используется при выполнении программных поворотов и для демпфирования колебаний, что обеспечивает устойчивость и качество замкнутой системы. Имеющий ограниченный ресурс работы гироскопический датчик угловой скорости может быть отключен в режиме стабилизации. Вместо сигнала датчика угловой скорости в законе управления используется производная сигнала датчика угла или информация о скорости вращения двигателя-маховика [13].



Рис. 4.7. Бортовая ЦВМ

Каналы системы ориентации могут различаться приборным составом. Например для построения на борту орбитальной системы координат в каналах крена и тангажа используется инфракрасная вертикаль [46, 51], а в канале рыскания – гироскопический датчик курса (гироорбитант). При ориентации на Солнце применяются датчики Солнца, для построения инерциальных систем координат – астродатчики. В полете характеристики некоторых датчиков изменяются. Так, в зависимости от состояния инфракрасного горизонта Земли, меняется крутизна статической характеристики инфракрасной вертикали. Это, в свою очередь, влияет на точность системы ориентации и динамику стабилизации космического аппарата.

Бортовая ЦВМ может корректировать характеристики датчиков и настраивать приборы на оптимальный режим работы.

Бортовая программа обеспечивает выбор и поиск ориентиров (Солнце, Земля, звезды), грубую или точную стабилизацию, программные повороты, последовательность переходов из одного режима ориентации в другой.

Контур управления угловым положением космического аппарата должен быть дополнен контуром регулирования кинетического момента маховичной системы, т. е. системой разгрузки (см. рис. 4.6). Необходимость в такой системе поясним на примере.

Под действием внешних возмущающих моментов двигателя-маховики постепенно разгоняются, насыщаются по кинетическому моменту и в соответствии с моментной характеристикой (см. рис. 1.46) теряют возможность создавать управляющий момент. В этом легко убедиться, если допустить, что на космический аппарат действует постоянный внешний возмущающий момент  $M_b$ . Движение космического аппарата с моментом инерции  $I$  под действием управляющего момента двигателя-маховика  $M = -dH/dt$  и внешнего возмущающего момента  $M_b$  описывается уравнением

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{dH}{dt} + M_b, \quad (4.1)$$

где  $H$  – кинетический момент двигателя-маховика.

В режиме идеальной стабилизации космического аппарата, когда  $\varphi'' \approx 0$ , двигатель-маховик создает управляющий момент, равный внешнему возмущающему и противоположный по знаку, т. е.

$$\frac{dH}{dt} = M_b. \quad (4.2)$$

При  $M_b = \text{const}$  кинетический момент двигателя-маховика возрастает во времени

$$H = M_b t.$$

Говорят, что двигатель-маховик «аккумулирует» импульс внешнего возмущающего момента за время  $t$ . Скорость вращения двигателя-маховика непрерывно нарастает, пока не достигнет максимального значения, при котором управляющий момент падает до нуля. Следует заметить, что на космический аппарат всегда действуют внешние возмущающие моменты и они практически всегда имеют составляющую, которая приводит к бесконечному возрастанию  $|H(t)|$  вместе со временем [70].

Чтобы вернуть двигатель-маховик в рабочее состояние, необходимо уменьшить его кинетический момент. Это возможно, если в правые части уравнений (4.1) и (4.2) добавить искусственно создаваемый внешний момент  $M_p$ , который заведомо больше  $M_v$  по величине и противоположен по знаку. Очевидно, что  $\text{sign}M_p = -\text{sign}H$ .

Для создания внешнего момента  $M_p$  могут использоваться реактивные двигатели и электрические катушки, взаимодействующие с магнитным полем Земли.

Под действием внешнего момента  $M_p$  кинетический момент двигателя-маховика уменьшается. Когда он снизится до заданного уровня, действие момента  $M_p$  прекращается.

Двигатель-маховик можно вернуть в рабочее состояние, если непосредственно на его вход подать сигнал торможения. Однако при торможении двигателя-маховика на космический аппарат будет действовать возмущающий момент, для парирования которого все равно придется включать реактивные двигатели или электрические катушки.

Таким образом, *маховичная система ориентации является двухконтурной*. Первый контур (исполнительные органы – двигатели-маховики) управляет угловым положением космического аппарата. Второй контур или система разгрузки (исполнительные органы – реактивные двигатели, электрические катушки), управляет кинетическим моментом двигателей-маховиков.

В настоящее время ведутся работы по созданию унифицированных систем ориентации. Унифицированная система должна иметь сетевую структуру, позволяющую заменять и комбинировать различные функциональные элементы.

Достижение высокой точности ориентации космических аппаратов связывается с *бескарданными инерциальными системами (БИНС)*, которые корректируются звездными датчиками. В таких системах углы ориентации вычисляются путём интегрирования системы кинематических уравнений в кватернионной форме.

Для сброса кинетического момента космических аппаратов после их отделения от ракеты-носителя и разгрузки электродвигателей-маховиков на низких орбитах целесообразно использование электромагнитов, взаимодействующих с магнитным полем Земли [60].

Общей тенденцией развития высокоточных систем с длительным сроком эксплуатации является применение бортовых ЦВМ не только в тракте управления исполнительными органами, но также для диагностики, поиска неисправностей и переключения на резерв.

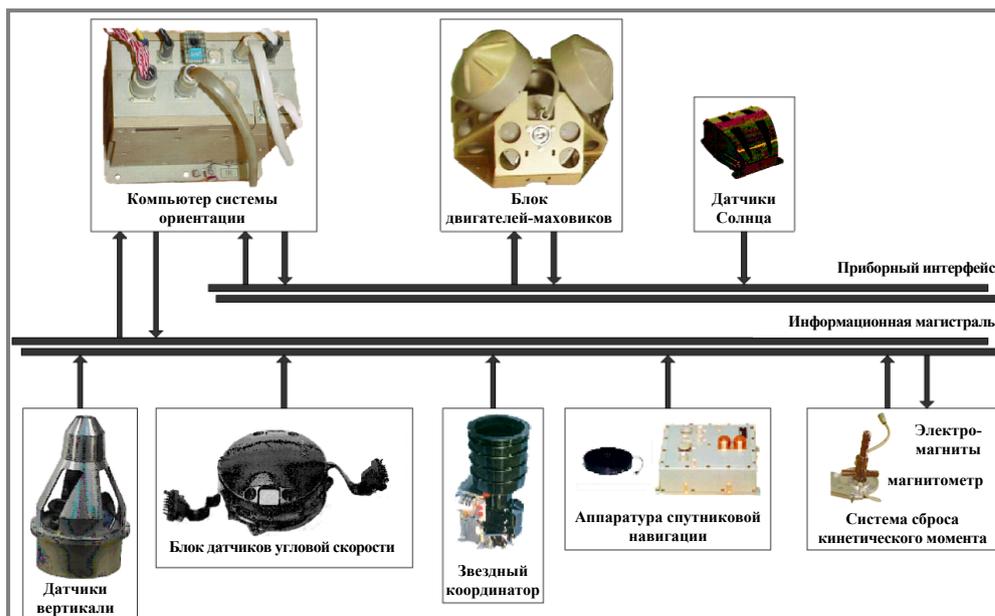


Рис. 4.8. Приборный состав унифицированной системы ориентации

Примерный приборный состав унифицированной системы ориентации представлен на рис. 4.8.

Новым функциональным элементом схемы является аппаратура спутниковой навигации. При её помощи осуществляется координатно-временная привязка информации, получаемой целевой аппаратурой, а также пересчёт угловых координат космического аппарата в инерциальной системе координат в угловые отклонения относительно орбитальной системы координат.

#### 4.2. УСТРОЙСТВО И ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ-МАХОВИКА

В первых электромеханических системах ориентации космических аппаратов «Метеор» и «Ресурс» использовались асинхронные электродвигатели-маховики с электронными преобразователями. По принципу действия эти исполнительные органы были релейными. В дальнейшем была освоена серия исполнительных органов на основе управляемых бесконтактных двигателей постоянного тока [2, 86]. В этих двигателях управление вращающим моментом сводится к регулированию тока в якорной обмотке, поскольку магнитный поток, возбуждаемый постоянными магнитами, практически постоянен. Управление уровнем тока осуществляется регулятором, работающим в режиме широтно-импульсной модуляции по внешнему управляющему сигналу, с которым сравнивается ток в обмотке

двигателя. Новые электродвигатели-маховики позволили реализовать в маховичных системах ориентации линейные алгоритмы управления.

Конструкция электродвигателя-маховика ДМ20-250 для космического аппарата «Электро» изображена на рис. 4.9 [49].

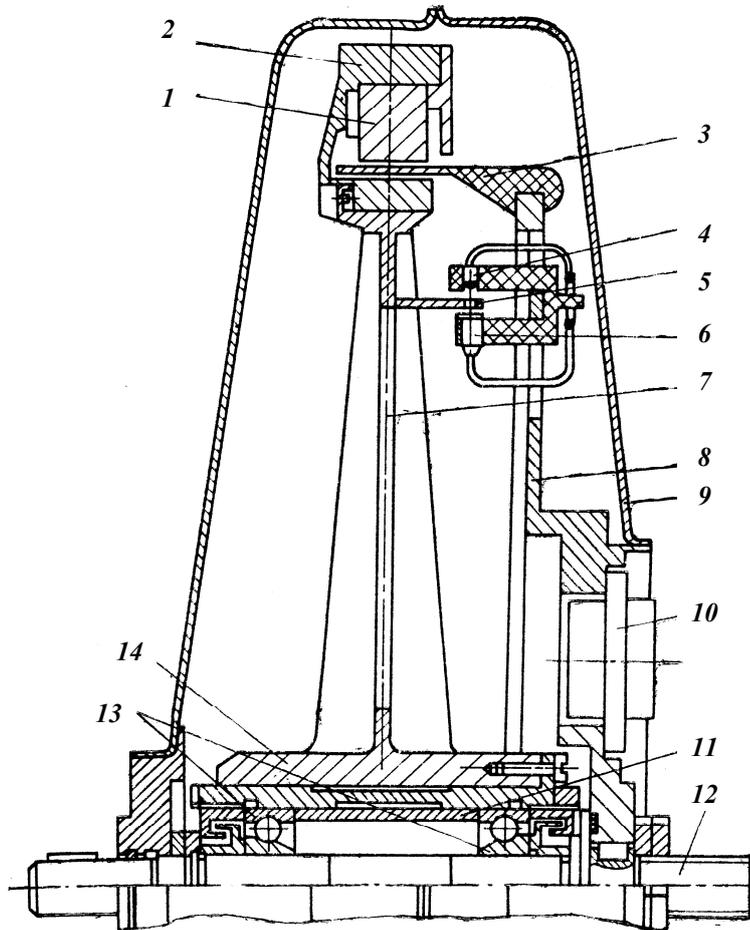


Рис. 4.9. Конструкция электродвигателя-маховика

Ротор-маховик, установленный на двух подшипниках 13, расположен внутри герметичного корпуса 9. Внутренние кольца подшипников посажены на неподвижную ось 12. Через уплотнения ее концы выведены за пределы кожуха и служат для крепления двигателя-маховика на космическом аппарате. Расстояние между подшипниками выдерживается при помощи втулки 11.

Ротор-маховик 2 имеет форму обода. Обод состоит из внешнего и внутреннего магнитопроводов, укрепленных на спицах 7 и ступице 14. В расточке внешнего магнитопровода расположены постоянные магниты 1, намагниченные в радиальном направлении.

Внешний и внутренний магнитопроводы соединены экранирующей перемычкой и образуют единую деталь. Магнитные экраны локализуют магнитные поля в заданной зоне, устраняя поля рассеяния, которые могли бы вызвать тормозные моменты, действующие на ротор со стороны элементов конструкции.

В зазоре между магнитами и внутренним магнитопроводом находится статор 3. Он выполнен в виде тонкостенного бескаркасного цилиндра, образованного проводниками обмотки якоря и залитого компаундом. Статор укреплен на фланце 8, сваренном с кожухом 9. Такая конструкция позволяет использовать в качестве инерционной массы не только обод, но и активные части электродвигателя (магниты), что способствует минимизации удельных массовых характеристик двигателя-маховика.

Переключение обмоток осуществляется коммутатором, управляемым датчиками Холла, расположенными на якоре двигателя в рабочем зазоре.

На фланце расположен разъем для соединения электрических цепей двигателя-маховика со схемой управления, а также клапан 10 для поддержания внутри кожуха заданного перепада давления по отношению к окружающему пространству. Кожух имеет облегченную конструкцию, так как рассчитан на малый перепад давления.

Для определения кинетического момента (частоты и направления вращения ротора-маховика) предусмотрен блок излучающих диодов 4 и фотодиодов 6. Они разделены установленным на роторе тонкостенным цилиндром 5 (экраном) с 240 отверстиями. Блок содержит две оптические пары, сдвинутые на  $90^\circ$ . При вращении маховика через отверстия экрана происходит периодическая засветка фотодиодов. Они генерируют переменное напряжение частотой, пропорциональной частоте вращения ротора. Благодаря логической обработке сигналов двух оптических пар, определяются частота и направление вращения.

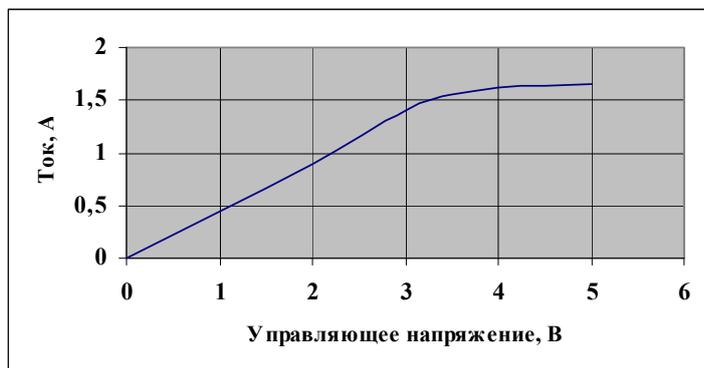


Рис. 4.10. Экспериментальная зависимость тока статора  $I$  от входного сигнала  $U$

Экспериментальная зависимость тока статора  $I$  от входного сигнала  $U$  изображена на рис. 4.10. Так как у бесконтактных двигателей постоянного тока вращающий момент  $M$  пропорционален току, то эта зависимость в опре-

деленном масштабе отражает статическую характеристику двигателя-маховика  $M = M(U)$ . Она имеет зону линейности.

Двигатель-маховик ДМ20-250 диаметром около 0,4 м и массой 10 кг развивает максимальный кинетический момент 20 Н·м·с. Максимальная частота вращения ротора 1100 мин<sup>-1</sup> [49]. Управляющий момент изменяется в диапазоне от 0,002 (момент трогания) до 0,25 Н·м (максимальный момент).

Для ориентации малых космических аппаратов в НПП ВНИИЭМ разработан бесколлекторный двигатель-маховик постоянного тока с постоянными магнитами ДМ1-20. Он сохраняет конструктивные особенности двигателя-маховика ДМ20-250. Как и ранее, ротор-маховик имеет форму обода и состоит из внешнего и внутреннего магнитопроводов, соединенных экранирующей несущей перемычкой. Обод закреплен на несущем основании, выполненном в виде тонкостенного алюминиевого конуса. Размеры обода оптимизированы с целью достижения минимально возможного отношения массы к моменту инерции. Масса двигателя-маховика ДМ1-20 – 1,5 кг.

Функциональная схема двигателя-маховика ДМ20-250 изображена на рис. 1.48. Взаимодействие между элементами функциональной схемы описано в разделе 1.11. Фотографии двигателей-маховиков представлены на рис. 1.49 и 1.50.

Маркировка двигателей-маховиков (например ДМ1-20) содержит два числа. Первое определяет максимальный кинетический момент в Н·м·с, второе – максимальный управляющий момент в условных единицах. В качестве условной единицы принято 10<sup>-3</sup> Н·м.

#### 4.3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ-МАХОВИКА

Исследование влияния параметров двигателя-маховика на динамику замкнутой системы является одной из задач, которыми занимаются специалисты по системам ориентации. Для этого используется математическая модель двигателя-маховика. Исследуется характер процессов, протекающих в замкнутой системе, выявляются возможные виды движений, определяется точность стабилизации. Исследование влияния отдельных факторов может проводиться аналитическими или графоаналитическими методами теории автоматического регулирования. Исследование с учетом всех факторов осуществляется на персональной ЭВМ.

*Математическое моделирование* – универсальный метод исследования динамики систем ориентации космических аппаратов и их функциональных элементов. Многие процессы, связанные с поведением космических аппаратов, приборов и устройств в космосе, невозможно реализовать в земных условиях. Поэтому важная роль отводится разработке математических моделей датчиков, чувствительных элементов, исполнительных органов, приборов и устройств системы ориентации. Затем они объединяются в общую математи-

ческую модель системы ориентации, которая используется для исследования управляемого движения космического аппарата вокруг центра масс.

Современный пакет прикладных программ MATLAB, содержащий в своем составе инструмент визуального моделирования SIMULINK, позволяет эффективно и с минимальной затратой времени осуществлять математическое моделирование.

Исходным материалом для SIMULINK является математическая модель исследуемой системы, выполненная в виде традиционной структурной схемы.

Совокупность линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих физический процесс преобразования входного сигнала управления в управляющий момент, а также структурную схему, соответствующую уравнениям динамики, будем называть математической (динамической) моделью двигателя-маховика. Она должна быть тем подробнее, чем выше требования к точности стабилизации.

В математической модели необходимо учитывать инерционные и нелинейные свойства двигателя-маховика, момент сухого и вязкого трения и другие факторы, которые могут оказывать заметное влияние на динамику замкнутой системы.

Структурная схема двигателя-маховика с учетом сухого и вязкого трения, позиционного момента, нелинейностей и запаздывания изображена на рис. 4.11.

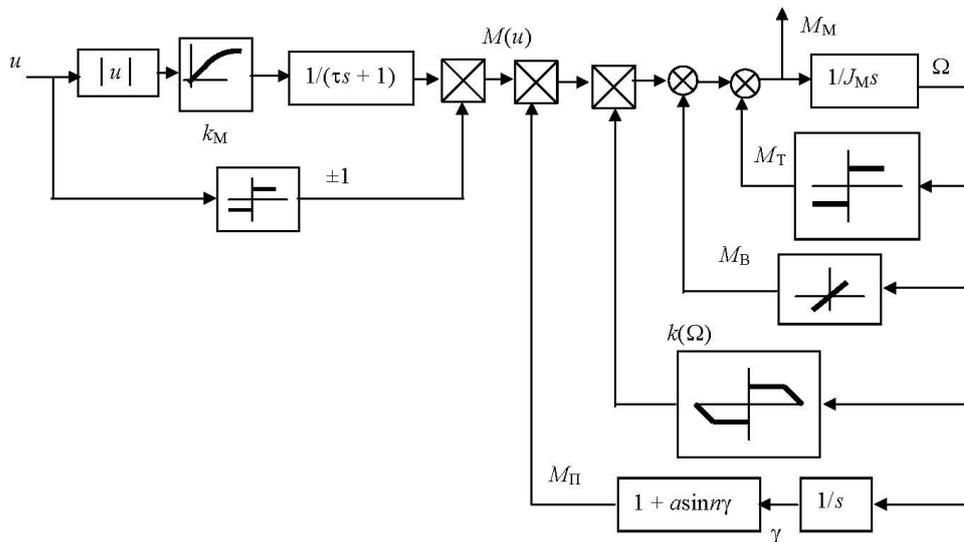


Рис. 4.11. Структурная схема двигателя-маховика

Нелинейная зависимость на входе двигателя-маховика представляет собой регулировочную характеристику с крутизной линейного участка  $k_M$ . С точностью до масштабного множителя она совпадает с экспериментальной зависимостью, изображенной на рис. 4.10. Аперидическое звено с постоянной времени  $\tau$  учитывает

запаздывание двигателя-маховика. Звенья в цепи обратной связи учитывают: момент сухого трения  $M_T$  (релейный элемент); момент вязкого трения  $M_B$  (он пропорционален скорости вращения двигателя-маховика); позиционный момент  $M_P$ , присущий двигателям-маховикам постоянного тока, зависимость управляющего момента от скорости вращения  $k(\Omega)$  (моментная характеристика, учитывающая насыщение двигателя-маховика по кинетическому моменту).

Полный регулирующий момент, действующий на маховик, может быть представлен в виде

$$M_M = (1 + a \sin n\gamma) k(\Omega) M(u) - M_T \text{sign } \Omega - k_B \Omega,$$

где  $\Omega$  – скорость вращения маховика;  $\gamma$  – угол поворота;  $n$  – число пар полюсов магнитной системы;  $a$  – коэффициент, определяющий амплитуду позиционного момента;  $k_B$  – коэффициент вязкости.

Момент  $M_M$  действует на ротор-маховик с моментом инерции  $J_M$ . Управляющий момент, равный по величине и противоположный по знаку, действует на корпус космического аппарата.

Сложность используемой математической модели зависит от тех задач, которые стоят перед исследователем. Если рассматриваются программные повороты, т. е. большие угловые движения космического аппарата, то можно использовать «простую» модель двигателя-маховика, а динамику космического аппарата следует описывать полными динамическими уравнениями Эйлера с учетом перекрестных связей между каналами системы ориентации. Обычно ставится задача минимизации времени поворота или расхода энергии. Если изучается режим стабилизации, то динамика космического аппарата описывается простыми линеаризованными уравнениями, каналы системы ориентации считаются независимыми друг от друга, а в «подробной» математической модели двигателя-маховика учитываются все особенности, которые могут повлиять на точность стабилизации. Изучаются малые угловые колебания космического аппарата относительно осей ориентации.

#### 4.4. РЕЛЕЙНЫЕ МАХОВИЧНЫЕ СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ

Структурная схема одного канала релейной маховичной системы имеет тот же вид, что и система с реактивными двигателями (рис. 4.12).

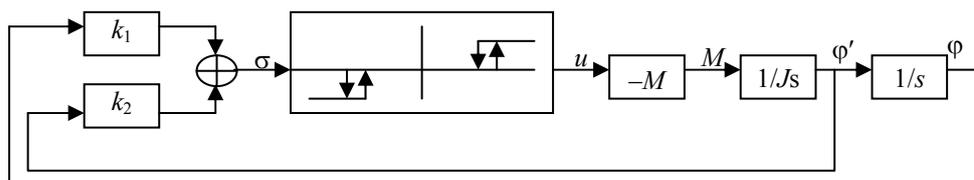


Рис. 4.12. Структурная схема релейной маховичной системы в режиме стабилизации

Релейный двигатель-маховик может создавать три значения управляющего момента:  $-M$ ,  $0$ ,  $+M$ . Результаты, которые были получены ранее для реактивных систем будут справедливы и в этом случае.

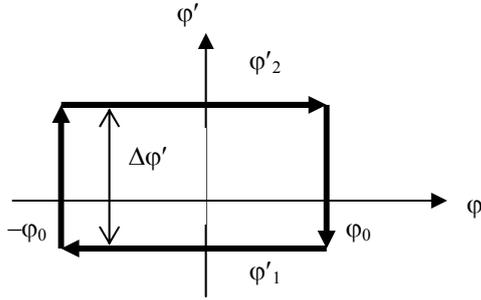


Рис. 4.13. Двусторонние колебания маховичной системы

при этом мгновенно изменяется на  $\Delta\phi'$ . Оценим расход энергии  $\Delta E$  при одном включении двигателя-маховика на время  $\Delta t$ :

$$\Delta E = N\Delta t, \quad (4.3)$$

где  $N$  – мощность двигателя-маховика.

Интегрируя уравнение движения космического аппарата с моментом инерции  $J$

$$J\phi'' = M$$

за время  $\Delta t$ , найдем

$$J\Delta\phi' = M\Delta t.$$

Подставляя  $\Delta t = J\Delta\phi'/M$  в (4.3), получим

$$\Delta E = U_E \Delta\phi',$$

где  $U_E = JN/M$  – коэффициент расхода.

Для полного цикла, содержащего два включения двигателя-маховика, расход энергии составит

$$\Delta E_{\Sigma} = 2\Delta E = 2U_E \Delta\phi'.$$

Средний расход  $E_{\text{ср}}$  за время цикла

$$E_{\text{ср}} = \frac{\Delta E_{\Sigma}}{T} = U_E \frac{|\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2|}{\phi_0}.$$

При отсутствии внешних возмущающих моментов и момента сопротивления на валу двигателя-маховика в замкнутой системе устанавливаются двусторонние одноимпульсные колебания (рис. 4.13). Если  $\sigma_1 = \sigma_2$ , то величина  $\phi_0 = \sigma_2/k_1$  определяет погрешность стабилизации.

Пусть  $\Delta t$  – минимальное время, на которое может быть включен двигатель-маховик. Полагаем, что скорость космического аппарата

т. е. расход в единицу времени составит

$$T = 2\varphi_0 \frac{\Delta\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2|},$$

Сравнение формул для средневременного расхода массы в реактивных системах и средневременного расхода энергии в маховичных системах показывает, что они аналогичны. Поэтому результаты, полученные ранее для расхода массы, могут быть распространены и на случай расхода энергии.

Максимальный расход энергии дает симметричный цикл

$$E_{\text{ср max}} = \frac{1}{4} U_E \frac{\Delta\dot{\varphi}^2}{\varphi_0}.$$

Эта формула полезна для оценки наибольшего расхода энергии. Из нее следует, что расход энергии возрастает с увеличением требуемой точности стабилизации (с уменьшением  $\varphi_0$ ).

Естественно поставить вопрос о вероятном расходе энергии  $E_{\text{вер}}$ . Эта оценка найдена в [85] и составляет

$$E_{\text{вер}} = \frac{2}{3} E_{\text{ср max}}.$$

При использовании двигателей-маховиков момент сопротивления  $M_c$  между ротором и статором действует подобно внешнему моменту по отношению к космическому аппарату. Если

$$M_c > \frac{1}{4} J \frac{\Delta\dot{\varphi}^2}{\varphi_0},$$

то цикл становится односторонним (рис. 4.14) с расходом энергии

$$E_{\text{ср}} = U_E \varepsilon_c,$$

где  $\varepsilon_c = M_c/J$  – ускорение космического аппарата с моментом инерции  $J$  под действием возмущающего момента  $M_c$ .

Важной характеристикой двигателя-маховика является про-

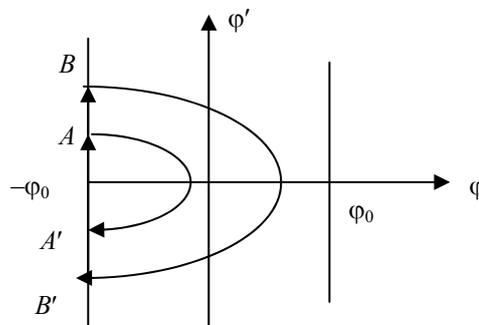


Рис. 4.14. Односторонние колебания маховичной системы

должительность включения  $\tau$  – отношение времени, в течение которого маховик включен  $t_{\text{вкл}}$  к периоду колебаний  $T$ . На каждом периоде двигатель-маховик включается дважды на время  $\Delta t$ , т. е.  $t_{\text{вкл}} = 2\Delta t$ . Так как  $T = 2\Delta\varphi'/\varepsilon_{\text{в}}$ , а  $\Delta\varphi' = \varepsilon\Delta t$ , где  $\varepsilon_{\text{в}}$ ,  $\varepsilon$  – ускорения космического аппарата, вызванные действием внешнего возмущающего момента  $M_{\text{в}}$  и управляющего момента  $M$  двигателя-маховика, то

$$\tau = t_{\text{вкл}}/T = \varepsilon_{\text{в}}/\varepsilon = M_{\text{в}}/M.$$

*Продолжительность включения двигателя-маховика при односторонних колебаниях определяется отношением возмущающего момента, действующего на космический аппарат, и управляющего момента двигателя-маховика.*

Сравнение односторонних и двусторонних циклов позволяет установить, что несмотря на, казалось бы, принципиальные различия, они во многом сходны [85].

Гарантированная точность стабилизации в двустороннем цикле всегда известна и постоянна. Она определяется настройкой реле относительно сигнала датчика угла и равна  $\varphi_0$ . Расход энергии (или массы для реактивных систем) зависит от случайной величины – начального значения угловой скорости  $\varphi_1'$ . Говорить об определенном значении расхода нельзя, можно лишь приводить верхнюю границу для расхода  $E_{\text{ср max}}$  или вероятное значение  $E_{\text{вер}}$ .

В одностороннем цикле расход энергии (или массы) всегда известен и постоянен. Он определяется внешним возмущающим моментом, действующим на космический аппарат. Точность стабилизации зависит от случайной величины – от положения начальной точки  $A$ . Говорить об определенном значении погрешности стабилизации нельзя, можно лишь указать верхнюю границу возможного размаха угловых колебаний. За гарантированную точность стабилизации можно принять половину возможного размаха колебаний  $\varphi_0 = \Delta\varphi_{\text{max}}/2$ .

Управляющее реле является существенно нелинейным элементом. Выходная величина реле изменяется скачком, когда управляющий сигнал проходит пороговое значение. При помощи реле можно коммутировать большие мощности, но пропорциональной зависимости между сигналом управления и выходной величиной здесь не существует.

Иногда является желательным придание релейной маховичной системе некоторых черт «линейности». Для этого организуется импульсный режим работы. Известно что, если одновременно с управляющим сигналом на вход реле подается дополнительное периодическое воздействие, то при определенных условиях реле приобретает свойство пропорциональности. Существуют гармоническая, вибрационная и статистическая линеаризация [90, 91].

В качестве дополнительного периодического воздействия, производящего линеаризацию релейной системы, могут быть использованы автоколебания самой релейной системы, если их частота такова, что управляющий сигнал по сравнению с ними можно считать медленно изменяющимся.



#### 4.5.1. Динамика линейной системы в режиме стабилизации

Составим уравнения динамики замкнутой идеализированной системы.

Движение космического аппарата с моментом инерции  $I$  вокруг оси  $Ox$  под действием управляющего момента  $M$  и возмущающего момента  $M_B$  описывается уравнением

$$I\varphi'' = M + M_B.$$

Датчики угла и угловой скорости будем считать идеальными элементами (линейными без запаздывания) с коэффициентами передачи, равными единице. Тогда выходные сигналы датчиков можно представить в виде

$$u_1 = \varphi - \varphi_n; u_2 = \varphi',$$

где  $\varphi_n$  – угол программного поворота. Полагаем, что это небольшой угол, так что при повороте на угол  $\varphi_n$  система остается линейной.

Сигнал управления, выдаваемый БЦВМ в двигатель-маховик оси  $Ox$ , формируется как линейная комбинация сигналов угла и угловой скорости

$$u = -k_1 u_1 - k_2 u_2 = -k_1(\varphi - \varphi_n) - k_2 \varphi',$$

где  $k_1, k_2$  – коэффициенты усиления сигналов углового отклонения и угловой скорости.

Управляющий момент двигателя-маховика пропорционален сигналу управления  $u$ :

$$M = k_M u,$$

где  $k_M$  – крутизна статической характеристики (коэффициент преобразования сигнала управления в управляющий момент).

Уравнению динамики замкнутой системы

$$I\varphi'' + k_2 k_M \varphi' + k_1 k_M \varphi = k_1 k_M \varphi_n + M_B$$

соответствует структурная схема, изображенная на рис. 4.16.

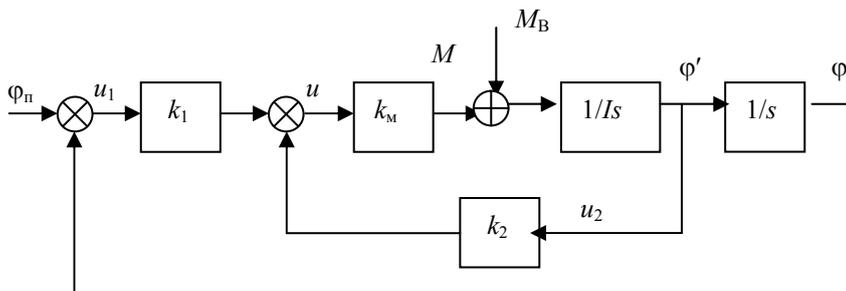


Рис. 4.16. Структурная схема линейной маховичной системы

Передаточную функцию замкнутой системы относительно программного угла поворота  $\varphi_n$

$$W(s) = \varphi(s)/\varphi_n(s) = k_1 k_M / (I s^2 + k_2 k_M s + k_1 k_M)$$

можно записать в стандартной форме

$$W(s) = v^2 / (s^2 + 2\xi v s + v^2),$$

где  $v^2 = k_1 k_M / I$ ;  $\xi = k_2 k_M / 2 I v$ ;  $v$  – собственная частота системы;  $\xi$  – безразмерный коэффициент демпфирования.

Мы получили передаточную функцию линейного звена второго порядка, анализ которой не представляет трудностей.

Выбор собственной частоты  $v$  и, следовательно, коэффициента усиления сигнала угла  $k_1$  определяется требованиями к быстродействию системы ориентации.

Величина безразмерного коэффициента демпфирования  $\xi$  зависит от коэффициента усиления сигнала угловой скорости  $k_2$ :

$$\xi = k_2 v / 2 k_1.$$

Выбор  $\xi = \sqrt{2}/2$  обеспечивает минимальную длительность переходных процессов.

Рассмотрим влияние коэффициента демпфирования  $\xi$  на характер переходных процессов в замкнутой системе [105].

Движение космического аппарата, управляемого маховичной системой, при отсутствии внешних возмущающих моментов ( $M_B = 0$ ) описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\varphi'' + 2\xi v \varphi' + v^2 \varphi = v^2 \varphi_n.$$

Пусть программный угол  $\varphi_n$  задается скачком, равным условной единице. Если  $\xi > 1$ , переходный процесс является аperiодическим, если  $\xi < 1$ , переходный процесс имеет перерегулирование, а при  $\xi < \sqrt{2}/2$  носит колебательный характер (рис. 4.17).

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$s^2 + 2\xi v s + v^2 = 0$$

имеет два корня

$$s_{1,2} = -\xi v \pm v(\xi^2 - 1)^{1/2}.$$

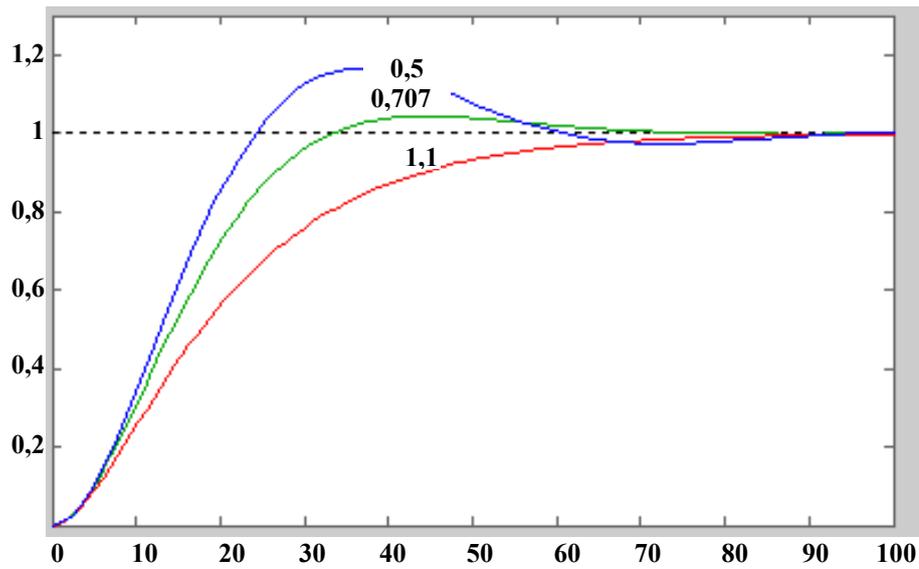


Рис. 4.17. Переходные процессы линейной системы при различных коэффициентах демпфирования  $\xi$  и  $\nu = 0,1 \text{ с}^{-1}$

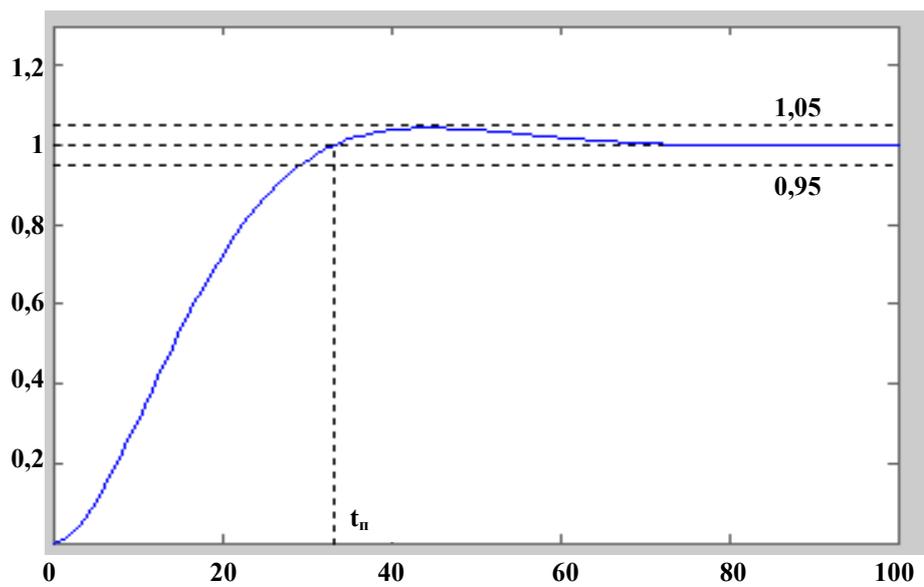


Рис. 4.18. Переходный процесс в системе при  $\xi = \sqrt{2}/2$

В случае комплексных корней ( $\xi < 1$ )

$$s_{1,2} = -\lambda \pm i\omega; \lambda = \xi v; \omega = v(1 - \xi^2)^{1/2},$$

общее решение уравнения движения примет вид

$$\varphi(t) = \varphi_n + (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) e^{-\lambda t}.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются начальными условиями. При нулевых начальных условиях  $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$

$$C_1 = -\varphi_n, C_2 = -\lambda \varphi_n / \omega.$$

Поэтому

$$\varphi(t) = \varphi_n [1 - (\cos \omega t + \lambda / \omega \sin \omega t) e^{-\lambda t}].$$

Если  $\xi = \sqrt{2}/2$ , то  $\omega = \lambda = v\sqrt{2}/2$  и  $\varphi(t) = \varphi_n [1 - (\cos \lambda t + \sin \lambda t) e^{-\lambda t}]$ .

В этом случае перерегулирование не превышает 5% от  $\varphi_n$ . Переходный процесс будем считать законченным, когда процесс попадает в 5% трубку (рис. 4.18). Вычислим момент времени  $t_n$ , когда процесс  $\varphi(t)$  пересечет линию  $\varphi = \varphi_n$ . Поскольку в этот момент  $\varphi(t_n) = \varphi_n$ , то должно выполняться условие

$$\cos \lambda t_n + \sin \lambda t_n = 0.$$

Отсюда

$$\lambda t_n = 3/4\pi \text{ и } t_n = 3\pi/2v\sqrt{2}.$$

Будем рассматривать величину  $t_n$  как время переходного процесса. Оно зависит от собственной частоты системы  $v$  и, следовательно, от коэффициента усиления сигнала угла  $k_1$  (рис. 4.19).

Оценить время переходного процесса можно по приближенной формуле

$$t_n \cong \pi/v.$$

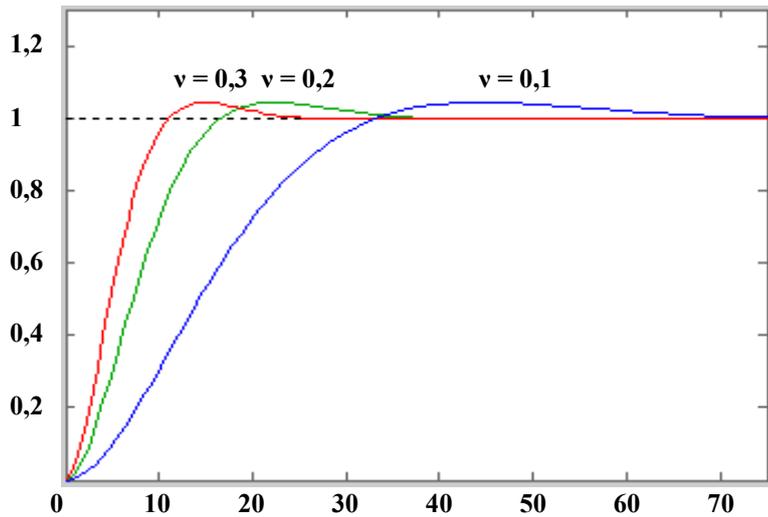


Рис. 4.19. Влияние собственной частоты  $\nu$  при  $\xi = \sqrt{2}/2$  на длительность переходного процесса

Передаточную функцию системы можно записать в виде

$$W(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_n(s)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1},$$

где  $T = 1/\nu$  – постоянная времени.

Используя эту запись, легко построить логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики замкнутой системы (рис. 4.20). Величина  $\nu$  характеризует полосу пропускания системы.

Применяя к уравнению движения системы относительно возмущающего момента ( $\varphi_n = 0$ )

$$I\varphi'' + k_2 k_m \varphi' + k_1 k_m \varphi = M_B$$

преобразование Лапласа, получим передаточную функцию системы относительно возмущающего момента

$$W_B(s) = \frac{\varphi(s)}{M_B(s)} = \frac{1}{Is^2 + k_2 k_m s + k_1 k_m} = \frac{1/I}{s^2 + 2\xi \nu s + \nu^2}.$$

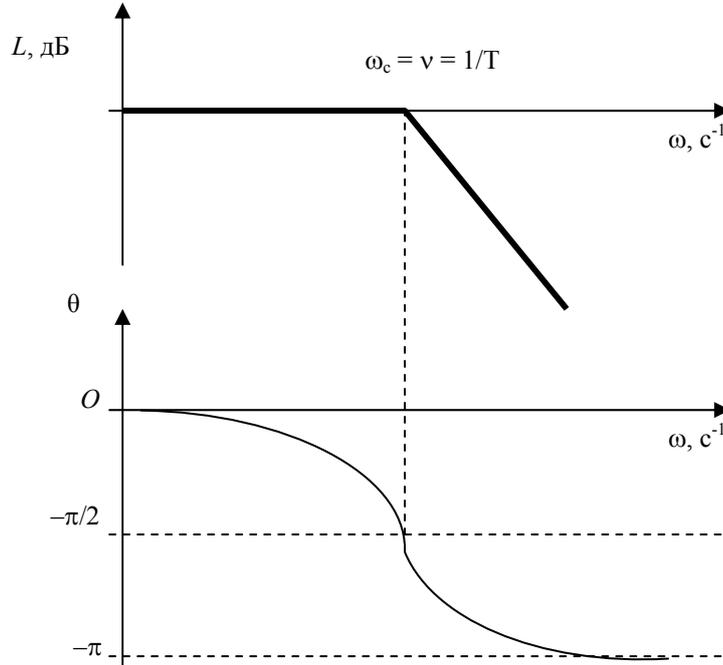
Если возмущающий момент  $M_B$  действует в виде скачка, то после окончания переходного процесса в системе возникает статическая ошибка по углу

$$\varphi_{ст} = M_B / \nu^2 I.$$

Создавая постоянный управляющий момент, пропорциональный статической ошибке и противоположный ей по знаку:

$$M = -k_1 k_M \varphi_{ст} = -k_1 k_M M_B / v^2 I = -M_B,$$

двигатель-маховик компенсирует действие возмущающего момента.



**Рис. 4.20. Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики линейной маховичной системы**

Поскольку  $M = -J_M \Omega'$ , где  $J_M$  и  $\Omega'$  – момент инерции и угловое ускорение маховика, то

$$\Omega' = -M/J_M = M_B/J_M$$

и

$$\Omega = (M_B/J_M)t,$$

т. е. при действии на космический аппарат постоянного возмущающего момента  $M_B$  скорость двигателя-маховика непрерывно нарастает. Говорят, что внешний возмущающий момент «аккумулируется» двигателем-маховиком. Кинетический момент двигателя-маховика нарастает по линейному закону

$$H = J_M \Omega = M_B t$$

и через некоторое время двигатель-маховик достигает состояния насыщения, после чего необходима его разгрузка.

Если на космический аппарат действует периодический возмущающий момент, двигатель-маховик не насыщается. На этом основано использование двигателей-маховиков для управления ориентацией космических аппаратов, поскольку многие возмущающие моменты являются периодическими функциями времени, частота которых связана с периодом обращения космических аппаратов вокруг Земли [7, 70, 85].

Для устойчивости идеализированной системы ориентации, которая рассмотрена выше, согласно критерию устойчивости Гурвица, достаточно принять в уравнениях движения  $k_1 > 0$  и  $k_2 > 0$ . Датчик угла в такой системе является функционально необходимым элементом, а датчик угловой скорости нужен для обеспечения устойчивости и качества переходных процессов. Естественно, что в идеализированной системе могут быть достигнуты любая точность стабилизации и любое быстродействие. Статическую ошибку по углу  $\varphi_{ст} = M_B/k_1 k_M$  и время переходного процесса  $t_n \cong \pi/\nu = \pi/(k_1 k_M/I)^{1/2}$  можно сделать сколь угодно малыми за счет неограниченного увеличения коэффициента по углу  $k_1$ . На практике возможности увеличения коэффициента усиления и точности стабилизации ограничены наличием нелинейностей и элементов запаздывания. Они существуют как в датчиках системы ориентации, так и в двигателях-маховиках. Поэтому рассматривая систему ориентации как линейную, следует помнить, что речь идет об идеализированной математической модели системы.

Современные космические аппараты имеют сложную конструкцию, оснащены панелями солнечных батарей большой площади. Учёт каждого тона упругих колебаний повышает порядок системы уравнений, описывающей движение космического аппарата вокруг центра масс. Упругие свойства космического аппарата необходимо учитывать при синтезе алгоритмов управления и выборе коэффициентов усиления.

#### 4.5.2. Исследование влияния параметров двигателя-маховика на динамику системы

**Пример 4.1.** Исследуем влияние момента сухого трения двигателя-маховика на точность стабилизации космического аппарата. Структурная схема системы ориентации космического аппарата с учетом упрощенной математической модели двигателя-маховика, в которой учитывается только момент сухого трения  $M_T$ , совпадает со схемой, изображенной на рис. 4.16, если в ней момент  $M_B$  заменить на  $-M_T$ .

Момент сухого трения вызывает статическую ошибку по углу

$$\varphi_{ст} = M_T/k_1 k_M = M_T/I\nu^2.$$

Из полученного соотношения следует, что момент сухого трения действует также как внешний момент.

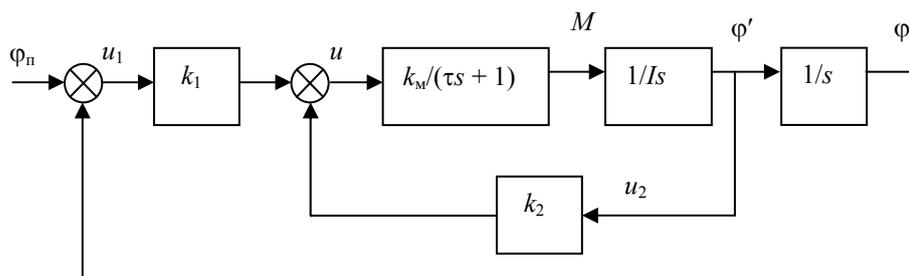
**Пример 4.2.** Исследуем влияние запаздывания двигателя-маховика на устойчивость замкнутой системы.

Структурная схема системы ориентации космического аппарата с учетом упрощенной математической модели двигателя-маховика, в которой учитывается только запаздывание, изображена на рис. 4.21. По сравнению с идеализированной линейной моделью порядок системы повысился на единицу. Передаточная функция замкнутой системы относительно программного угла поворота  $\varphi_n$ :

$$W(s) = \varphi(s)/\varphi_n(s) = k_1 k_m / (I \tau s^3 + I s^2 + k_2 k_m s + k_1 k_m).$$

Ей соответствует характеристическое уравнение системы

$$I \tau s^3 + I s^2 + k_2 k_m s + k_1 k_m = 0.$$



**Рис. 4.21.** Структурная схема системы с учетом запаздывания двигателя-маховика

Для характеристического уравнения третьей степени

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0,$$

у которого все коэффициенты положительны, условия устойчивости по Гурвицу имеют вид

$$a_1 a_2 > a_0 a_3.$$

Отсюда  $I k_2 k_m > I \tau k_1 k_m$  или  $k_2 > \tau k_1$ .

На плоскости параметров  $k_1$  и  $k_2$  границей области устойчивости служит прямая линия, наклон которой зависит от постоянной времени  $\tau$  (рис. 4.22). Чем больше постоянная времени, тем меньше область устойчивости. При  $\tau = 0$  области устойчивости принадлежат все точки первого квадранта.

Исследование динамики стабилизации космического аппарата с использованием «полной» математической модели двигателя-маховика (см. рис. 4.11) и пакета прикладных программ MATLAB проводится на персональной ЭВМ.



**Рис. 4.22.** Область устойчивости

### 4.5.3. Линейные маховичные системы с тахометрической обратной связью\*

Ограниченный ресурс гироскопических датчиков угловой скорости делает актуальной разработку алгоритмов управления, в которых сигнал угловой скорости получается дифференцированием сигнала датчика угла ориентации или заменяется сигналом датчика скорости вращения двигателя-маховика (сигналом тахогенератора). В режимах ориентации, где возможно использование таких алгоритмов (например в режиме стабилизации), гироскопические датчики угловой скорости выключаются. Получение сигнала «псевдоскорости» связано с выделением полезного сигнала на фоне помех. Сравнительный анализ двух схем получения сигнала «псевдоскорости» выполнен в [13]. При сравнении учитывается действие на космический аппарат постоянного внешнего момента и момента сухого трения на валу маховика, наличие «белого» шума в сигналах датчика угла и тахогенератора. При определенном сочетании параметров системы предпочтение отдается второму способу – тахометрической обратной связи.

Составим уравнения динамики замкнутой линейной системы с тахометрической обратной связью.

Движение космического аппарата с моментом инерции  $I$  вокруг оси  $Ox$  под действием управляющего момента  $M$  и возмущающего момента  $M_v$  описывается уравнением

$$I\varphi'' = M + M_v.$$

Управляющий момент двигателя-маховика (алгоритм управления линейной системы) формируется в виде

$$M = -k(\varphi + \frac{1}{T} \int_0^t \varphi dt - R\Omega),$$

где  $k$ ,  $T$ ,  $R$  – параметры алгоритма управления;  $\Omega$  – скорость двигателя-маховика, измеряемая тахогенератором.

Ранее, при использовании датчика угловой скорости (раздел 4.5.1), алгоритм управления выглядел так:

$$M = -k(\varphi + \tau\varphi'),$$

где  $k = k_1 k_m$ ;  $\tau = k_2/k_1$  – коэффициент суммирования сигналов угловой скорости и углового отклонения.

---

\* В этом разделе использованы материалы курсового проекта, который выполнили студенты базовой кафедры под руководством А.Д. Беленького.

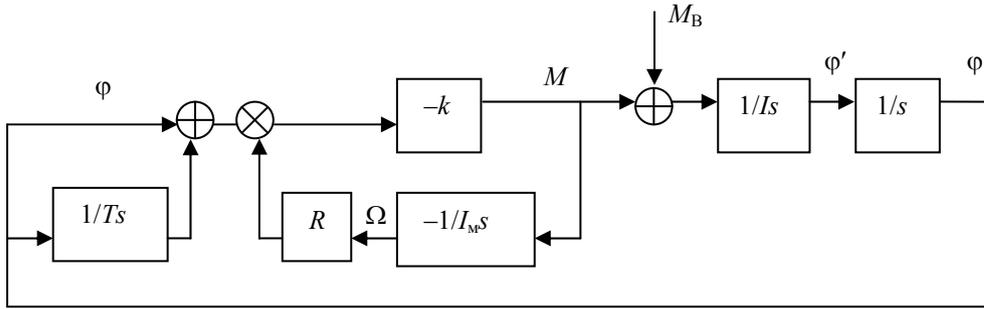


Рис. 4.23. Структурная схема линейной системы с тахометрической обратной связью

Момент двигателя маховика с моментом инерции  $I_M$  связан с угловым ускорением соотношением

$$M = -I_M d\Omega/dt.$$

Уравнениям динамики замкнутой системы соответствует структурная схема, изображенная на рис. 4.23.

Найдем передаточную функцию системы относительно внешнего возмущающего момента. Для этого преобразуем уравнения динамики по Лапласу

$$\begin{aligned} Is^2\varphi(s) - M(s) &= M_B(s); \\ k(1 + 1/Ts) + M(s) - kR\Omega(s) &= 0; \\ M(s) + I_M s\Omega(s) &= 0. \end{aligned}$$

По правилу Крамера

$$\varphi(s) = \Delta_\varphi(s)/\Delta(s).$$

Общий определитель системы алгебраических уравнений составляется из коэффициентов левой части

$$\Delta = \begin{vmatrix} Is^2 & -1 & 0 \\ k(1 + 1/Ts) & 1 & -kR \\ 0 & 1 & I_M s \end{vmatrix}.$$

Раскроем определитель

$$\Delta(s) = I_M s^3 + IkRs^2 + kI_M s + kI_M/T.$$

Частный определитель получается из общего заменой первого столбца на правые части уравнений

$$\Delta_{\varphi} = \begin{vmatrix} M_B & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -kR \\ 0 & 1 & I_M s \end{vmatrix} = M_B (I_M s + kR).$$

Передаточная функция системы:

$$W_B(s) = \frac{\varphi(s)}{M_B(s)} = \frac{I_M s + kR}{I_M s^3 + IkRs^2 + I_M ks + kI_M / T}.$$

Если возмущающий момент действует в виде скачка, то после окончания переходных процессов появится статическая ошибка по углу

$$\varphi_{ст} = TRM_B/I_M.$$

Для выбора параметров алгоритма управления  $k$ ,  $T$ ,  $R$  можно воспользоваться допустимой статической ошибкой по углу  $\varphi_{доп}$  и условиями устойчивости по Гурвицу для системы третьего порядка. Из выражения для статической ошибки

$$RT < I_M \varphi_{доп} / M_B.$$

Из условия устойчивости по Гурвицу (см. пример 4.2)

$$RT > I_M / k.$$

Зона допустимого изменения параметров управления на плоскости  $k$ ,  $RT$  изображена на рис. 4.24.

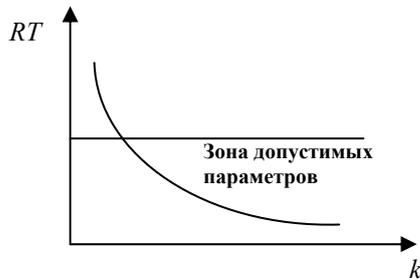


Рис. 4.24. Зона допустимых параметров

Синтез параметров управления можно осуществить, используя рациональное распределение корней характеристического уравнения замкнутой системы, которое получается, если приравнять к нулю определитель системы  $\Delta(s)$ :

$$s^3 + kRs^2/I_M + ks/I + kI/T = 0.$$

Выберем параметры алгоритма управления из условия кратности корней характеристического уравнения. Для

этого представим левую часть характеристического уравнения в виде полинома третьей степени

$$(s + v)^3 = s^3 + 3vs^2 + 3v^2s + v^3,$$

где  $v$  – кратный корень.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $s$  характеристического уравнения и полинома, получим систему алгебраических уравнений для определения параметров алгоритма управления

$$kR/I_M = 3v; k/I = 3v^2; kI/T = v^3.$$

Все параметры алгоритма управления

$$R = I_M/Iv; k = 3v^2I; T = 3/v$$

вычисляются через корень  $v$ , который может быть выбран на основании технических требований, предъявляемых к системе ориентации.

#### 4.6. АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ИЗБЫТОЧНЫМИ СИСТЕМАМИ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕЙ-МАХОВИКОВ

##### 4.6.1. *Общий подход к задаче управления избыточными системами электродвигателей-маховиков*

Выбор числа и рациональной схемы установки двигателей-маховиков на космическом аппарате и распределение функций управления между отдельными исполнительными органами позволяют снизить интенсивность работы каждого двигателя-маховика, что способствует повышению ресурса всей электромеханической системы.

Управление угловым положением космических аппаратов складывается из трех этапов: определение вектора состояния космического аппарата, вычисление вектора управления, преобразование вектора управления в управляющий момент. В традиционных маховичных системах реализация вектора управления не представляет трудностей: три компоненты вектора управления реализуются тремя независимыми двигателями-маховиками [7, 56, 85]. В шаровом двигателе-маховике компоненты вектора управления реализуются тремя дугвыми статорами [20]. В избыточных системах дополнительно возникает задача о распределении вектора управления между отдельными двигателями-маховиками. Процесс преобразования вектора управления космическим аппаратом в требуемые моменты двигателей-маховиков будем называть

алгоритмом управления маховичной системой. Аналогичные задачи появляются в избыточных гиросиловых системах [28] и шаровых двигателях-маховиках с индукционными катушками [8, 27].

Рассмотрим избыточную маховичную систему, в состав которой входят  $n > 3$  одинаковых двигателей-маховиков. Пусть  $Oxyz$  – связанная система координат, относительно которой определяется схема установки двигателей-маховиков. Обозначим через  $\mathbf{h}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – единичный вектор, параллельный оси вращения  $i$ -го двигателя-маховика. За начало всех векторов  $\mathbf{h}_i$  выберем точку  $O$ . Совокупность векторов  $\mathbf{h}_i$  определяет схему установки двигателей-маховиков на космическом аппарате. Положение вектора  $\mathbf{h}_i$  в системе координат  $Oxyz$  может быть задано тремя направляющими косинусами  $h_{i1}, h_{i2}, h_{i3}$ .

Пусть  $m_i$  – управляющие моменты двигателей-маховиков,  $\mathbf{H}$  – вектор кинетического момента маховичной системы. Вектор управляющего момента маховичной системы

$$\mathbf{M}_0 = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{h}_i - \boldsymbol{\omega}_{КА} \times \mathbf{H}$$

складывается из двух составляющих. Первое слагаемое характеризует вектор управляющего момента, создаваемый за счет изменения скорости вращения двигателя-маховика, или вектор управляющего момента маховичной системы, установленной на неподвижном основании. Второе слагаемое определяет гироскопический момент, возникающий при вращении маховичной системы с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}_{КА}$  вместе с космическим аппаратом.

Первое слагаемое можно представить в матричном виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} \mathbf{m}, \quad (4.4)$$

где  $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$  – управляющие моменты маховичной системы по осям стабилизации;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & \dots & h_{n1} \\ h_{12} & h_{22} & \dots & h_{n2} \\ h_{13} & h_{23} & \dots & h_{n3} \end{bmatrix}$$

–  $3 \times n$  – матрица направляющих косинусов единичных векторов  $\mathbf{h}_i = (h_{i1}, h_{i2}, h_{i3})$ , определяющая схему установки электродвигателей-маховиков;  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  – управляющие моменты  $n$  электродвигателей-маховиков.

Задача управления маховичной системой заключается в нахождении управляющих моментов двигателей-маховиков  $m_i$ , обеспечивающих равенство вектора  $\mathbf{M}$  требуемому вектору управляющего момента космического аппарата. Чтобы не вводить дополнительные переменные, в дальнейшем будем полагать, что  $\mathbf{M}$  – требуемый вектор управляющего момента космического аппарата, определенный как функция угловых отклонений и угловых скоро-

стей космического аппарата и учитывающий гироскопическую составляющую вектора управляющего момента.

Из равенства (4.4) получим систему трех алгебраических уравнений (назовем их уравнениями моментов) для определения управляющих моментов  $n$  двигателей-маховиков

$$\mathbf{A}\mathbf{m} = \mathbf{M}. \quad (4.5)$$

Если спроектировать векторное равенство (4.5) на связанные оси, уравнения моментов примут вид

$$\begin{aligned} h_{11} m_1 + h_{21} m_2 + \dots + h_{n1} m_n &= M_x; \\ h_{12} m_1 + h_{22} m_2 + \dots + h_{n2} m_n &= M_y; \\ h_{13} m_1 + h_{23} m_2 + \dots + h_{n3} m_n &= M_z. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Если число двигателей-маховиков больше трех ( $n > 3$ ), то число неизвестных переменных  $m_i$  превышает число уравнений. Такая система может быть решена многими способами. Для однозначного решения она должна быть дополнена некоторыми уравнениями или условиями.

Избыточность маховичной системы позволяет оптимизировать некоторые показатели качества. В качестве критерия оптимальности маховичной системы может использоваться минимум суммы квадратов управляющих моментов маховиков [14, 18, 58]:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i^2. \quad (4.7)$$

Поскольку для создания управляющих моментов в маховичной системе используется электроэнергия, минимизация выражения (4.7) способствует косвенным образом минимизации энергопотребления маховичной системы. Достоинство функционалов вида (4.7) состоит в том, что их выбор предоставляет инженеру (для практической реализации в бортовой ЦВМ) готовый математический аппарат. Критерии оптимальности, напрямую связанные с энергопотреблением системы, часто оказываются «неудобными» для практической реализации.

Искомое решение может быть найдено методом неопределенных множителей Лагранжа, при этом уравнения моментов (4.5) или (4.6) используются в виде уравнений связи. Формально решение уравнений (4.5) можно получить, если умножить левую и правую части на транспонированную матрицу  $\mathbf{A}^T$ :

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})\mathbf{m} = \mathbf{A}^T \mathbf{M}.$$

Квадратная  $3 \times 3$  – матрица не является особой (существует ее обратная матрица), поэтому искомое решение может быть представлено в окончательном виде

$$\mathbf{m} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{M}. \quad (4.8)$$

#### 4.6.2. Управление минимально избыточной системой электродвигателей-маховиков

Рассмотрим избыточную маховичную систему, в состав которой входят четыре двигателя-маховика с максимальным кинетическим моментом  $H^*$ . Пусть  $Oxyz$  – связанная система координат, относительно которой определяется схема установки двигателей-маховиков. Обозначим через  $\mathbf{h}_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) – единичный вектор, параллельный оси вращения  $i$ -го двигателя-маховика. За начало всех векторов  $\mathbf{h}_i$  выберем точку  $O$ . Совокупность векторов  $\mathbf{h}_i$  определяет схему установки двигателей-маховиков на космическом аппарате. Полагаем, что в качестве оси симметрии конической поверхности, на которой следует располагать оси вращения двигателей-маховиков, выбрана ось  $Ox$ . Положение установочного вектора  $\mathbf{h}_i$  в системе координат  $Oxyz$  может быть задано тремя направляющими косинусами  $h_{i1}, h_{i2}, h_{i3}$  или двумя углами  $\alpha, \beta_i$ , которые вводятся следующим образом. Пусть вначале все векторы совпадают с направлением оси  $x$ . Вектор  $\mathbf{h}_i$  можно перевести в новое положение двумя поворотами. Первый поворот на угол  $\alpha$  (угол между образующей конуса и осью  $x$ ) осуществляется вокруг оси  $z$  (вектор попадает на коническую поверхность). Второй поворот на угол  $\beta_i$  производится вокруг оси  $x$  (вектор перемещается по поверхности конуса). Установочные углы  $\beta_i$  отличаются друг от друга на угол  $1/2\pi$ , т. е.

$$\beta_2 = \beta_1 + 1/2\pi; \beta_3 = \beta_2 + 1/2\pi = \beta_1 + \pi; \beta_4 = \beta_3 + 1/2\pi = \beta_1 + 3/2\pi.$$

Установочный угол  $\beta_1$  подлежит определению.

Направляющие косинусы и углы  $\alpha, \beta_i$  связаны соотношениями

$$h_{i1} = \cos\alpha; h_{i2} = \sin\alpha\cos\beta_i; h_{i3} = \sin\alpha\sin\beta_i.$$

Проекция вектора кинетического момента  $i$ -го двигателя-маховика  $\mathbf{H}_i = H_i\mathbf{h}_i$  на оси  $Oxyz$  составляют

$$H_{i1} = H_i\cos\alpha; H_{i2} = H_i\sin\alpha\cos\beta_i; H_{i3} = H_i\sin\alpha\sin\beta_i,$$

где кинетический момент двигателя-маховика  $H_i$  считается положительным, если направления векторов  $\mathbf{h}_i$  и  $\mathbf{H}_i$  совпадают, и отрицательным, если они противоположны.

В результате изменения всех векторов  $\mathbf{H}_i$  в диапазоне  $-H^* \leq H_i \leq H^*$  образуется область  $S$  изменения вектора кинетического момента маховичной системы, под которой понимается геометрическое место возможных положений вектора

$$\mathbf{H} = \Sigma \mathbf{H}_i = \Sigma H_i \mathbf{h}_i.$$

Форма области  $S$  зависит от схемы установки двигателей-маховиков, а ее размеры пропорциональны максимальному кинетическому моменту двигателя-маховика. Размеры и форма требуемой области  $S^*$  определяются тактико-техническими требованиями к динамике стабилизации и поворотов космического аппарата. Выбором схемы установки и максимального кинетического момента двигателя-маховика должно обеспечиваться условие  $S^* \in S$ .

Выберем установочные углы  $\alpha$  и  $\beta_1$ , обеспечивающие равенство максимальных кинетических моментов, создаваемых маховичной системой по осям стабилизации, т. е.  $H_x^* = H_y^* = H_z^*$ .

С учетом симметрии в расположении установочных векторов максимальные значения кинетических моментов, создаваемых маховичной системой по осям  $Oxyz$ , составят

$$H_x^* = 4H^* \cos\alpha, H_y^* = H_z^* = 4H^* \sin\alpha(\sin\beta_1 + \cos\beta_1).$$

Установочные углы  $\alpha = \text{arctg} \sqrt{2}$  и  $\beta_1 = 1/4\pi$  обеспечивают равенство максимальных кинетических моментов по трем осям  $Oxyz$ :

$$H_x^* = H_y^* = H_z^* = 4\sqrt{3}/3 H^*.$$

Схема установки четырех двигателей-маховиков изображена на рис. 4.25.

Чтобы реализовать такую схему установки, подставка-адаптер с четырьмя двигателями-маховиками, изображенная на рис. 4.3, должна быть повернута на угол  $1/2\pi$  вокруг оси  $Oz$ , после чего посадочная плоскость подставки становится параллельной координатной плоскости  $Oyz$ .

Область  $S$  минимально избыточной маховичной системы представляет собой ромбододекаэдр – 12-гранник, имеющий 14 вершин, 24 ребра, осевую и центральную симметрию (рис. 4.26). Его гранями являются одинаковые ромбы с длиной сторон  $2H^*$  и углами при вершинах  $\alpha$  и  $\pi - \alpha$ .

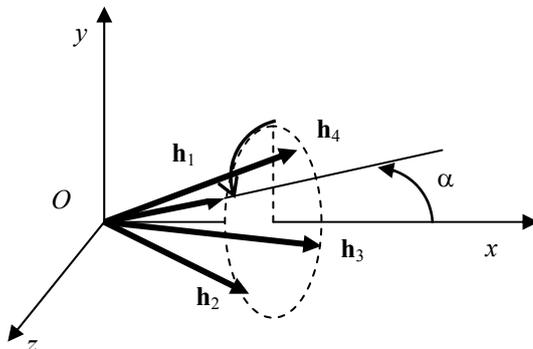


Рис. 4.25. Схема установки четырех двигателей-маховиков

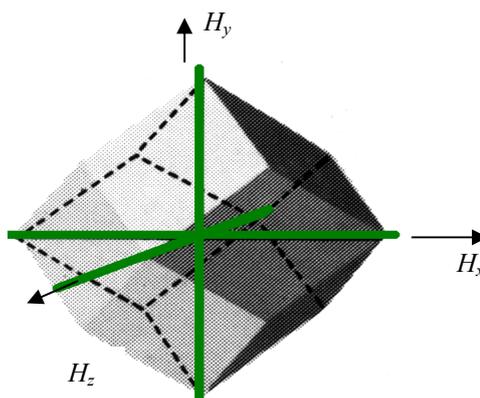


Рис. 4.26. Область изменения вектора кинетического момента минимально избыточной маховичной системы

Сечения области  $S$  координатными плоскостями имеют вид квадратов с длиной сторон  $4\sqrt{2/3} H^*$ , при этом вершины квадратов расположены на осях координат. Радиус описанной сферы составляет  $R = 4\sqrt{3}/3 H^* \cong 2,31 H^*$ , а радиус вписанной сферы равен  $r = 2\sqrt{2/3} H^* \cong 1,63 H^*$ .

Поверхность области  $S$  характеризует состояния насыщения маховичной системы. Грани области  $S$  образуются при насыщении двух, ребра – трех, а вершины – четырех двигателей-маховиков.

Объем  $V = \frac{64}{3}(H^*)^3$  области  $S$  складывается из объемов 12-ти правильных пирамид с общей вершиной  $O$ , высотой  $b = r = 2\sqrt{2/3} H^*$  и площадью основания, равной площади одного ромба. Область  $S$  в форме ромбододекаэдра имеет максимальный объем среди всех областей  $S$ , соответствующих произвольным схемам установки четырех двигателей-маховиков на космическом аппарате.

Свойства избыточных систем с произвольным числом маховиков исследованы в [17].

В частности, область  $S$  системы пяти одинаковых двигателей-маховиков представляет собой выпуклый 20-гранник. Его гранями являются ромбы с углами при вершинах

$$\gamma_1 = \arccos(\cos^2\alpha_* + \sin^2\alpha_*\cos 72^\circ) \approx 57,36^\circ;$$

$$\gamma_2 = \arccos(\cos^2\alpha_* + \sin^2\alpha_*\cos 144^\circ) \approx 101,9^\circ.$$

Объем области  $S$  складывается из объемов 10-ти пирамид, построенных на ромбах первого типа, и объемов 10-ти пирамид, построенных на ромбах второго типа,

$$V = \frac{40}{3}H^{*3}(10\sin 72^\circ + 3\sin 36^\circ)\sin^2\alpha\cos\alpha \approx 57,86H^{*3},$$

радиусы описанной и вписанной сфер составляют

$$R \approx 2,89H^*, r \approx 2,17H^*.$$

Область  $S$  системы шести одинаковых двигателей-маховиков представляет собой выпуклый 30-гранник. Его гранями являются ромбы с углами при вершинах  $\gamma_1 \approx 48,2^\circ$ ,  $\gamma_2 = 90^\circ$ ,  $\gamma_3 = 2\alpha^* \approx 109,5^\circ$ .

Объем области  $S$  складывается из объемов 12-ти пирамид, построенных на ромбах первого типа, 12-ти пирамид, построенных на ромбах второго типа, и 6-ти пирамид, построенных на ромбах третьего типа,

$$V = 144\sqrt{3} H^{*3}\sin^2\alpha\cos\alpha = 96H^{*3},$$

радиусы описанной и вписанной сфер составляют

$$R = 6H^* \cos\alpha^* \approx 3,46H^*; r = \sqrt[3]{3}H^* \approx 2,67H^*.$$

При отказах одного, двух или трёх двигателей-маховиков область  $S$  вырождается соответственно в 20-гранник, 12-гранник и параллелепипед.

Сравним минимально избыточную систему с традиционной системой из трех двигателей-маховиков, у которых кинетический момент может изменяться в диапазоне от  $-H^*$  до  $+H^*$ . Область  $S$  системы трех двигателей-маховиков имеет форму куба с длиной сторон  $2H^*$  (рис. 4.27). Радиус описанной сферы равен  $R = \sqrt{3} H^* \approx 1,73H^*$ , а вписанной  $r = H^*$ . Минимальный размер области  $S$  системы четырех двигателей-маховиков в 1,63 раза больше минимального размера области  $S$  системы трех двигателей-маховиков. По объему области  $S$  система трех двигателей-маховиков меньше в 2,67 раза.

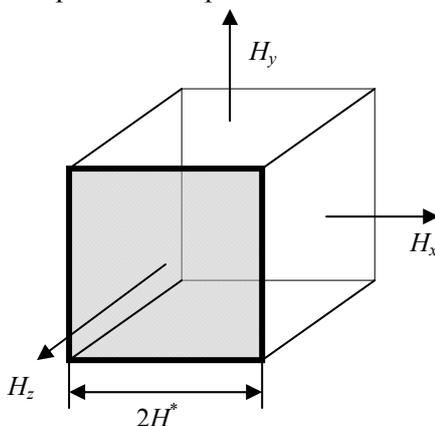


Рис. 4.27. Область  $S$  трех двигателей-маховиков

Характеристикой электромеханической системы может служить коэффициент использования кинетических моментов исполнительных органов в произвольном направлении, заданном единичным вектором  $\mathbf{r}$  [92]:

$$\chi_r = H_r / \Sigma H_i,$$

где  $H_r$  – максимальный кинетический момент, создаваемый электромеханической системой в направлении  $\mathbf{r}$  (размер области  $S$  в направлении  $\mathbf{r}$ );  $\Sigma H_i$  – арифметическая сумма кинетических моментов всех исполнительных органов. Поскольку направление  $\mathbf{r}$  произвольное, можно ввести величины

$$\chi_{\min} = H_{\min} / \Sigma H_i, \chi_{\max} = H_{\max} / \Sigma H_i.$$

Для трех электродвигателей-маховиков

$$\chi_{\min} = H^* / 3H^* \approx 0,33, \chi_{\max} = \sqrt{3} H^* / 3H^* \approx 0,58,$$

для четырех электродвигателей-маховиков

$$\chi_{\min} = 2\sqrt{2/3} H^* / 4H^* \approx 0,41, \chi_{\max} = 4\sqrt{3}/3 H^* / 4H^* \approx 0,58.$$

Соотношение  $(R - r)/r$  характеризует «несферичность» области  $S$ . Для системы трех двигателей-маховиков эта величина составляет 0,73, а для четырех двигателей-маховиков – 0,41.

В соответствии со схемой установки (см. рис. 4.25) и выбором установочных углов  $\alpha = \arctg \sqrt{2}$  и  $\beta_1 = 1/4\pi \times 4$  - матрица направляющих косинусов осей вращения двигателей-маховиков и уравнения моментов (4.6) примут вид

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} h_{11} m_1 + h_{21} m_2 + h_{31} m_3 + h_{41} m_4 &= M_x; \\ h_{12} m_1 + h_{22} m_2 + h_{32} m_3 + h_{42} m_4 &= M_y; \\ h_{13} m_1 + h_{23} m_2 + h_{33} m_3 + h_{43} m_4 &= M_z \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 &= \sqrt{3} M_x; \\ m_1 - m_2 - m_3 + m_4 &= \sqrt{3} M_y; \\ m_1 + m_2 - m_3 - m_4 &= \sqrt{3} M_z. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Используя общее решение (4.8), получим искомые требуемые моменты отдельных двигателей-маховиков

$$\begin{aligned} m_1 &= \sqrt{3}/4 (M_x + M_y + M_z); \\ m_2 &= \sqrt{3}/4 (M_x - M_y + M_z); \\ m_3 &= \sqrt{3}/4 (M_x - M_y - M_z); \\ m_4 &= \sqrt{3}/4 (M_x + M_y - M_z). \end{aligned} \quad (4.10)$$

К этому решению можно прийти другим способом. Двигатели-маховики, комплектующие минимально избыточную систему, можно объединить в две типовые группы. Пара двигателей-маховиков с нечетными номерами создает вектор управляющего момента

$$\mathbf{m}_{13} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_3 = m_1 \mathbf{h}_1 + m_3 \mathbf{h}_3$$

в плоскости, образованной установочными векторами  $\mathbf{h}_1$  и  $\mathbf{h}_3$ . Другая пара с четными номерами создает вектор управляющего момента

$$\mathbf{m}_{24} = \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_4 = m_2 \mathbf{h}_2 + m_4 \mathbf{h}_4$$

в ортогональной плоскости, образованной установочными векторами  $\mathbf{h}_2$  и  $\mathbf{h}_4$ . По линии пересечения ортогональных плоскостей (в данном случае это ось  $Ox$ ) управляющие моменты создаются двумя типовыми группами.

Возможности самонастройки минимально избыточной системы весьма ограничены и сводятся к распределению управляющего момента маховичной системы по оси  $Ox$  между двумя группами. Введем в рассмотрение функцию настройки

$$\mathbf{N} = \mathbf{m}_{13} - \mathbf{m}_{24} = (\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_3) - (\mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_4) = m_1 \mathbf{h}_1 + m_3 \mathbf{h}_3 - m_2 \mathbf{h}_2 - m_4 \mathbf{h}_4,$$

определяющую разность управляющих моментов, создаваемых первой и второй группами двигателей-маховиков. Спроектируем вектор  $\mathbf{N}$  на общую ось типовых пар  $Ox$

$$N_x = 1/\sqrt{3} (m_1 - m_2 + m_3 - m_4).$$

Одновременное задание  $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$  и  $N_x$  позволяет однозначно определить требуемые управляющие моменты двигателей-маховиков.

Исходная система уравнений моментов (4.9), дополненная уравнением настройки

$$m_1 - m_2 + m_3 - m_4 = \sqrt{3} N_x,$$

распадается на две подсистемы, которые могут решаться независимо друг от друга, для двух типовых групп

$$\begin{aligned} m_1 + m_3 &= \sqrt{3}/2 (M_x + N_x); & m_2 + m_4 &= \sqrt{3}/2 (M_x - N_x); \\ & & \text{и} & \\ m_1 - m_3 &= \sqrt{3}/2 (M_y + M_z); & m_2 - m_4 &= \sqrt{3}/2 (M_z - M_y). \end{aligned}$$

Складывая уравнения, а затем вычитая из первых уравнений вторые, найдем

$$\begin{aligned} m_1 &= \sqrt{3}/4 (M_x + M_y + M_z + N_x); \\ m_2 &= \sqrt{3}/4 (M_x - M_y + M_z - N_x); \\ m_3 &= \sqrt{3}/4 (M_x - M_y - M_z + N_x); \\ m_4 &= \sqrt{3}/4 (M_x + M_y - M_z - N_x). \end{aligned}$$

Полученные соотношения отличаются от (4.10) наличием функции настройки  $N_x$ . В частном случае можно потребовать, чтобы момент по оси  $Ox$  распределялся между типовыми группами поровну, тогда  $N_x = 0$ , полученные соотношения совпадают с (4.10), реализуется критерий настройки (4.7). Выбор оптимальной функции настройки  $N_x$  может преследовать различные цели

и представляет собой самостоятельную задачу. Выбор  $N_x \neq 0$  позволяет реализовать критерии настройки, отличные от (4.7) [14].

Алгоритмы управления избыточными маховичными системами произвольного вида изучаются в [18].

#### 4.7. ПРОГРАММНЫЕ ПОВОРОТЫ

Рассмотрим одноканальную маховичную систему в режиме плоского поворотного маневра (см. рис. 1.45).

При отсутствии внешних возмущающих моментов уравнения движения имеют вид

$$I\omega' = M, M = -dH/dt, H = I_M \Omega,$$

где  $I, I_M$  – моменты инерции космического аппарата и двигателя-маховика.

Полагаем, что в начальный момент времени угловые скорости космического аппарата и двигателя-маховика равны нулю:  $\omega(0) = \Omega(0) = 0$ .

Программа изменения угловой скорости космического аппарата  $\omega$  состоит из участков разгона, движения по инерции и торможения (рис. 4.28).

В соответствии с законом сохранения момента количества движения в процессе движения выполняется равенство

$$I\omega = -I_M \Omega, \quad (4.11)$$

где  $\omega, \Omega$  – абсолютные угловые скорости космического аппарата и двигателя-маховика вокруг оси  $Ox$ .

На участке разгона скорость космического аппарата, неподвижного в начальный момент времени, возрастает до величины  $\omega_n$  (см. рис. 4.28). Изменение угловой скорости космического аппарата от нуля до  $\omega_n$  вызывает приращение его кинетической энергии от нуля до

$$T = 1/2 I \omega_n^2.$$

Если бы существовала возможность непосредственного превращения электрической энергии солнечных батарей в кинетическую энергию вращения космического аппарата, то затраты электрической энергии на разгон космического аппарата до заданной скорости  $\omega_n$  составили бы  $T$ . Управление поворотом космического аппарата осуществляется за счет обмена кинетическим моментом между инерционной массой-маховиком и корпусом космического аппарата. На участке разгона скорость маховика, неподвижного в начальный момент времени, возрастает до величины  $\Omega_M$  (см. рис. 4.28). При этом кинетическая энергия двигателя-маховика возрастает на величину

$$T_M = 1/2 I_M \Omega_M^2.$$

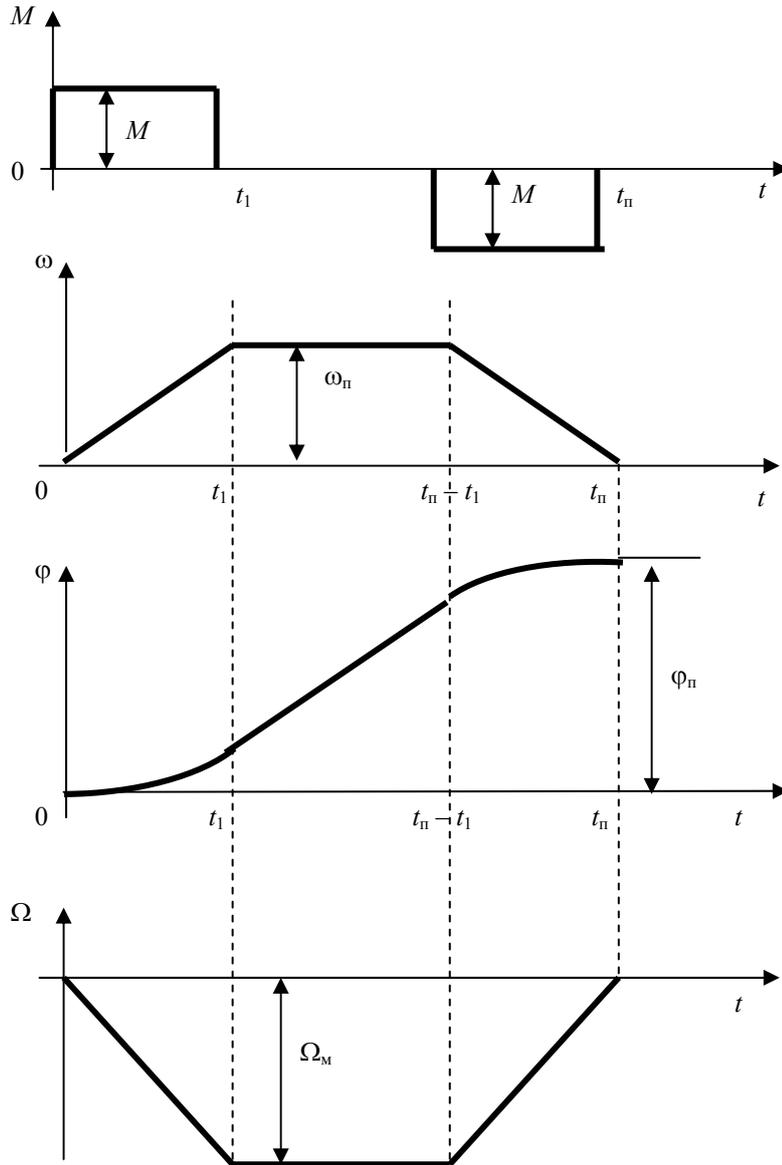


Рис. 4.28. Программный поворот

Общий расход электроэнергии на участке разгона составляет  $T + T_m$ . Отношение общего расхода электроэнергии  $T + T_m$  к полезному  $T$  (на изменение кинетической энергии космического аппарата)

$$n = (T + T_M)/T = 1 + T_M/T$$

в маховичных системах зависит от отношения моментов инерции космического аппарата и двигателя-маховика

$$n = 1 + I_M \Omega_M^2 / I \omega_n^2.$$

В силу (4.11)

$$|\Omega_M| = I \omega_n / I_M,$$

поэтому

$$n = 1 + I/I_M.$$

Так как отношение моментов инерции  $I/I_M$  велико, то отношение затраченной энергии к полезной тоже велико.

Общий расход энергии

$$T + T_M = 1/2 I \omega_n^2 (1 + I/I_M)$$

увеличивается с увеличением момента инерции космического аппарата даже при сохранении отношения  $I/I_M$ . С ростом моментов инерции космических аппаратов возрастают не только масса и энергопотребление двигателей-маховиков, возрастает масса всей аппаратуры управления, так как в ней циркулируют большие токи.

Величину, обратную  $n$ , можно рассматривать как условный «коэффициент полезного действия» электромеханической системы, обеспечивающей программные повороты космического аппарата,

$$\eta = \frac{1}{n} = \frac{1}{1 + I/I_M}.$$

При  $I/I_M \gg 1$ , что всегда выполняется на практике,

$$\eta \approx I_M/I,$$

т. е. с увеличением момента инерции космического аппарата «коэффициент полезного действия» падает.

Тем не менее на небольших космических аппаратах целесообразно использовать двигатели-маховики как исполнительные органы, обладающие конструктивной простотой и высокой надежностью. Опыт эксплуатации дви-

гателей-маховиков подтвердил эффективность их использования на небольших спутниках-автоматах и легких орбитальных станциях [86].

Сравним программные повороты на угол  $\varphi_n$ , удовлетворяющие трем критериям оптимальности:

- минимальный расход энергии;
- минимальное время поворота;
- минимальная пиковая (максимальная) мощность.

Для каждого типа программного поворота определим требуемые характеристики двигателя-маховика:

- управляющий момент  $M$ ;
- максимальный кинетический момент  $H$ ;
- потребляемую энергию  $T_m$ ;
- пиковую мощность  $N$ .

Определим эти характеристики для программного поворота общего вида (см. рис. 4.28):

$$M = I\varepsilon; \quad H = I\omega_n; \quad T_m = 1/2 I_M \Omega_m^2; \quad N = M\Omega_m,$$

где  $\varepsilon$  – ускорение космического аппарата на участке разгона.

Используя закон сохранения кинетического момента (4.11) и равенство  $\varepsilon = \omega_n/t_1$ , найдем

$$M = I\omega_n/t_1; \quad H = I\omega_n; \quad T_m = 1/2 I^2 \omega_n^2 / I_M; \quad N = I^2 \omega_n^2 / I_M t_1, \quad (4.12)$$

где  $t_1$  – время разгона космического аппарата до программной скорости  $\omega_n$ .

Выразим формулы (4.12) через заданный угол программного поворота  $\varphi_n$  и время поворота  $t_n$ . Поскольку

$$\varphi(t) = \int_0^t \omega(t) dt,$$

угол  $\varphi_n$  равен площади трапеции, образуемой интегрируемой функцией  $\omega(t)$ :

$$\varphi_n = \omega_n(t_n - t_1).$$

Подставляя  $\omega_n = \varphi_n/(t_n - t_1)$  в формулы (4.12), получим

$$M = I\varphi_n/(t_n - t_1)t_1; \quad H = I\varphi_n/(t_n - t_1); \quad T_m = 1/2 I^2 \varphi_n^2 / I_M (t_n - t_1)^2; \quad N = I^2 \varphi_n^2 / I_M (t_n - t_1)^2 t_1.$$

Минимальный расход энергии имеет место при  $t_1 \rightarrow 0$ :

$$T_{m \min} = 1/2 I^2 \varphi_n^2 / I_M t_n^2,$$

Однако при этом  $M \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$ .

Для программного поворота, оптимального по быстродействию  $t_1 = 1/2 t_n$  (см. рис. 3.16). Поэтому

$$M = 4I\varphi_n/t_n^2; H = 2I\varphi_n/t_n; T_m = 2I^2\varphi_n^2/I_m t_n^2 = 4T_{m \min}; N = 8I^2\varphi_n^2/I_m t_n^3.$$

При заданной величине управляющего момента  $M$  минимальное время поворота составит

$$t_{\min} = 2\sqrt{I\varphi_n/M}.$$

Для программного поворота, минимизирующего пиковую мощность, условие  $N = \min$  выполняется, если  $(t_n - t_1)^2 t_1 = \max$ . При этом  $t_1 = 1/3 t_n$  и, следовательно,

$$M = 4,5I\varphi_n/t_n^2; H = 1,5I\varphi_n/t_n; T_m = 9/8 I^2\varphi_n^2/I_m t_n^2 = 2,25T_{m \min}; N_{\min} = 6,75I^2\varphi_n^2/I_m t_n^3.$$

Полученные соотношения для оценки мощности и энергии, необходимых для выполнения программных поворотов космического аппарата, требуют корректировки при использовании двигателей-маховиков постоянного тока, обладающих свойством рекуперации энергии. Такие двигатели-маховики на участке торможения работают в генераторном режиме и возвращают в сеть электроэнергию, пропорциональную запасённой кинетической энергии вращающегося маховика [49].

#### **4.8. ВЫБОР ОСНОВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВИГАТЕЛЯ-МАХОВИКА**

Основными динамическими параметрами двигателя-маховика, влияющими на скорость угловых маневров космического аппарата, являются максимальный кинетический и максимальный управляющий моменты. Они определяют массу и энергопотребление маховичной системы. Основные динамические параметры двигателя-маховика должны обеспечивать выполнение двух режимов движения космического аппарата: стабилизацию и программные повороты. В режиме стабилизации двигатель-маховик должен аккумулировать импульс внешнего возмущающего момента, поддерживая угловое положение космического аппарата с высокой точностью. В режиме программных поворотов должна обеспечиваться высокая скорость маневров.

##### **4.8.1. Расчет кинетического и управляющего моментов двигателя-маховика в режиме программных поворотов**

Программа изменения угловой скорости космического аппарата с моментом инерции  $I$  изображена на рис. 4.28. Используя закон сохранения кинетическо-

го момента механической системы «космический аппарат – маховик», получим формулы для расчета кинетического и управляющего моментов двигателя-маховика

$$H \geq I\omega_n = I\varphi_n/(t_n - t_1); M \geq I\omega_n/t_1 = I\varphi_n/(t_n - t_1)t_1,$$

где  $\omega_n$ ,  $\varphi_n$  – скорость и угол поворота космического аппарата;  $t_1$  – время разгона космического аппарата до программной скорости  $\omega_n$ ;  $t_n$  – время программного поворота.

Для программного поворота, минимизирующего пиковую мощность ( $t_1 = 1/3 t_n$ )

$$H \geq 1,5 I\varphi_n/t_n; M \geq 4,5 I\varphi_n/t_n^2.$$

Выбор максимального кинетического момента двигателя-маховика определяет максимальную скорость космического аппарата

$$\omega_n = H/I.$$

Выбор максимального управляющего момента двигателя-маховика определяет максимальное ускорение космического аппарата

$$\varepsilon = M/I$$

и минимальное время разгона космического аппарата

$$t_1 = I\omega_n/M.$$

Применяя формулы, полученные в разделе 4.7, можно оценить энергопотребление двигателя-маховика и пиковую мощность.

В «линейных» двигателях-маховиках управляющий момент может изменяться от некоторого минимального (порогового) значения  $M_{\min}$  до максимального значения  $M_{\max}$ . Минимальное значение может определяться моментом сухого трения, а в дискретных системах при наличии квантования по уровню – величиной младшего разряда. *Важной характеристикой двигателя-маховика является кратность изменения управляющего момента*

$$n = M_{\max}/M_{\min}.$$

В современных двигателях-маховиках  $n = 100 - 1000$  и более. Необходимость регулирования управляющего момента в широком диапазоне вызвана тем, что, создавая большие управляющие моменты, необходимые для быстрых маневров космического аппарата, двигатель-маховик должен создавать и малые порции момента (соизмеримые с внешними возмущающими момента-

ми), необходимые для точной стабилизации космического аппарата. В реактивных системах такое противоречие разрешается установкой разных типов реактивных двигателей – для стабилизации (двигатели малой тяги) и программных поворотов. В линейных маховичных системах высокая точность стабилизации космического аппарата достигается за счет высокой кратности изменения управляющего момента.

#### 4.8.2. Расчет управляющего момента двигателя-маховика в режиме стабилизации

Если космический аппарат совершает программные повороты, то максимальный управляющий момент двигателя-маховика  $M_{\max}$  определяется требованиями этого режима. В режиме стабилизации космического аппарата необходимы значительно меньшие моменты. Наличие порогового уровня момента  $M_{\min}$  приводит к появлению статической ошибки по углу

$$\Delta\varphi = M_{\min}/k_1k_m = M_{\max}/nk_1k_m,$$

где  $n$  – кратность изменения управляющего момента;  $k_1$  – коэффициент усиления сигнала угла;  $k_m$  – крутизна статической характеристики двигателя-маховика.

Рассмотрим случай, когда программные повороты не производятся и единственным режимом углового движения космического аппарата является стабилизация. В режиме стабилизации должно выполняться условие  $M_{\max} \gg M_b$ , где  $M_b$  – внешний возмущающий момент. Этим обеспечивается возможность построения быстродействующей системы ориентации и высокая точность стабилизации.

Статическая ошибка линейной системы

$$\varphi_{ст} = M_b/k_1k_m$$

из-за действия постоянного внешнего возмущающего момента  $M_b$  должна быть мала. Она зависит от произведения коэффициентов  $k_1$  и  $k_m$ , устанавливающих пропорциональную зависимость между управляющим моментом двигателя-маховика и угловым отклонением космического аппарата. При наличии ограничений типа «насыщение» в статических характеристиках датчика угла ориентации и двигателя-маховика желательно, чтобы насыщение наступало одновременно. Тогда рабочие зоны (зоны линейности) датчика и двигателя-маховика используются рационально. В этом случае

$$M_{\max} = k_1k_m\varphi_{л} = M_b\varphi_{л}/\varphi_{ст},$$

где  $\varphi_{л}$  – зона линейности датчика угла. В возмущающий момент следует включать и момент сухого трения на оси маховика.

Максимальный управляющий момент двигателя-маховика  $M_{\max}$  должен обеспечивать и заданное быстродействие системы ориентации. Задание времени переходного процесса эквивалентно заданию собственной частоты  $\nu$  линейной системы:

$$\nu^2 = k_1 k_M / I.$$

Отсюда

$$M_{\max} = I \nu^2 \varphi_{\text{л.}}$$

На этих примерах видно, что максимальный управляющий момент двигателя-маховика определяется конкретными требованиями к системе ориентации – допустимой статической ошибкой и заданным быстродействием. Окончательный выбор максимальной величины управляющего момента осуществляется после тщательного изучения процессов динамики, происходящих в замкнутой системе.

#### *4.8.3. Расчет кинетического момента двигателя-маховика при стабилизации космического аппарата в орбитальной системе координат*

В режиме стабилизации двигателя-маховики системы ориентации должны обеспечивать аккумуляцию импульса периодической составляющей внешнего возмущающего момента. До сих пор рассматривался один канал системы ориентации, использовались упрощенные (линеаризованные) уравнения движения космического аппарата. Если кинетические моменты двигателей-маховиков изменяются в широком диапазоне, между каналами ориентации возникают перекрестные связи, которые необходимо учитывать в уравнениях движения космического аппарата. В этом случае следует использовать полные уравнения динамики космического аппарата, содержащего движущие массы (см. раздел 2.7)

$$d\tilde{\mathbf{k}}_c/dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_c = \mathbf{M}$$

или

$$d\tilde{(\mathbf{k} + \mathbf{H})}/dt + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{k} + \mathbf{H}) = \mathbf{M},$$

где  $\mathbf{k}_c = \mathbf{k} + \mathbf{H}$  – вектор кинетического момента системы «космический аппарат + двигатели-маховики»;  $\mathbf{k} = I\boldsymbol{\omega}$ ;  $I$  – тензор инерции космического аппарата;  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость космического аппарата;  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$  – вектор кинетического момента системы трех двигателей-маховиков;  $\mathbf{M}$  – вектор внешнего возмущающего момента.

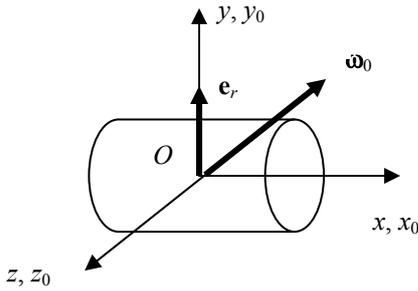
Предположим, что космический аппарат с тензором инерции общего вида

$$I = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}$$

вращается по круговой орбите, идеально стабилизирован в орбитальной системе координат и на него действует только гравитационный момент, который вычисляется по формулам (2.21) (см. раздел 2.8.1).

В состоянии идеальной стабилизации, когда оси космического аппарата  $Oxyz$  совпадают с осями базовой орбитальной системы координат  $Ox_0y_0z_0$ , вектор угловой орбитальной скорости  $\omega_0$  направлен по оси  $-Oz$ , а вектор  $e_r$  по оси  $Oy$  (рис. 4.29).

Вычислим кинетический момент космического аппарата, стабилизированного в орбитальной системе координат, учитывая, что  $\omega = \omega_0 = (0, 0, -\omega_0)$ :



$$k = I\omega = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xz} \omega_0 \\ I_{yz} \omega_0 \\ -I_z \omega_0 \end{bmatrix}.$$

Для круговых орбит  $\omega_0 = \text{const}$ , поэтому  $d^2k/dt^2 = 0$ , и уравнения динамики примут вид

Рис. 4.29. Космический аппарат, стабилизированный в орбитальной системе координат

$$d^2H/dt^2 + \omega_0 \times H = M_r + \omega_0 \times k. \quad (4.13)$$

В режиме идеальной стабилизации, когда  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = 1$ ,  $\gamma_3 = 0$ , проекции вектора гравитационного момента на связанные оси космического аппарата (2.21) вычисляются по формулам

$$M_{rx} = -3\omega_0^2 I_{yz}; M_{ry} = 0; M_{rz} = 3\omega_0^2 I_{xy}.$$

Пусть  $i, j, k$  – орты связанных осей  $Oxyz$ . Раскрывая векторные произведения

$$\omega_0 \times k = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -\omega_0 \\ I_{zx}\omega_0 & I_{zy}\omega_0 & -I_z\omega_0 \end{bmatrix} = I_{yz}\omega_0^2 i + I_{xz}\omega_0^2 j,$$

$$\omega_0 \times H = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -\omega_0 \\ H_x & H_y & H_z \end{bmatrix} = H_y\omega_0 i + H_x\omega_0 j$$

и проектируя равенство (4.13) на связанные оси  $Oxyz$ , получим систему трех дифференциальных уравнений для расчета кинетических моментов двигателей маховиков  $H_x, H_y, H_z$ :

$$\begin{aligned} dH_x/dt + \omega_0 H_y &= -4 I_{yz} \omega_0^2; \\ dH_y/dt - \omega_0 H_x &= I_{xz} \omega_0^2; \\ dH_z/dt &= 3 I_{xz} \omega_0^2. \end{aligned}$$

Поскольку третье уравнение может интегрироваться независимо, рассмотрим сначала систему двух первых дифференциальных уравнений. Обозначим  $A = -4 I_{yz} \omega_0$ ,  $B = I_{xz} \omega_0$ . Решим систему уравнений

$$\begin{aligned} H'_x + \omega_0 H_y &= A \omega_0; \\ H'_y - \omega_0 H_x &= B \omega_0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

при начальных условиях  $H_x(0) = H_y(0) = 0$ ,  $H'_x(0) = A \omega_0$ ,  $H'_y(0) = B \omega_0$ . Начальные условия по скорости определяют управляющие моменты двигателей маховиков в начальный момент времени. Продифференцируем второе уравнение по времени

$$\begin{aligned} H''_x &= A \omega_0 - \omega_0 H'_y; \\ H''_y - \omega_0 H'_x &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя первое уравнение во второе, получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка для нахождения  $H_y$

$$H''_y + \omega_0^2 H_y = \omega_0^2 A. \quad (4.15)$$

Используя частное решение  $H_{y1} = A$  (оно зависит от правой части), общее решение уравнения (4.15) запишем в виде

$$H_y(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + A,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования, которые определяются начальными условиями.

При  $t = 0$ , используя начальное условие  $H_y(0) = 0$ , получим:  $0 = C_2 + A$ , т. е.  $C_2 = -A$ .

Продифференцируем общее решение по времени

$$dH_y(t)/dt = C_1 \omega_0 \cos \omega_0 t + A \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

При  $t = 0$ , используя начальное условие по скорости  $H'_y(0) = B \omega_0$ , получим  $B \omega_0 = C_1 \omega_0$ , т. е.  $C_1 = B$ .

После определения постоянных интегрирования общее решение и его производная примут вид

$$H_y(t) = B\sin\omega_0 t - A\cos\omega_0 t + A;$$

$$dH_y(t)/dt = B\omega_0\cos\omega_0 t + A\omega_0\sin\omega_0 t.$$

Из второго уравнения (4.14) найдем закон изменения кинетического момента маховика, установленного по оси  $Ox$ ,

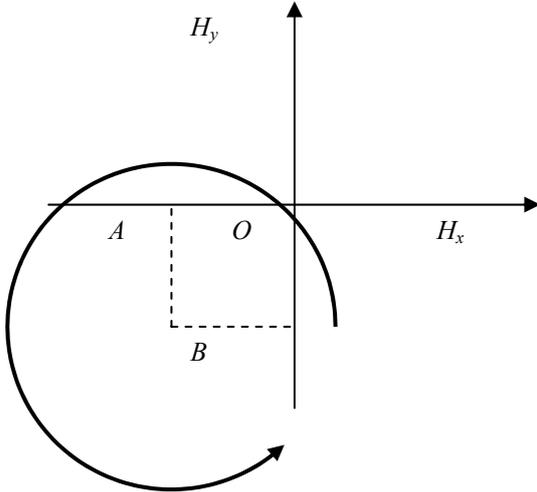


Рис. 4.30. Траектория кинетического момента

$$H_x = H'_y/\omega_0 - B =$$

$$= B\cos\omega_0 t + A\sin\omega_0 t - B.$$

Равенства

$$H_x + B =$$

$$= B\cos\omega_0 t + A\sin\omega_0 t;$$

$$H_y - A =$$

$$= B\sin\omega_0 t - A\cos\omega_0 t$$

возведем в квадрат и сложим. На плоскости параметров  $(H_x, H_y)$  получим уравнение окружности

$$(H_x + B)^2 + (H_y - A)^2 =$$

$$= A^2 + B^2$$

с радиусом  $(A^2 + B^2)^{1/2}$  и центром в точке с координатами  $(-B, A)$  (рис. 4.30).

Следовательно, при идеальной стабилизации в орбитальной системе координат суммарный вектор кинетического момента двух маховиков, установленных по осям  $Ox$  и  $Oy$  под действием гравитационного момента описывает окружность

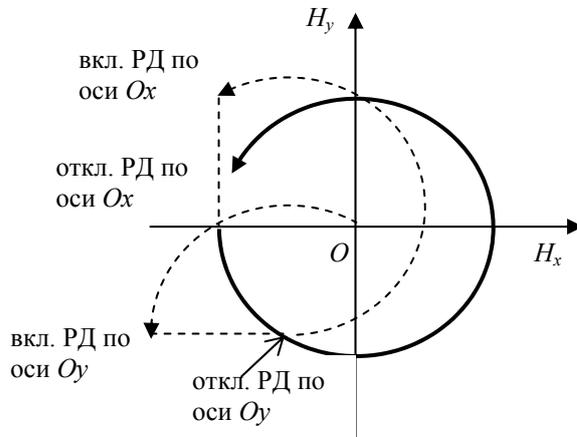


Рис. 4.31. Траектория кинетического момента после включения реактивных двигателей

$$(H_x + \omega_0 I_{xz})^2 + (H_y +$$

$$+ 4\omega_0 I_{yz})^2 = \omega_0^2 (16I_{yz}^2 + I_{xz}^2).$$

Центр окружности можно сместить в точку  $O$ . Для этого нужно включить реактивные двигатели по оси  $Oy$  и создать импульс тяги, равный  $A$ , затем включить реактивные двигатели по оси  $Ox$  и создать импульс тяги, равный  $B$  (рис. 4.31).

В процессе движения по окружности происходит «перекачка» кинетического момента с оси  $Ox$  на ось  $Oy$  и обратно. Максимальные кинетические моменты двигателей-маховиков по осям  $Ox$  и  $Oy$  должны быть больше  $(A^2 + B^2)^{1/2}$ , т. е.

$$H_{x \max}, H_{y \max} > \omega_0^2(16I_{yz}^2 + I_{xz}^2).$$

Гравитационный момент, действующий на космический аппарат в орбитальной системе координат, является постоянным. Составляющая этого момента, действующая в координатной плоскости  $Ox_0y_0$ , как показывают полученные соотношения, вызывает периодические изменения кинетических моментов двигателей-маховиков, установленных по осям  $Ox$  и  $Oy$ . Такой режим работы не требует разгрузки двигателей-маховиков и не приводит к расходу реактивного топлива.

Постоянная составляющая внешнего возмущающего момента в плоскости  $Ox_0y_0$  будет переменной в инерциальной системе координат. Импульс этого момента за один период обращения космического аппарата по орбите  $T = 2\pi/\omega_0$  будет равен нулю.

Для моделирования процессов динамики можно воспользоваться пакетом прикладных программ MATLAB. С этой целью уравнения (4.14), разрешенные относительно производных

$$\begin{aligned} H'_x &= A\omega_0 - \omega_0 H_y; \\ H'_y &= B\omega_0 + \omega_0 H_x, \end{aligned}$$

преобразуются по Лапласу и представляются в виде структурной схемы, изображенной на рис. 4.32. На ней хорошо видны перекрестные связи между каналами стабилизации.

Перейдем к третьему уравнению динамики

$$dH_z/dt = 3I_{xz}\omega_0^2,$$

которое решается независимо от двух других. Постоянный момент, действующий по оси  $Oz$ , является постоянным в инерциальной системе координат и приводит к нарастанию кинетического момента двигателя-маховика по оси  $Oz$ :

$$H_z = M_{tz} dt = 3\omega_0^2 I_{xz} t.$$

Двигатель-маховик, установленный по оси  $Oz$ , требует разгрузки. При разгрузке на космический аппарат могут действовать большие управляющие моменты

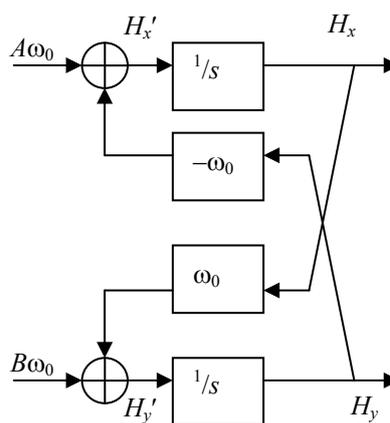


Рис. 4.32. Схема моделирования

реактивных двигателей, что снижает точность стабилизации. Поэтому во время научных наблюдений, требующих высокой точности наведения аппаратуры, разгрузку желательно не производить. Если  $t_p$  – время между разгрузками двигателя-маховика, то максимальный кинетический момент должен удовлетворять условию

$$H_{y \max} > M_{Tz} t_p.$$

Допустимое время между разгрузками определяется длительностью сеансов научных наблюдений.

Изменения кинетических моментов двигателей-маховиков связаны с характером действующих на космический аппарат внешних возмущающих моментов. Выше мы изучили изменение кинетических моментов двигателей-маховиков под действием гравитационных моментов. Для полноты картины рассмотрим действие возмущающего момента  $\mathbf{M}_B$  другого типа, а именно, постоянного в инерциальной системе координат (в плоскости, параллельной координатной плоскости  $Ox_0y_0$ ). Такой момент в орбитальной системе координат будет переменным (периодическим). Постоянный по модулю, вектор  $\mathbf{M}_B$  будет вращаться с угловой орбитальной скоростью  $\omega_0$ . Пусть в начальный момент времени вектор  $\mathbf{M}_B$  совпадает с орбитальной осью  $Ox_0$  (см. рис. 4.29). Тогда проекции этого момента на оси космического аппарата составят

$$M_{Bx} = M_B \cos \omega_0 t, \quad M_{By} = M_B \sin \omega_0 t.$$

Чтобы исключить влияние гравитационного момента, будем считать все центробежные моменты инерции равными нулю, тогда уравнения динамики примут вид

$$\begin{aligned} dH_x/dt + \omega_0 H_y &= M_B \cos \omega_0 t; \\ dH_y/dt - \omega_0 H_x &= M_B \sin \omega_0 t; \\ dH_z/dt &= 0. \end{aligned}$$

Третье уравнение решается независимо.

Продифференцируем первое уравнение по времени, а из второго выразим  $H'_y$ :

$$\begin{aligned} H''_x + \omega_0 H'_y &= -M_B \omega_0 \sin \omega_0 t; \\ H'_y &= \omega_0 H_x + M_B \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Подставляя второе уравнение в первое, получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка для нахождения  $H_x$ :

$$H''_x + \omega_0^2 H_x = -2M_B \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

Из решения уравнения

$$H_x(t) = -M_B t \omega_0 \sin \omega_0 t$$

следует, что кинетический момент двигателя-маховика по оси  $Ox$  нарастает и с течением времени двигатель-маховик достигнет состояния насыщения. Этот пример показывает, что возмущающие моменты, постоянные в инерциальной системе координат, вызывают насыщение электромеханической системы по кинетическому моменту.

**ГИРОСИЛОВЫЕ СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ  
КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ**

- ◆ Назначение и состав системы
- ◆ Устройство и принцип действия  
    гиродина
- ◆ Свойство усиления момента
  - ◆ Математическая модель  
        гиродина
- ◆ Динамика гиросиловой системы  
    в режиме стабилизации
- ◆ Обобщенные динамические  
    характеристики гиросиловых  
    систем ориентации
  - ◆ Алгоритмы управления  
        гиродинами
  - ◆ Программные повороты
- ◆ Выбор основных динамических  
    характеристик гиродина

Разработка в НПП ВНИИЭМ гиродина с электромагнитным подвесом ротора открыла широкие перспективы для использования электромеханических систем ориентации на крупных космических аппаратах [86, 102, 108].

Варьируя число и схему установки гиродинов на космическом аппарате, можно проектировать электромеханические системы, обладающие разнообразными свойствами и гибкостью к изменению конфигурации. Применение гиродинов стимулировало развитие теории нового класса гиросиловых систем, которые в отличие от классических гиросtabilизаторов [55, 80] изменяют кинетический момент в широком диапазоне. Основополагающий вклад в развитие теории внесли Б.В. Раушенбах, Е.Н. Токарь, В.Н. Платонов и их коллеги [65, 85, 92 – 101].

На орбитальном комплексе «Мир» в течение длительного времени функционировала электромеханическая система, в состав которой входили 12 гиродинов, объединенных в две «пространственные» группы, установленные по схеме «додекаэдр» [102]. Благодаря избыточности гиросиловая система имеет высокую «живучесть» [71] и сохраняет работоспособность при выходе из строя нескольких гиродинов.

Наряду с этим большой практический интерес представляют системы из четырех гиродинов, обладающие минимальной избыточностью. Такие системы имеют минимальную массу, сохраняют работоспособность при отказе одного гиродина и перспективны для использования на небольших орбитальных станциях и крупных космических аппаратах. Планировалась замена маховичной системы ориентации орбитальной станции «Алмаз» [20, 86] на систему четырех гиродинов. Возможности использования сильно избыточных гиродинных систем обсуждаются в работах [65, 99].

Научные свершения орбитальной станции «Мир», связанные с наблюдениями Земли и неба, в частности открытие Сверхновой звезды, во многом обязаны гиродинам [102].

### 5.1. НАЗНАЧЕНИЕ И СОСТАВ СИСТЕМЫ

Исполнительными органами гиросиловых систем ориентации являются двухстепенные силовые гироскопы-гиродины. Чтобы различать силовые и приборные гироскопы, в НПП ВНИИЭМ для обозначения силовых гироскопов предложен термин «гиродины» («гиро» – гироскоп, «дина» – единица силы в гауссовской системе единиц СГСМ).

Область применения гиросиловых систем – крупные космические аппараты и аппараты, совершающие быстрые маневры вокруг центра масс. Эффективность применения силовых гироскопов по сравнению с двигателями-маховиками возрастает с увеличением моментов инерции космических аппаратов. Гиросиловая система в течение 15-ти лет успешно эксплуатировалась на орбитальной станции «Мир». Первоначально на базовом блоке станции, а затем и на модуле «Квант» были установлены две одинаковые гиросиловые системы, состоящие из шести гиродинов.

Гиросиловые системы используются в основных режимах ориентации станции:

- поиск ориентиров;
- стабилизация в орбитальной и инерциальной системах координат;
- программные повороты.

Для начального успокоения используются реактивные системы. Это связано с тем, что в режиме начального успокоения солнечные батареи еще не раскрыты, а раскрутка роторов гиродинов производится в течение длительного времени и требует притока энергии.

Принцип действия гиросиловых систем основан на законе сохранения момента количества движения. В маховичных системах изменение кинетического момента осуществляется за счет регулирования скорости вращения маховиков, в гиросиловых системах – за счет изменения взаимного углового положения роторов, вращающихся с постоянной скоростью. Поскольку двигатели-маховики значительно проще по конструкции, применение гиросиловых систем оправдано в тех случаях, когда установка гиродинов обеспечивает значительный выигрыш по массе и энергопотреблению системы ориентации.

Создавая электромеханическую систему ориентации, необходимо определить число исполнительных органов и схему их установки на космическом аппарате. В маховичных системах эта задача решается тривиально: три двигателя-маховика располагаются параллельно трем осям космического аппарата. Применение силовых гироскопов позволяет ставить задачу оптимизации массовых и энергетических характеристик гиросиловой системы за счет рационального выбора числа  $n$  гиродинов и схемы их установки на космическом аппарате. Решение сложной задачи оптимизации характеристик гиросиловой системы облегчается в ряде практических случаев. Крупные космические аппараты часто имеют форму вытянутого цилиндра. Наиболее экономичными для таких космических аппаратов являются повороты вокруг продольной оси  $Ox$  – оси наименьшего момента инерции. Чтобы использовать для поворотов кинетические моменты всех гиродинов, целесообразно их оси прецессии располагать перпендикулярно оси  $Ox$ .

Рассмотрим гиросиловую систему, состоящую из  $n = 4$  одинаковых гиродинов с кинетическим моментом  $G$ . Оси прецессии, перпендикулярные оси  $Ox$ , можно расположить в виде квадрата, плоскость которого перпендикулярна оси  $Ox$  (рис. 5.1)

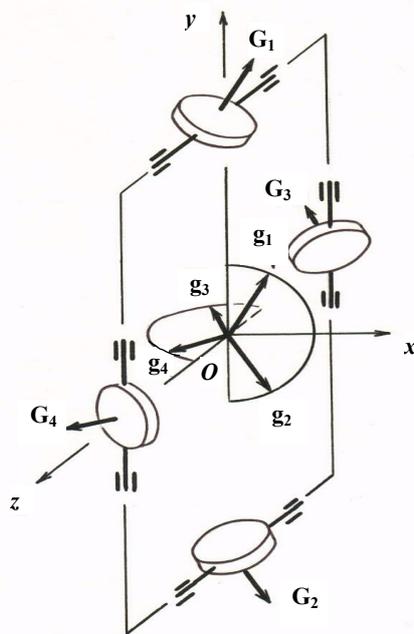


Рис. 5.1. Схема установки четырех гиродинов

Гиродины изображены в виде гиروزлов, которые могут поворачиваться вокруг осей прецессии. Повороты гиروزлов вызывают изменение углового положения векторов кинетических моментов гиродин  $\mathbf{G}_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Единичные векторы  $\mathbf{g}_i$ , параллельные векторам  $\mathbf{G}_i$  и приведенные в общую точку  $O$ , начало связанной системы координат, дают картину взаимного углового положения вращающихся с постоянной скоростью роторов гиродин. Положения векторов  $\mathbf{G}_i$  при нулевом кинетическом моменте гиросиловой системы условно показаны на рис. 5.2. Ради упрощения рисунка изображения гиروزлов на нем опущены.

Для поворотов космического аппарата вокруг оси  $Ox$  гиросиловая система может использовать кинетические моменты всех четырех гиродин, создавая максимальный кинетический момент, равный  $H_{x \max} = 4G$  (рис. 5.3). По осям  $Oy$  и  $Oz$  гиросиловая система может создавать кинетические моменты, равные  $2G$  (рис. 5.4).

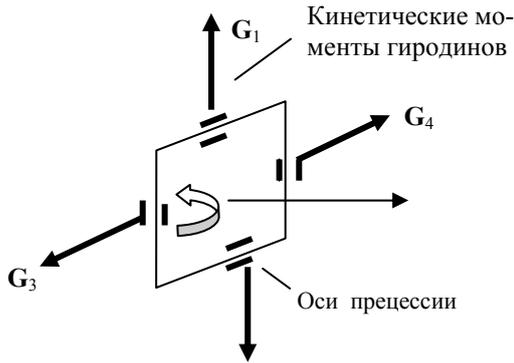


Рис. 5.2. Положение векторов  $\mathbf{G}_i$  при нулевом кинетическом моменте

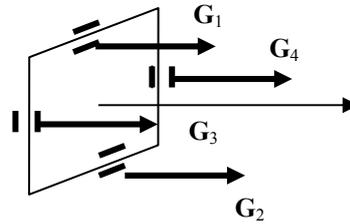


Рис. 5.3. Положение векторов  $\mathbf{G}_i$  при создании кинетического момента по оси  $Ox$

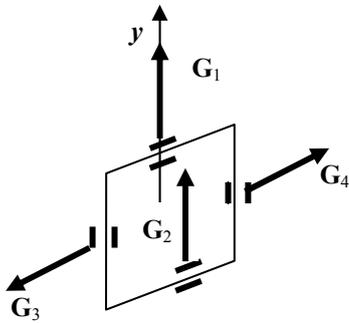
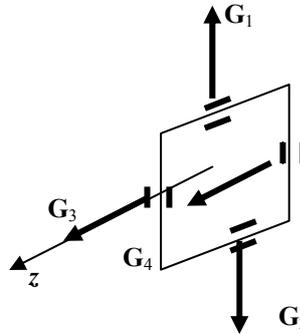


Рис. 5.4. Положение векторов  $\mathbf{G}_i$  при создании кинетических моментов по осям  $Oy$  и  $Oz$



Вокруг оси  $Ox$  гиросиловая система обеспечивает максимальную скорость поворотов космического аппарата  $\omega_x = 4G/J_x$ , вокруг осей  $Oy$  и  $Oz$   $\omega_y = 2G/J_y$ ,  $\omega_z = 2G/J_z$ , где  $J_x, J_y, J_z$  – осевые моменты инерции космического аппарата.

Изучаемую гиросиловую систему можно представить несколько иначе – в виде двух типовых групп гиросиловых систем с параллельными осями прецессии (рис. 5.5). Начала всех векторов кинетических моментов гиросиловых систем  $G_i$  (по аналогии с единичными векторами  $g_i$  на рис. 5.1.) приведены в общую точку  $O$ . Векторы кинетических моментов гиросиловых систем первой группы вращаются в координатной плоскости  $Oxy$ , второй – в плоскости  $Oxz$ .

В ряде случаев требуется, чтобы гиросиловая система могла создавать равные кинетические моменты в любых произвольных направлениях. Тогда оси прецессии гиросиловых систем следует равномерно распределить по полусфере (внутри телесного угла  $2\pi$ ). Равномерное распределение обеспечивает установка осей прецессии перпендикулярно непараллельным граням правильных многогранников.

При  $n = 4$  оси прецессии устанавливаются перпендикулярно граням октаэдра, у которого 8 граней, 6 вершин и 12 ребер (рис. 5.6). Векторы кинетических моментов гиросиловых систем вращаются в непараллельных гранях октаэдра.

Оси прецессии 6-ти гиросиловых систем устанавливаются перпендикулярно 6-ти непараллельным граням додекаэдра, у которого 12 граней в форме правильных пятиугольников, 20 вершин и 30 ребер. Вид на схему установки гиросиловых систем со стороны оси  $Ox$  изображен на рис. 5.7. Вдоль оси  $Ox$  гиросиловая система может создавать кинетический момент  $4,47G$ , вдоль осей  $Oy$  и  $Oz$  –  $4,75G$ . Такая схема установки использовалась на орбитальной станции «Мир».

Оси прецессии 10-ти гиросиловых систем следует устанавливать перпендикулярно 10-ти непараллельным граням икосаэдра (правильный 20-гранник с гранями в виде треугольников).

Гиросиловая система, состоящая из трех трехстепенных силовых гироскопов, применялась для управления ориентацией американской орбитальной

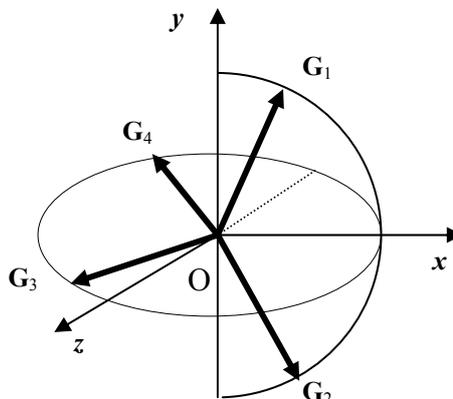


Рис. 5.5. Две типовые группы гиросиловых систем

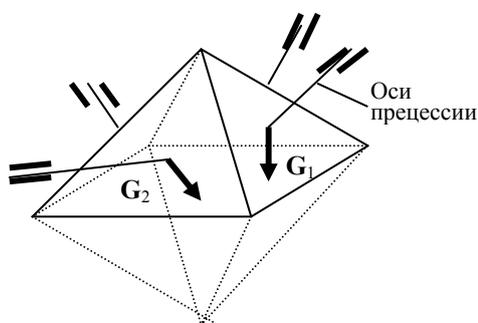


Рис. 5.6. Установка осей прецессии четырех гиросиловых систем перпендикулярно граням октаэдра

станцией «Скайлаб» [59, 66]. Силовые гироскопы используются для управления международной космической станцией.

В состав гиросиловой системы входят датчики угла ориентации и угловой скорости (ДУС), бортовая ЦВМ и гиродины. Меняя число и схему установки гиродинов на космическом аппарате, можно создавать гиросиловые системы ориентации, обладающие разнообразными свойствами. Функциональная схема одного канала гиросиловой системы ориентации изображена на рис. 5.8.

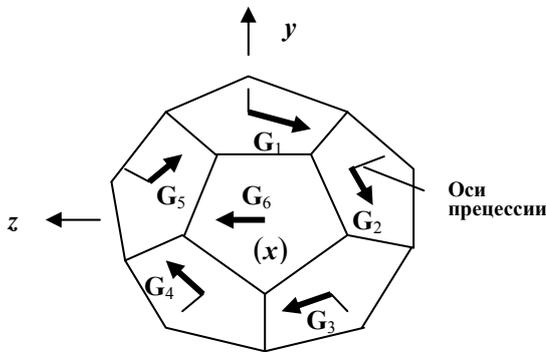


Рис. 5.7. Установка осей прецессии шести гиродинов перпендикулярно граням додекаэдра

На основе информации  $u_1, u_2$ , поступающей с датчиков угла и угловой скорости и с учетом информации об угловом положении  $\beta_i$  роторов гиродинов бортовая ЦВМ вычисляет сигналы управления гиросиловой системой – сигналы требуемых скоростей прецессии  $\lambda_i$ . Под действием сигналов управления гиросиловая система

создает вектор управляющего момента  $\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i$ , равный сумме управляющих моментов отдельных гиродинов. Изменения углового положения  $\varphi$  и угловой скорости  $\varphi'$  космического аппарата фиксируются датчиками.

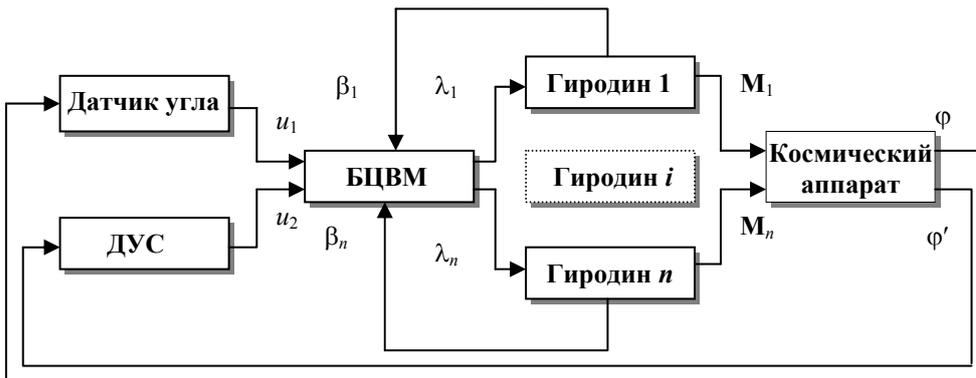


Рис. 5.8. Функциональная схема гиросиловой системы ориентации

По аналогии с маховичными системами контур управления угловым положением космического аппарата должен быть дополнен контуром регулирования кинетического момента гиросиловой системы, т. е. системой разгрузки.

## 5.2. УСТРОЙСТВО И ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ ГИРОДИНА

Основными функциональными устройствами гиродина являются гиروزел, привод прецессии, датчик углового положения гиروزла и кольцевые контактные токоподводы (рис. 5.9).

Массивный ротор *1* гиродина вращается с большой скоростью гиромотором *2* вокруг главной оси, создавая постоянный по величине кинетический момент  $G$ . Скорость вращения поддерживается с высокой точностью системой регулирования, в которой чувствительным элементом служит тахогенератор *3*. Ось ротора установлена в электромагнитных подшипниках *4*, *12* главной оси *13*.

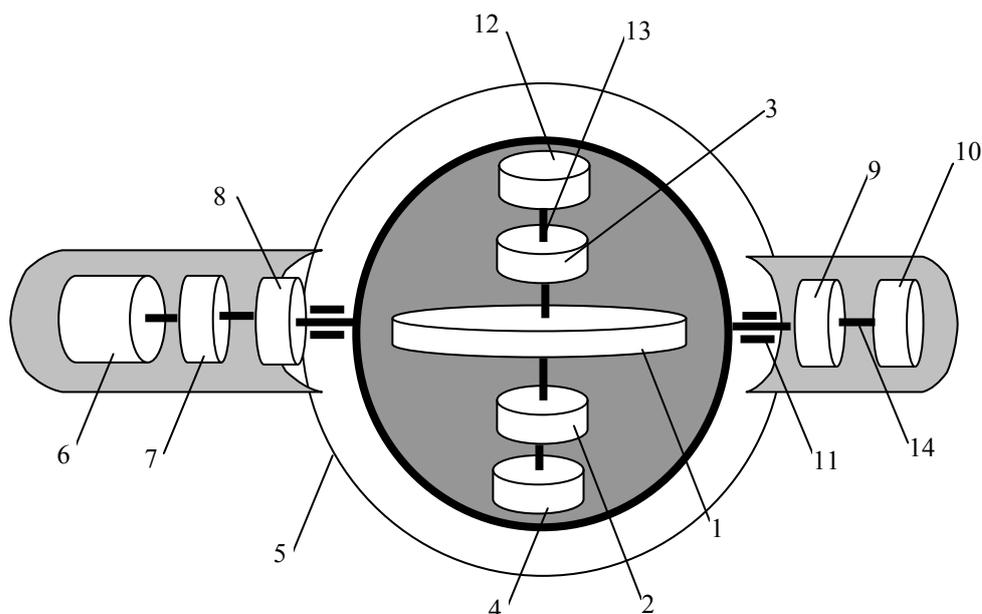


Рис. 5.9. Устройство гиродина

При помощи следящего привода, привода прецессии, гирузел поворачивается вокруг оси подвеса рамы – оси прецессии *14*. Вместе с гирузлом поворачивается вектор кинетического момента гиродина  $G$ , направленный вдоль главной оси. В состав привода прецессии входят: асинхронный электродвигатель *6*, тахогенератор обратной связи по скорости *8* и редуктор с большим передаточным отношением *7*.

Датчик положения *9* предназначен для выдачи сигналов обратной связи, пропорциональных синусу и косинусу углового положения гиروزла – угла прецессии. Ось прецессии *14* вращается в шарикоподшипниках *11*, которые неподвижны относительно корпуса космического аппарата.

Кольцевые токоподводы *10* обеспечивают повороты гирузла на неограниченные углы прецессии.

Для снижения аэродинамических потерь, возникающих при быстром вращении ротора, корпус гиродинна 5 вакуумирован – соединен специальными трубками с космическим пространством.

Вектор управляющего момента гиродинна

$$\mathbf{M} = -\lambda \times \mathbf{G} - \omega \times \mathbf{G}$$

складывается из двух составляющих: управляющего момента, создаваемого за счет регулирования скорости прецессии  $\lambda$ , и гироскопического момента, возникающего при вращении гиродинна с угловой скоростью  $\omega$  вместе с космическим аппаратом. Первая составляющая управляющего момента передается на корпус через подшипники оси прецессии  $II$ , не нагружая привод прецессии. Проекция второй составляющей на ось прецессии является моментом нагрузки для привода прецессии. Он компенсируется электромагнитным моментом привода, так что движение гироузла связано только с сигналом скорости прецессии  $\lambda$ .

Управляющий момент идеального гиродинна, установленного на неподвижном основании, пропорционален входному сигналу привода прецессии и направлен по оси чувствительности, перпендикулярной главной оси и оси прецессии (рис. 5.10).

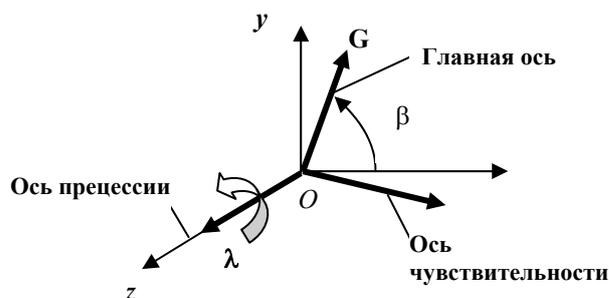


Рис. 5.10. Вектор управляющего момента гиродинна

Модуль управляющего момента  $M = G\lambda$  регулируется от нуля до  $M_{\max} = G\lambda^*$ , где  $\lambda^*$  – максимальная скорость прецессии. Положение вектора управляющего момента непрерывно меняется и зависит от угла прецессии  $\beta$ .

Структурная схема идеального гиродинна, установленного на неподвижном основании, изображена на рис. 5.11.

Величина  $G$  может рассматриваться как коэффициент преобразования скорости прецессии в управляющий момент или как крутизна статической характеристики гиродинна.

Структурная схема имеет два силовых выхода  $M_x$  и  $M_y$ , результат проектирования вектора  $\mathbf{M}$  на оси  $Ox$  и  $Oy$ , и два измерительных выхода, с которых снимаются сигналы, пропорциональные синусу и косинусу угла прецессии.

Во время штатной эксплуатации момент нагрузки компенсируется электромагнитным моментом привода прецессии, так что движение гиروزла связано только с сигналом скорости прецессии  $\lambda$ . В аварийной ситуации при отключении питания сигнал скорости прецессии отсутствует, а выбег ротора продолжается в течение длительного времени. Если в это время космический аппарат совершает угловые маневры, то под действием гироскопического момента, пропорционального скорости угловых маневров  $\omega$ , гиروزел начинает вращаться вокруг оси прецессии. Появляющийся затем гироскопический момент, пропорциональный скорости прецессии гиروزла, может значительно превышать допустимый момент, на который рассчитаны подшипниковые узлы. Для эффективного торможения гиروزла (уменьшения скорости прецессии) целесообразно применять специальные тормозные устройства, которые срабатывают только в аварийных режимах.

В условиях нормальной эксплуатации тормозное устройство не должно снижать технические характеристики изделия. Наиболее полно этим требованиям отвечает центробежное тормозное устройство [36]. Оно устанавливается на входном валу редуктора привода прецессии (на рис. 5.9 не показано).

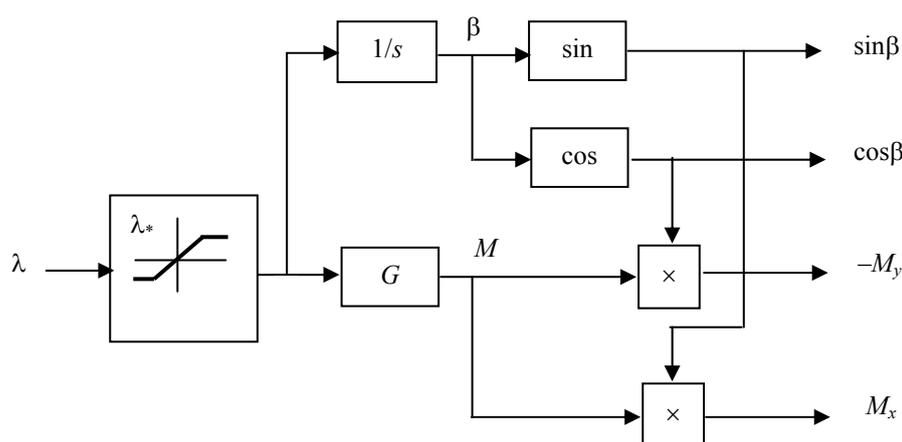


Рис. 5.11. Структурная схема гиродина

Общий вид гиродина изображен на фотографии (см. рис. 1.62), его технические характеристики приведены в разделе 1.12.

### 5.3. СВОЙСТВО УСИЛЕНИЯ МОМЕНТА

В отличие от трехстепенных силовых гироскопов гиродин обладает полезным, особенно при программных поворотах космического аппарата, свойством усиления момента. В первом приближении эффект усиления момента заключается в следующем. Пусть вектор кинетического момента гиродина  $\mathbf{G}$  расположен вдоль оси  $Oy$  (рис. 5.12).

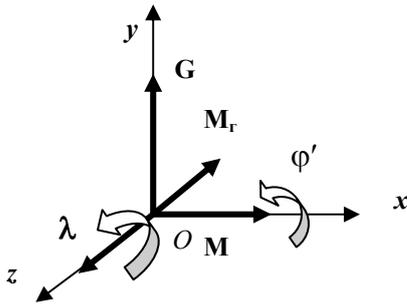


Рис. 5.12. Управляющий и гироскопический моменты

Такой гиродин может создавать управляющий момент  $M = G\lambda$  относительно оси  $Ox$ . Под действием управляющего момента космический аппарат начнет вращаться с угловой скоростью  $\phi'$ . Поскольку гиродин вращается вместе с космическим аппаратом, возникает гироскопический момент  $M_g = G\phi'$ , направленный противоположно скорости прецессии  $\lambda$  и являющийся моментом нагрузки для привода прецессии. В идеальном случае электромагнитный момент  $M_3$  привода будет равен  $M_g$ . Коэффициент усиления момента вычисляется как отношение управляющего гироскопического момента гиродина и электромагнитного момента привода прецессии

$$k_m = M/M_3 = \lambda/\phi'.$$

Обычно  $\lambda \gg \phi'$ , поэтому  $k_m \gg 1$ .

Определим диапазон частот, для которого сохраняется свойство усиления момента [85].

Вращение привода прецессии под действием электромагнитного момента  $M_3$  описывается уравнением

$$I_d d^2\beta(t)/dt^2 = M_3 - M_n,$$

где  $I_d$  – момент инерции ротора электродвигателя с присоединенными к ротору массами;  $\beta$  – угол прецессии;  $M_n$  – момент нагрузки, равный гироскопическому моменту  $M_g = Gd\phi(t)/dt$ .

Воспользуемся уравнением движения космического аппарата с моментом инерции  $J$  вокруг оси  $Ox$

$$Jd^2\phi(t)/dt^2 = M,$$

где  $M = Gd\beta(t)/dt$  – управляющий момент гиродина.

Запишем уравнения движения космического аппарата и привода в операторной форме

$$\begin{aligned} Js^2\varphi(s) &= M(s); & M(s) &= Gs\beta(s); \\ I_d s^2\beta(s) &= M_3(s) - M_H(s); & M_H(s) &= Gs\varphi(s). \end{aligned}$$

Из уравнений в операторной форме найдем отношение управляющего и электромагнитного моментов

$$M(s)/M_3(s) = Gs\beta(s)/[I_d s^2\beta(s) + M_H(s)].$$

Учитывая, что  $\varphi(s) = G\beta(s)/Js$ ,  $M_H(s) = G^2\beta(s)/J$ , получим

$$M(s)/M_3(s) = [I_d s/G + G/Js]^{-1}.$$

Пусть электромагнитный момент привода изменяется по гармоническому закону

$$M_3(t) = M_{30} \sin vt.$$

Управляющий момент гиросина будет изменяться по гармоническому закону с амплитудой  $M_0$  и частотой  $v$ .

Коэффициент усиления момента определим как отношение амплитуд

$$k_M = M_0/M_{30} = |I_d v/G - G/Jv|^{-1}.$$

Усиление момента имеет место ( $k_M > 1$ ), если

$$|I_d v/G - G/Jv| < 1.$$

Вместо неравенства рассмотрим равенства

$$I_d v/G - G/Jv = \pm 1,$$

из которых получим квадратные уравнения

$$v^2 \pm Gv/I_d - G^2/JI_d = 0.$$

Решая квадратные уравнения, найдем

$$v_{1,2} = \pm 1/2 G/I_d \pm (1/4 G^2/I_d^2 + G^2/JI_d)^{1/2} = 1/2 G/I_d [\pm 1 \pm (1 + 4I_d/J)^{1/2}].$$

Полученные выражения можно упростить. Так как  $J \gg I_d$ , то

$$(1 + 4I_d/J)^{1/2} \approx 1 + 2I_d/J,$$

поэтому

$$v_1 \approx G/J, \quad v_2 \approx G/I_d.$$

Неравенство

$$G/J < \nu < G/I_d$$

определяет диапазон частот, в котором происходит усиление момента.

Величины, стоящие в левой и правой частях неравенства, имеют размерность угловой скорости. Величина  $G/J$  представляет собой скорость, с которой вращается космический аппарат, если его кинетический момент равен кинетическому моменту гироскопа. Величина  $G/I_d$  близка по порядку к скорости вращения ротора гироскопа вокруг главной оси. Следовательно, диапазон частот, в котором обеспечивается усиление момента, очень широк, поскольку величины в левой и правой частях неравенства различаются на несколько порядков.

#### 5.4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИРОДИНА

Движение космического аппарата, управляемого гироскопами, вокруг центра масс описывается сложной системой линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, которые могут быть решены численными методами с использованием любого универсального языка программирования. Даже исследователь, свободно владеющий языком программирования, вынужден тратить много времени на отладку программ и организацию процедуры обработки результатов моделирования.

Современный пакет прикладных программ MATLAB, содержащий инструмент визуального моделирования SIMULINK, позволяет эффективно решать указанные проблемы.

Применение SIMULINK требует проведения подготовительной работы, связанной с представлением уравнений динамики исследуемой системы в виде структурной схемы. Затем исходная структурная схема преобразуется в рабочую схему по правилам SIMULINK.

Для построения рабочих моделей используются типовые элементы, хранящиеся в библиотеке SIMULINK.

##### 5.4.1. Расчетная динамическая схема

В реальных гироскопах связь между моментом и сигналом управления описывается системой дифференциальных уравнений. Гироскоп как исполнительный орган системы ориентации представляет собой сложное электромеханическое устройство. Его конструкция содержит упругие и инерционные элементы, а в динамических звеньях имеются нелинейности. Эти факторы определяют точность стабилизации космического аппарата.

*Совокупность линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих физический процесс преобразования входного сигнала привода прецессии в управляющий момент, будем называть математической моде-*

лю гиродина. Она должна быть тем подробнее, чем выше требования к точности стабилизации.

В математической модели необходимо учитывать инерционные и нелинейные свойства привода прецессии, нелинейную жесткость редуктора, момент сухого трения на оси прецессии и другие факторы, которые могут оказывать заметное влияние на динамику замкнутой системы.

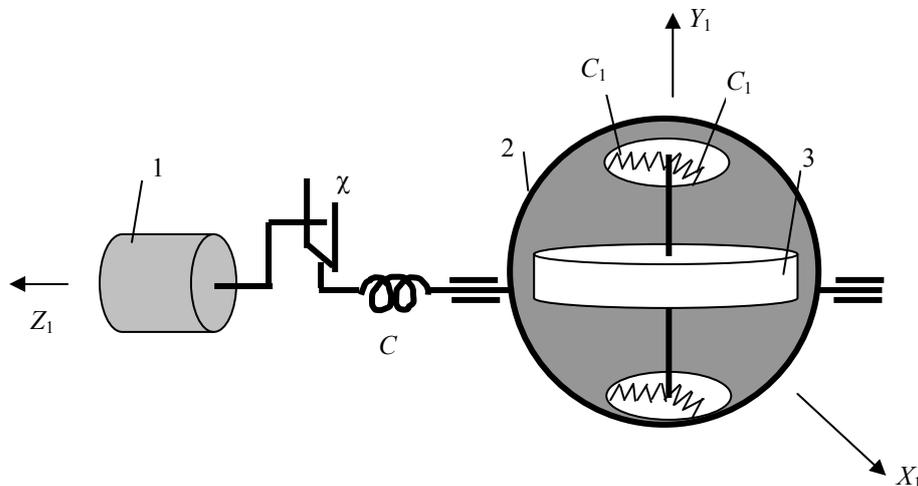


Рис. 5.13. Расчетная схема

Динамические особенности гиродина характеризует расчетная схема (рис. 5.13). На ней приняты обозначения: 1 – приводной электродвигатель; 2 – корпус гироузла (рама); 3 – ротор;  $C(\delta)$  – жесткость по оси прецессии – жесткость редуктора;  $C_1$ ,  $C_2$  – жесткости гироузла.

Нелинейную жесткость редуктора можно аппроксимировать кусочно-постоянной функцией. Полагаем, что при малых углах скручивания  $\delta \leq \chi$  жесткость редуктора равна  $C_0$ , а при  $\delta > \chi$  равна  $C$ . Если  $C_0 = 0$ , параметр  $\chi$  характеризует зону нечувствительности в цепи передачи вращающего момента от привода прецессии к раме гиродина или люфт в передаче углового вращения, при этом  $C$  – жесткость редуктора за пределами люфта. Через жесткость  $C_1$  момент привода прецессии передается ротору гиродина, а через жесткость  $C_2$  управляющий момент, создаваемый ротором, действует на корпус космического аппарата. Если используются электромагнитные подшипники, связь ротора с корпусом гироузла осуществляется через усилия в каналах магнитного подвеса, которые играют роль «электрических пружин».

В соответствии с расчетной схемой математическая модель гиродина должна охватывать динамику угловых колебаний ротора и рамы, динамику электродвигателя прецессии, определение вектора управляющего момента, действующего на корпус космического аппарата.

### 5.4.2. Динамика угловых колебаний ротора

Предположим, что ротор удерживается внутри гироузла при помощи упругих связей. Такая гипотеза вполне справедлива для первых образцов гиродин, у которых вал ротора-маховика устанавливался в шарикоподшипниках. Исследование динамики вращающегося ротора с учетом гироскопических моментов и упругих связей относится к классическим задачам современной теоретической механики [12]. Такие исследования позволяют выявить собственные частоты угловых колебаний ротора в упругом подвесе, что важно для проектирования подвеса и учета динамики ротора в математической модели гиродина.

Введем в рассмотрение неподвижную систему координат  $Oxyz$ , связанную с корпусом гиродина. Ось  $Oz$  совмещена с осью прецессии. Положение гироузла

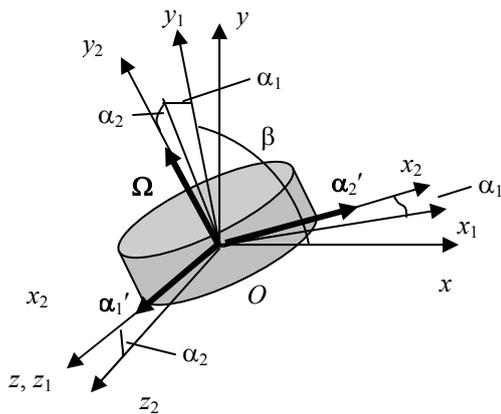


Рис. 5.14. Системы координат

и системы подвеса ротора (оси  $Ox_1y_1z_1$ ) относительно корпуса гиродина определяется углом прецессии  $\beta$ , который отсчитывается от оси  $Ox$  (рис. 5.14). Полагаем, что гироузел неподвижен, а ротор, имеющий неподвижную точку  $O$ , вращается с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси симметрии  $Oy_2$  и совершает малые угловые колебания вокруг неподвижных осей  $Oz_1$  и  $Ox_1$ . Положение ротора (оси  $Ox_2y_2z_2$ ) относительно системы подвеса  $Ox_1y_1z_1$  определяется малыми углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , где  $\alpha_1$  –

угол поворота ротора вокруг оси прецессии  $Oz_1$ ,  $\alpha_2$  – угол поворота ротора вокруг оси чувствительности  $Ox_1$ . В отличие от обычных связанных осей твердого тела оси Резаля  $Ox_2y_2z_2$  совершают угловые колебания относительно неподвижных осей и не участвуют во вращательном движении ротора.

Вектор абсолютной угловой скорости ротора  $\omega$  складывается из вектора угловой скорости собственного вращения  $\Omega$  и векторов угловых скоростей колебаний ротора  $\alpha'_1$  и  $\alpha'_2$ :

$$\omega = \Omega + \alpha'_1 + \alpha'_2.$$

Проекции вектора кинетического момента  $\mathbf{k} = I_p \omega$  ротора с тензором инерции  $I_p$  на подвижные оси  $Ox_2y_2z_2$  вычисляются по формулам

$$k_{x_2} = I_3 \alpha'_2; k_{y_2} = I \Omega; k_{z_2} = I_3 \alpha'_1,$$

где  $I, I_3$  – осевой и экваториальный моменты инерции ротора.

С учетом малости угловых отклонений  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  проекции вектора кинетического момента на неподвижные оси  $Ox_1$  и  $Oz_1$  составят:

$$k_{x1} = I_3\alpha'_2 - G\alpha_1; \quad k_{z1} = I_3\alpha'_1 + G\alpha_2,$$

где  $G = I\Omega$  – кинетический момент собственного вращения ротора.

Опоры ротора расположены на концах вала  $A$  на расстоянии  $l$  от неподвижной точки  $O$  (рис. 5.15).

При отклонении на малый угол  $\alpha_1$  вокруг оси  $Oz_1$  (рис. 5.16, а) на ротор действует реакция опоры, направленная вдоль оси  $Ox_1$

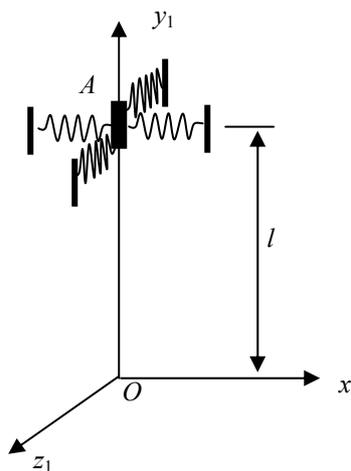


Рис. 5.15. Упругая опора

$$R_{x1} = C_{\text{п}}x_A \cong C_{\text{п}}l\alpha_1,$$

где  $C_{\text{п}}$  – линейная жесткость подшипника;  $x_A$  – перемещение конца вала  $A$  вдоль оси  $Ox_1$ .

Если ротор отклонился на угол  $\alpha_2$  (рис. 5.16, б), возникает реакция опоры вдоль оси  $Oz_1$ :

$$R_{z1} = -C_{\text{п}}z_A \cong -C_{\text{п}}l\alpha_2,$$

где  $z_A$  – перемещение конца вала  $A$  вдоль оси  $Oz_1$ .

Момент реакции опоры

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times \mathbf{R}$$

выражается через угловую жесткость подшипников  $C_1 = C_{\text{п}}l^2$  и угловые отклонения ротора:

$$M_{x1} = -C_1\alpha_2; \quad M_{z1} = -C_1\alpha_1.$$

Используя теорему об изменении кинетического момента твердого тела относительно неподвижной системы координат  $Ox_1y_1z_1$

$$dk_{x1}/dt = M_{x1}; \quad dk_{z1}/dt = M_{z1},$$

получим дифференциальные уравнения малых угловых колебаний ротора

$$I_3\alpha''_1 + G\alpha'_2 = -C_1\alpha_1;$$

$$I_3\alpha''_2 - G\alpha'_1 = -C_1\alpha_2.$$

Характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} I_3 s^2 + C_1 & -Gs \\ Gs & I_3 s^2 + C_1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$I_3^2 s^4 + (2C_1 I_3 + G^2) s^2 + C_1^2 = 0$$

можно представить в виде

$$s^4 + (2\rho_1^2 + \nu^2) s^2 + \rho_1^4 = 0,$$

где  $\rho_1 = (C_1/I_3)^{1/2}$  – собственная частота упругих колебаний невращающегося ротора относительно корпуса гироузла,  $\nu = G/I_3 = \Omega/I_3$  – частота, близкая к частоте вращения ротора.

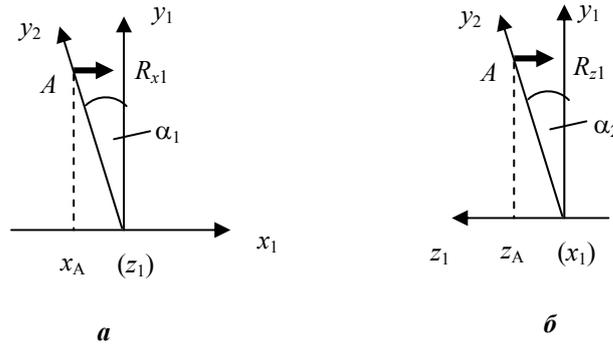


Рис. 5.16. Реакция опоры: *a* – в направлении оси  $Ox_1$ ; *б* – в направлении оси  $Oz_1$

После подстановки в характеристическое уравнение  $s = j\omega$  и введения безразмерных частот  $\omega_* = \omega/\rho_1$  и  $n = \nu/\rho_1$  определение собственных частот вращающегося ротора сводится к решению биквадратного уравнения

$$\omega_*^4 - (2 + n^2)\omega_*^2 + 1 = 0.$$

Собственные частоты угловых колебаний ротора вычисляются по формуле

$$\omega_{*1,2} = n/2[(1 + 4/n^2)^{1/2} \pm 1]. \quad (5.1)$$

Если  $n^2 \gg 4$ , то  $(1 + 4/n^2)^{1/2} \cong 1 + 2/n^2$  и из формулы (5.1) получим приближенные соотношения для безразмерных частот прецессии

$$\omega_{*1} \cong 1/n$$

и нутации

$$\omega_{*2} \cong n + 1/n.$$

Когда ротор не вращается ( $\Omega = 0$ ), система имеет одну собственную частоту  $\rho_1$ . В процессе разгона ротора частота  $\rho_1$  как бы раздваивается. С ростом скорости вращения  $\Omega$  частота прецессии  $\omega_1$  уменьшается, а частота нутации  $\omega_2$  увеличивается (рис. 5.17).

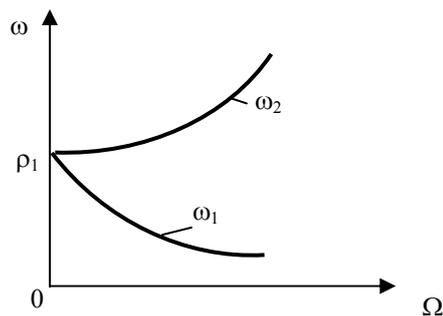


Рис. 5.17. Частоты прецессии и нутации

Таким образом, с ростом кинетического момента (при неизменной жесткости конструкции) наименьшая собственная частота гироскопа (частота прецессии) уменьшается.

Зная собственные частоты, можно записать решение уравнений колебаний для угловых координат или для линейных перемещений точки  $A$ .

Частоте прецессии соответствует решение

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1); \\ z_1(t) &= a_1 \cos(\omega_1 t + \gamma_1). \end{aligned}$$

Амплитуда колебаний и фазовый угол определяются начальными условиями. Два гармонических колебания вызывают круговое вращение точки  $A$ . Оно происходит в том же направлении, что и вращение ротора. Результирующее движение точки  $A$  складывается из медленного прецессионного движения и быстрого нутационного.

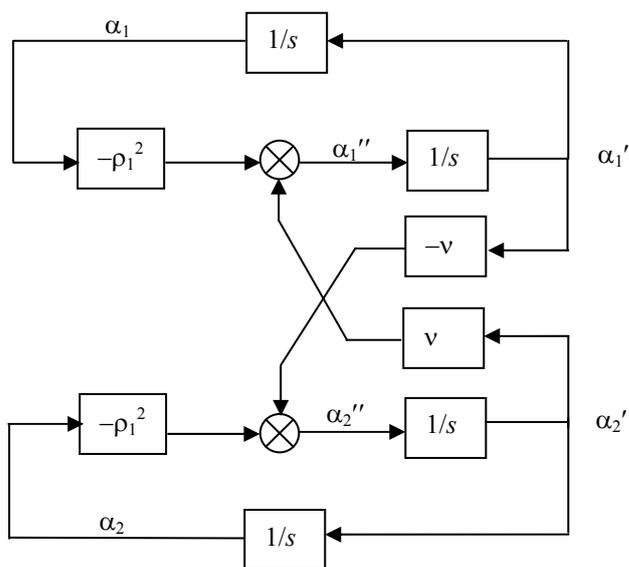


Рис. 5.18. Структурная схема упругого подвеса ротора

Используя принятые обозначения  $\rho_1^2$  и  $\nu$ , уравнения угловых колебаний ротора можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\alpha''_1 &= -\rho_1^2 \alpha_1 - \nu \alpha'_2; \\ \alpha''_2 &= -\rho_1^2 \alpha_2 + \nu \alpha'_1.\end{aligned}$$

Этим уравнениям соответствует структурная схема, изображенная на рис. 5.18.

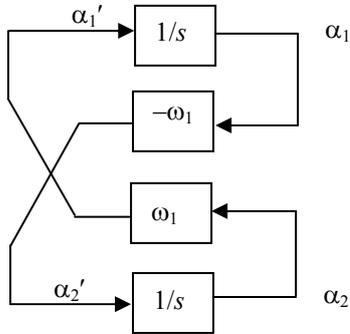


Рис. 5.19. Упрощенная структурная схема упругого подвеса ротора

Особенностью структурной схемы является наличие перекрестных гироскопических связей, а также зависимость собственных частот колебаний от скорости вращения ротора.

При интегрировании уравнений динамики ротора на ЦВМ шаг интегрирования определяется наибольшей частотой – частотой нутации. Выбор маленького шага интегрирования увеличивает общее время решения задачи. Поэтому при моделировании динамики гироскопа нутационным движением ротора желательно иногда пренебречь. Чтобы исключить из уравнений динамики нутационное движение, нужно принять  $I_3 = 0$ .

Тогда получим уравнения прецессионного движения ротора

$$\begin{aligned}G\alpha'_1 - C_1\alpha_2 &= 0; \\ G\alpha'_2 + C_1\alpha_1 &= 0.\end{aligned}$$

После подстановки  $s = j\omega$  в характеристическое уравнение системы легко убедиться, что собственной частотой системы является частота прецессии  $\omega_1 = C_1/G$ .

Структурная схема, соответствующая уравнениям прецессионного движения ротора, изображена на рис. 5.19.

### 5.4.3. Динамика гиродина с электромагнитными подшипниками

Проблема обеспечения длительного срока службы высокоскоростного ротора решена в гиродинах за счет применения электромагнитных подшипников [43, 44, 108]. Упругие механических связи, изображенные на рис. 5.15, заменены в электромагнитных подшипниках «электрическими пружинами», обладающими демпфирующими свойствами.

Ротор удерживается внутри гироузла при помощи пяти электромагнитных опор – четырех радиальных и одной осевой (рис. 5.20). Каждая опора состоит

из двух электромагнитов. Для центрирования ротора в осевом направлении применены цилиндрические электромагниты торцевого типа, они расположены на диске ротора.

Чтобы снизить нагрузки, возникающие при действии управляющих гироскопических моментов, радиальные электромагниты разнесены между собой и установлены на концах вала. На рис. 5.20 изображены радиальные электромагниты, создающие усилия в вертикальной плоскости. Аналогичная система расположена в горизонтальной плоскости. Рядом с радиальными электромагнитами находятся датчики положения, измеряющие перемещения ротора относительно радиальных и осевых электромагнитов. Длина вала примерно равна диаметру ротора.

Габариты ротора-маховика с валом укладываются в сферу, описываемую ротором при его вращении вокруг оси прецессии, расположенной на рис. 5.20 вертикально.

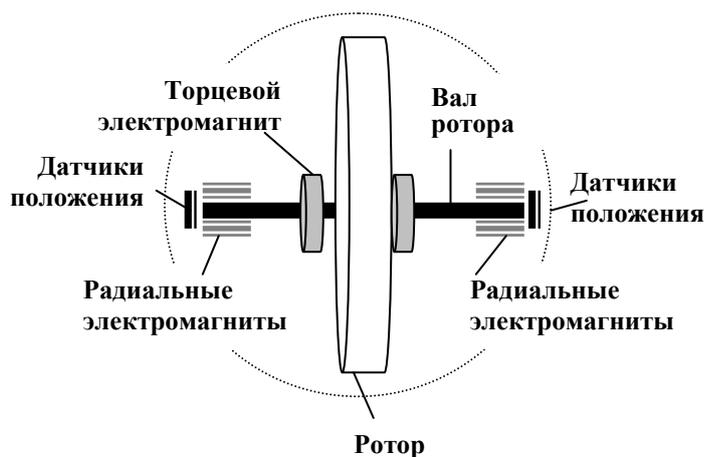


Рис. 5.20. Схема электромагнитного подвеса ротора

Функциональная схема одного канала электромагнитного подвеса ротора приведена на рис. 5.21.



Рис. 5.21. Функциональная схема канала электромагнитного подвеса ротора

Регуляторы положения строятся по принципу пропорционально-дифференцирующих или пропорциональных интегродифференцирующих регуляторов (ПД или ПИД – регуляторы). В них учитываются перекрестные связи между каналами, упругие свойства ротора и влияние гироскопических моментов. Поскольку силы притяжения электромагнита связаны с током  $i$  и смещением ротора  $\delta$  нелинейной зависимостью  $F(i, \delta)$ , то для реализации выбранного закона управления вводится схема линеаризации с коэффициентом передачи  $F^{-1}(i, \delta)$ . В каналах, нагруженных гироскопическим моментом, используется управление по возмущению (управление по сигналу скорости прецессии  $\lambda$ ).

Положение ротора относительно статора системы подвеса  $Ox_1y_1z_1$  определяется малыми углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , где  $\alpha_1$  – угол поворота ротора вокруг оси прецессии  $Oz_1$ ,  $\alpha_2$  – угол поворота ротора вокруг оси чувствительности  $Ox_1$  (см. рис. 5.14).

Силовыми воздействиями в гиродине являются электромагнитный момент привода прецессии и электромагнитные моменты подшипников  $M_1$  и  $M_2$ , управляющие угловым положением ротора относительно осей прецессии и чувствительности:

$$\begin{aligned} M_1 &= CW(s)\alpha_1; \\ M_2 &= CW(s)\alpha_2 + G\lambda; \\ W(s) &= 1 + Ts \text{ или } W(s) = 1 + 1/T_0s + Ts, \end{aligned}$$

где  $C$  – угловая жесткость электромагнитного подвеса;  $W(s)$  – передаточная функция регулятора;  $T_0, T$  – постоянные времени регулятора.

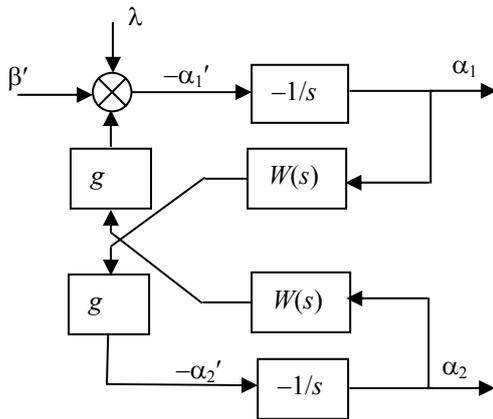


Рис. 5.22. Структурная схема электромагнитного подвеса ротора

Введение дополнительного управления по возмущению  $G\lambda$  позволяет избежать недопустимо больших отклонений ротора в режимах динамического нагружения электромагнитного подвеса. Сигнал  $G\lambda$  является компенсирующим по отношению к управляющему гироскопическому моменту  $G\beta'$ , где  $\beta'$  – скорость прецессии гироузла. Пренебрегая нутационным движением, уравнения угловых колебаний ротора в электромагнитном подвесе можно записать в виде

$$\alpha_1 - g W(s)\alpha_2 = -\beta' + \lambda, \quad \alpha_2 + g W(s)\alpha_1 = 0, \quad (5.2)$$

где  $-g = C/G$  – частота прецессионных колебаний ротора.

Структурная схема (рис. 5.22) отражает движение ротора в электромагнитных подшипниках согласно уравнениям (5.2). Угловые колебания ротора  $\alpha_1(t)$  и  $\alpha_2(t)$  возбуждаются при включении привода прецессии, когда скорость поворота гироузла  $\beta'$  под действием электромагнитного момента привода прецессии не совпадает с требуемой скоростью прецессии  $\lambda$ .

Изучение колебательных процессов важно по двум причинам. Вызывая нестабильность управляющего момента, они влияют на динамику стабилизации космического аппарата. Поэтому свойства активного подвеса ротора в области низких частот следует учитывать при синтезе замкнутой системы ориентации. Кроме того, размахом колебаний определяется выбор зазора страховочных шарикоподшипников.

#### 5.4.4. Динамика привода прецессии

В качестве привода прецессии в гиродине используется асинхронный электропривод, в состав которого входят регулятор, усилитель мощности, тахогенератор обратной связи по скорости и силовой редуктор (рис. 5.23).

Сигнал рассогласования на входе привода  $x_1 = \lambda - \gamma'$  преобразуется в сигнал управления  $x_2$  по линейному закону

$$T_2 x_2' + x_2 = T_3 x_1' + x_1,$$

где  $T_2, T_3$  – постоянные времени корректирующего устройства;  $\gamma'$  – скорость электродвигателя, измеряемая тахогенератором.

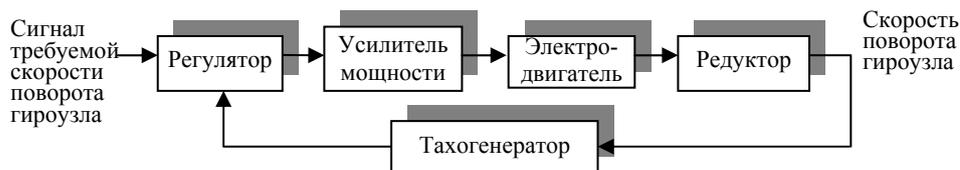


Рис. 5.23. Функциональная схема привода прецессии

Управляющее ускорение асинхронного электродвигателя определяется квадратичной зависимостью (с ограничением) от входного сигнала

$$z = \begin{cases} [kx_2] x_2, & \text{если } |x_2| \leq x^* \\ [z^* \text{sign} x_2], & \text{если } |x_2| > x^*, \end{cases}$$

где  $x^*$  – зона линейности усилителя;  $z^* = kx^{*2}$  – максимальное ускорение электродвигателя.

Вращение вала электродвигателя описывается уравнением

$$\gamma'' + d_1 \operatorname{sign} \gamma' + h \varepsilon = z,$$

где  $\gamma$  – угол поворота вала электродвигателя, приведенный к выходу редуктора;  $d_1$  – коэффициент сухого трения в подшипниках привода;  $h$  – коэффициент динамической нагрузки.

Динамическая нагрузка  $\varepsilon$  от скручивания редуктора может быть аппроксимирована с учетом люфта  $\chi$  кусочно-линейной зависимостью от угла скручивания  $\delta = \gamma - \beta$ :

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{если } |\delta| \leq \chi \\ \rho^2 (\delta - \chi \operatorname{sign} \delta), & \text{если } |\delta| > \chi, \end{cases}$$

где  $\rho$  – частота угловых колебаний гироузла относительно вала электродвигателя при  $\chi = 0$ .

Изменение углового положения гироузла происходит под действием момента скручивания редуктора и реакции электромагнитных опор:

$$\beta'' + d_2 \operatorname{sign} \beta' = \varepsilon + \rho_1^2 W \alpha_1,$$

где  $\rho_1$  – частота упругих колебаний гироузла относительно ротора;  $d_2$  – коэффициент сухого трения на оси прецессии.

Структурная схема привода прецессии, соответствующая приведенным уравнениям динамики, изображена на рис. 5.24.

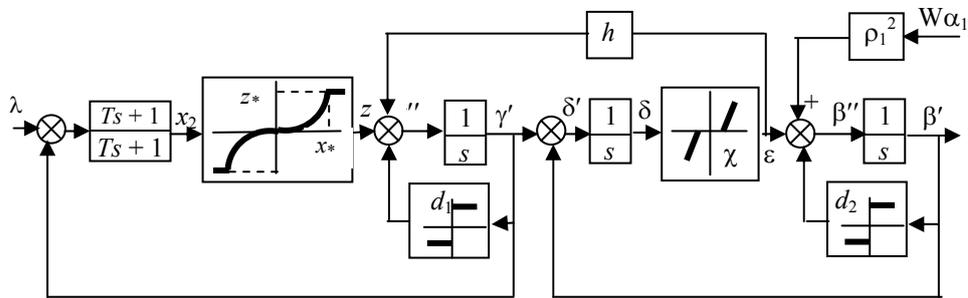


Рис. 5.24. Структурная схема привода прецессии

Вместе со структурной схемой электромагнитного подвеса (см. рис. 5.22) она характеризует динамические особенности гироузла как исполнительного органа системы ориентации космического аппарата.

## 5.5. ДИНАМИКА ГИРОСИЛОВОЙ СИСТЕМЫ В РЕЖИМЕ СТАБИЛИЗАЦИИ

## 5.5.1. Уравнения динамики, структурные схемы

Исследуем динамику стабилизации космического аппарата, управляемого простейшей гиросиловой системой, вокруг одной оси  $Ox$ . Полагаем, что в состав гиросиловой системы входят два одинаковых гиросилова с осями прецессии, параллельными оси  $Oz$  (рис. 5.25).

Положение векторов кинетических моментов гиросилов  $G_1$  и  $G_2$  определяется углами прецессии  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , которые отсчитываются от оси  $Ox$ . Вектор кинетического момента гиросиловой системы

$$H = G_1 + G_2$$

может изменяться в плоскости  $Oxy$ .

Функциональная схема канала стабилизации космического аппарата изображена на рис. 5.26.

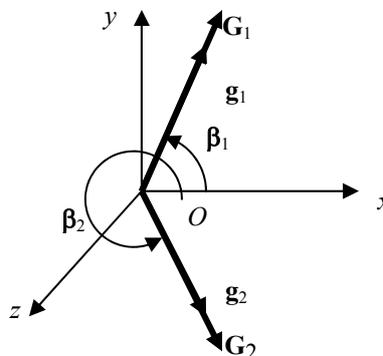


Рис. 5.25. Схема установки гиросилов

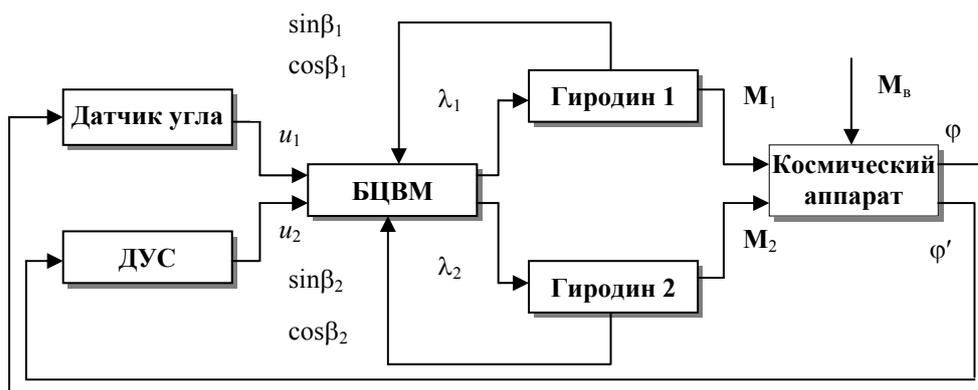


Рис. 5.26. Функциональная схема гиросиловой системы

Наряду с датчиками угла и угловой скорости (ДУС) в ее состав входит бортовая ЦВМ, которая на основе информации о состоянии космического аппарата и гиросиловой системы вычисляет сигналы требуемых скоростей прецессии гиросилов  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Рассмотрим уравнения динамики замкнутой системы.

Движение космического аппарата с моментом инерции  $I$  вокруг оси  $Ox$  под действием управляющего момента  $M_x$  и возмущающего момента  $M_B$  описывается уравнением

$$I\varphi'' = M_x - M_B.$$

Датчики угла и угловой скорости будем считать идеальными, безинерционными с коэффициентами передачи, равными единице. Тогда выходные сигналы датчиков можно представить в виде

$$u_1 = \varphi - \varphi_n; u_2 = \varphi',$$

где  $\varphi_n$  – программный угол поворота.

Сигнал требуемого управляющего момента по оси  $Ox$  формируется как линейная комбинация сигналов угла и угловой скорости

$$u_x = -k_1 u_1 - k_2 u_2 = -k_1(\varphi - \varphi_n) - k_2 \varphi'.$$

где  $k_1, k_2$  – коэффициенты усиления сигналов угла и угловой скорости.

Управляющий момент гиросиловой системы, вращающейся вместе с космическим аппаратом с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ , определяется как векторная сумма управляющих моментов двух гиродин

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = -\lambda_1 \times \mathbf{G}_1 - \lambda_2 \times \mathbf{G}_2 - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2), \quad (5.3)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – скорости прецессии гиродин относительно корпуса космического аппарата.

Введем в рассмотрение единичные векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= (x_1, y_1) = (\cos\beta_1, \sin\beta_1); \\ \mathbf{g}_2 &= (x_2, y_2) = (\cos\beta_2, \sin\beta_2), \end{aligned}$$

направленные по векторам кинетических моментов  $\mathbf{G}_1$  и  $\mathbf{G}_2$  (см. рис. 5.25). С учетом введенных обозначений

$$\mathbf{H} = G(\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2); x = x_1 + x_2; y = y_1 + y_2,$$

где  $G$  – кинетический момент одного гироина;  $x = H_x/G$ ;  $y = H_y/G$  – проекции вектора кинетического момента гиросиловой системы в относительных единицах.

Для вычисления управляющего момента гиросиловой системы можно воспользоваться другим соотношением, которое содержит локальную производную кинетического момента

$$\mathbf{M} = -d\mathbf{H}^*/dt - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}. \quad (5.4)$$

Первое слагаемое определяет управляющий момент гиросиловой системы на неподвижном основании, второе – гироскопический момент, возникающий при вращении гиросиловой системы вместе с космическим аппаратом.

Проектируя векторные равенства (5.3) или (5.4) на оси  $Ox$  и  $Oy$  с учетом  $H_z = 0$ , получим

$$\begin{aligned} M_x &= -dH_x/dt + H_y\omega_z; \\ M_y &= -dH_y/dt - H_x\omega_z, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} M_x &= G(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + G(y_1 + y_2)\omega_z; \\ M_y &= -G(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - G(x_1 + x_2)\omega_z. \end{aligned} \quad (5.5)$$

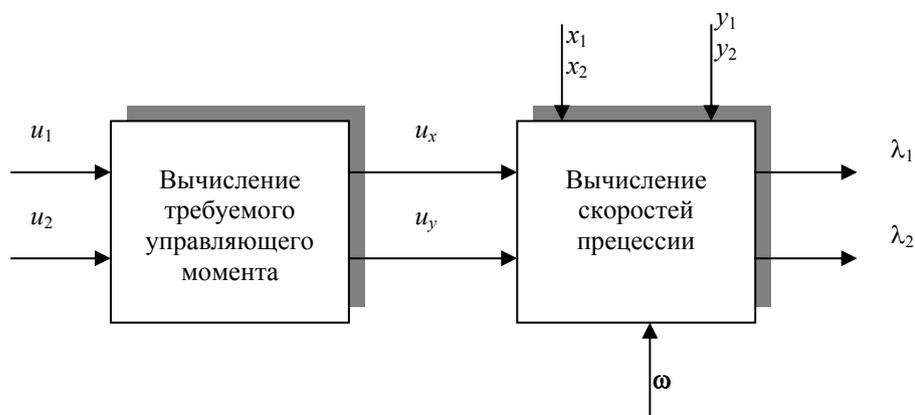


Рис. 5.27. Основные функции ЦВМ

Величина управляющих моментов гиросилов зависит от скоростей прецессии  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Задача управления гиросилом заключается в нахождении скоростей прецессии, обеспечивающих равенство управляющего момента гиросиловой системы требуемому управляющему моменту:  $\mathbf{M} = \mathbf{u}$ .

Заменяя в соотношении (5.5)  $\mathbf{M} = (M_x, M_y)$  на  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ , получим систему двух алгебраических уравнений с переменными коэффициентами для вычисления требуемых скоростей прецессии

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 &= m_1; \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 &= m_2, \end{aligned}$$

где  $m_1 = u_x/G - (y_1 + y_2)\omega_z$ ;  $m_2 = -u_y/G - (x_1 + x_2)\omega_z$ .

При решении этих уравнений численным способом на ЦВМ коэффициенты уравнений (тригонометрические функции углов прецессии) на каждом шагу решения могут считаться постоянными.

Решая систему алгебраических уравнений методом Крамера, получим

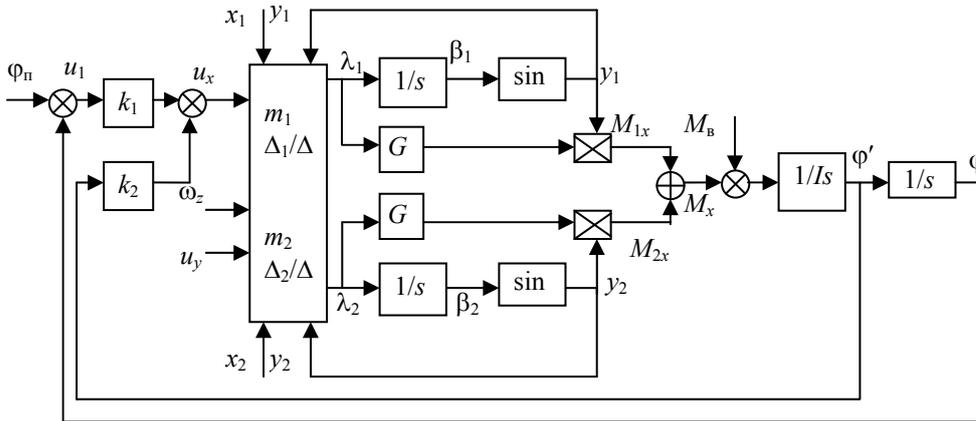
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \Delta_1/\Delta = (m_1 x_2 - m_2 y_2)/(y_1 x_2 - x_1 y_2); \\ \lambda_2 &= \Delta_2/\Delta = -(m_1 x_1 - m_2 y_1)/(y_1 x_2 - x_1 y_2). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Таким образом, ЦВМ в системе ориентации решает две задачи: вычисляет требуемые моменты (на основе информации, поступающей с датчиков системы ориентации) и вычисляет скорости прецессии гиросилов (рис. 5.27).

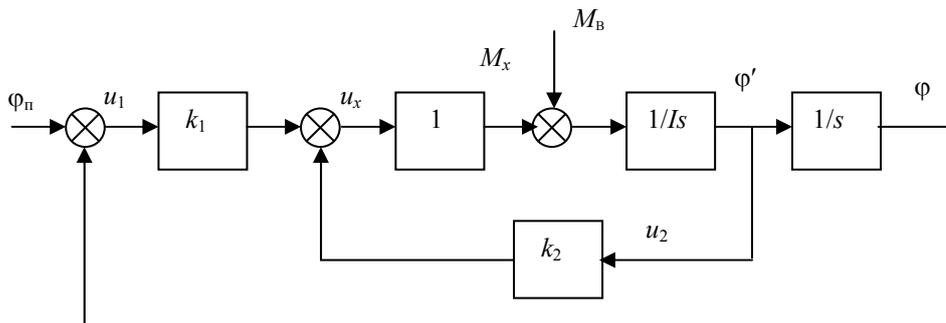
Вычисленные сигналы требуемых скоростей прецессии подаются в приводы прецессии. Прецессия вращающихся роторов вызывает появление управляющего момента в соответствии с выражением (5.3).

Структурная схема гиросиловой системы (ГСС) изображена на рис. 5.28, *a*. На ней представлены лишь части структурных схем гиросилов (см. рис. 5.11), относящиеся к оси  $Ox$ .

Исключая промежуточные переменные из уравнений динамики, легко убедиться, что коэффициент преобразования требуемого момента в фактический момент в идеальной гиросиловой системе равен единице.



*a*



*б*

**Рис. 5.28. Структурные схемы гиросиловой системы:  
*a* – исходная; *б* – эквивалентная**

Структурную схему идеальной гиросиловой системы можно заменить эквивалентной структурной схемой линейной системы (рис. 5.28, *б*).

Передаточная функция эквивалентной линейной системы относительно программного угла поворота имеет вид

$$W(s) = \varphi(s)/\varphi_n(s) = k_1/(Is^2 + k_2s + k_1)$$

или в стандартной форме

$$W(s) = v^2/(s^2 + 2\xi vs + v^2),$$

где  $v^2 = k_1/I$ ;  $\xi = k_2/2Iv$ ;  $v$  – собственная частота системы;  $\xi$  – безразмерный коэффициент демпфирования.

Передаточная функция эквивалентной системы совпадает с передаточной функцией линейной маховичной системы, поэтому все результаты, полученные ранее для линейной маховичной системы (см. раздел 4.5.1), справедливы и в этом случае.

### 5.5.2. Исследование влияния характеристик гиродина на динамику стабилизации космического аппарата

Разработанная математическая модель гиродина дает возможность исследовать расчетным путем влияние параметров гиродина на динамику стабилизации орбитальной станции. Структурная схема системы ориентации изображена на рис. 5.29.

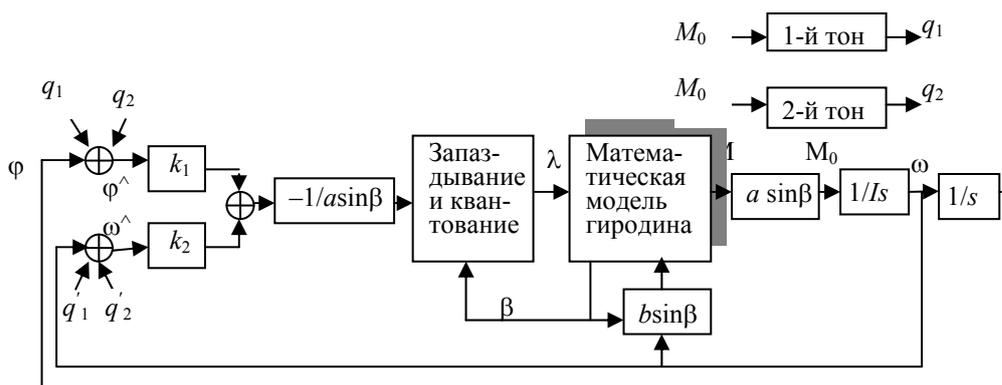


Рис. 5.29. Структурная схема системы ориентации

Рассмотрим в качестве примера один канал системы в режиме поддержания заданной ориентации.

В математической модели гиродина учитываются инерционность и нелинейность привода прецессии, люфт и жесткость редуктора, сухое трение на оси прецессии (см. рис. 5.24), жесткость и частотные свойства электромагнитных подшипников (см. рис. 5.22). Наряду с нелинейностями, особенно

стями математической модели являются наличие перекрестных гироскопических связей, а также зависимость частотных характеристик гиродина от скорости вращения ротора.

В уравнениях углового движения станции с моментом инерции  $I$  под действием управляющего момента гиросиловой системы  $M_0$  учтем два тона упругих колебаний  $(q_1, q_2)$  с частотами  $\nu_1, \nu_2$

$$\begin{aligned} I\varphi'' &= M_0; \\ q_1'' + 2\xi_1\nu_1q_1' + \nu_1^2q_1^2 &= f_1M_0; \\ q_2'' + 2\xi_2\nu_2q_2' + \nu_2^2q_2^2 &= f_2M_0, \end{aligned}$$

где  $\varphi$  – угловое отклонение станции как твердого тела;  $\xi_1, \xi_2$  – относительные коэффициенты демпфирования упругих тонов;  $f_1, f_2$  – коэффициенты влияния.

Предполагается, что в режиме стабилизации сигнал управления станцией  $u$  формируется как линейная комбинация измеренных сигналов углового отклонения  $\varphi^{\wedge} = \varphi + q_1 + q_2$  и угловой скорости  $\omega^{\wedge} = \varphi' + q_1' + q_2'$

$$u = -k_1\varphi^{\wedge} - k_2\omega^{\wedge},$$

где  $k_1, k_2$  – коэффициенты усиления сигналов угла и угловой скорости.

Сигнал управления гиродинами – сигнал требуемой скорости прецессии  $\lambda$  вычисляется с учетом схемы установки гиродинов на станции, квантования по уровню и запаздывания, вносимого в контур управления бортовой ЦВМ.

Алгоритм управления гиросиловой системой линеаризован применительно к режиму стабилизации. Коэффициенты  $a, b$  на структурной схеме учитывают число и схему установки гиродинов на орбитальной станции. Коэффициент  $a$  используется для вычисления требуемой скорости прецессии и для пересчета управляющего момента одного гиродина  $M$  в управляющий момент гиросиловой системы  $M_0$ , коэффициент  $b$  – при вычислении проекции вектора угловой скорости орбитальной станции  $\omega$  на ось чувствительности гиродина.

Моделирование проводилось с использованием параметров орбитальной станции «Мир» и параметров гиродинов, установленных на станции по схеме «додекаэдр»:

$$\begin{aligned} k_1/I &= 0,1 \text{ с}^{-2}; k_2/I = 0,7 \text{ с}^{-1}; \nu_1 = 1 \text{ с}^{-1}; \nu_2 = 6 \text{ с}^{-1}; \xi_1 = \xi_2 = 0,01; f_1 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ 1/Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2; \\ f_2 &= 3 \cdot 10^{-6} \text{ 1/Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2; a = 4,5; b = 0,895; \tau = 0,3 \text{ с}; T_2 = 0,5 \text{ с}; k = 10^6; z_* = 5 \text{ с}^{-2}; \\ d_1 &= 0,07 \text{ с}^{-2}; h = 0,045; d_2 = 0,4 \text{ с}^{-2}; g = 10 \text{ с}^{-1}; T_0 = 0,6 \text{ с}; T_1 = 0,08 \text{ с}; \\ \rho &= \rho_1 = 100 \text{ с}^{-1}; \chi = 0,0012; \tau_1 = 0,04 \text{ с}. \end{aligned}$$

Исследовалась реакция замкнутой системы на начальное угловое отклонение орбитальной станции. В качестве выходной переменной регистрировался сигнал датчика угла  $\varphi^{\wedge}$ .

Установлено, что после окончания переходного процесса в замкнутой системе возникают автоколебания сложной формы с амплитудой  $0,5'$  и периодом 35 с. Результаты моделирования в целом согласуются с результатами летных испытаний, когда угловые колебания станции регистрировались при помощи астрофизической аппаратуры «Квант» [102].

Математическое моделирование динамики замкнутой системы позволяет анализировать влияние отдельных факторов на точность стабилизации орбитальной станции.

Чтобы оценить влияние собственно гиродина на динамику стабилизации станции, использовалась упрощенная математическая модель замкнутой системы, в которой исключалось влияние упругих тонов ( $f_1 = f_2 = 0$ ) и квантование сигнала по уровню. По результатам моделирования амплитуда автоколебаний орбитальной станции, вызванных неидеальностью характеристик гиродина и его внутренней динамикой, не превышает  $0,3'$ .

В процессе моделирования изучалось влияние характеристик привода прецессии, электромагнитного подвеса, жесткости конструкции и сухого трения на погрешность стабилизации станции. Результаты моделирования показывают, что наиболее существенное влияние на погрешность стабилизации оказывает люфт редуктора.

При отсутствии люфта ( $\chi = 0$ ) погрешность стабилизации уменьшается вдвое, а амплитуда и частота колебаний зависят от жесткости конструкции. С увеличением жесткости амплитуда колебаний уменьшается, а частота увеличивается.

Возбуждая угловые колебания ротора, вращающегося в электромагнитных подшипниках, привод прецессии может влиять на динамику стабилизации станции. Введение сигнала компенсации в систему электромагнитного подвеса (управление по «возмущению») позволяет снизить амплитуду угловых колебаний ротора до величины, не превышающей  $5 \cdot 10^{-4}$  рад.

Результаты моделирования и летных испытаний подтверждают эффективность применения гиродинов для длительной и точной стабилизации крупных космических аппаратов.

## 5.6. ОБОБЩЕННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГИРОСИЛОВЫХ СИСТЕМ ОРИЕНТАЦИИ

Основными характеристиками гиродина как исполнительного органа, определяющими его массу и энергопотребление, являются кинетический момент и максимальный управляющий момент (максимальная скорость прецессии). В случае маховичных систем эти показатели позволяли легко судить о свойствах всей маховичной системы. Свойства гиросиловой системы зависят не только от характеристик гиродина, но также от их числа и схемы установки на космическом аппарате. Для описания управляющих свойств гиросиловой системы приходится прибегать к обобщенным характеристикам.

5.6.1. Область изменения вектора кинетического момента

Рассмотрим гиросиловую систему, состоящую из  $n$  одинаковых гиродинов с кинетическим моментом  $G$ . Вектор кинетического момента гиросиловой системы равен сумме векторов кинетического момента отдельных гиродинов

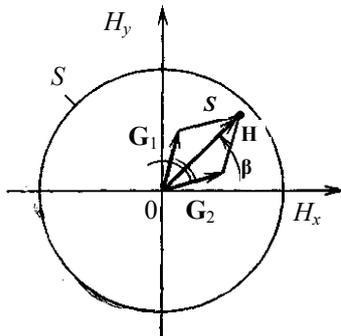


Рис. 5.30. Область  $S$  системы двух гиродинов с параллельными осями прецессии

$$\mathbf{H} = G \sum \mathbf{g}_i(\beta_i),$$

где  $\mathbf{g}_i = \mathbf{G}_i/G$  – единичный вектор, направленный по вектору кинетического момента  $i$ -го гиродина. Изменение углов  $\beta_i(t)$  при включении приводов прецессии вызывает изменение вектора  $\mathbf{H}$ .

В качестве первой обобщенной характеристики гиросиловых систем используется область  $S$  изменения вектора кинетического момента гиросистемы, под которой понимается геометрическое место возможных положений вектора  $\mathbf{H}$ . Форма области  $S$  определяется схемой установки гиродинов на космическом аппарате, а ее размеры пропорциональны кинетическому моменту гиродина [28, 85, 95]. Область  $S$  дает наглядное представление о диапазоне изменения кинетического момента в произвольном направлении.

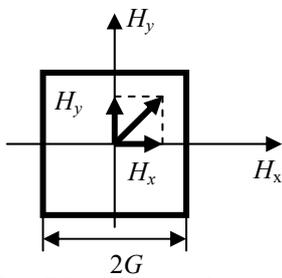


Рис. 5.31. Область  $S$  системы двух двигателей-маховиков

Область  $S$  типовой группы гиродинов с параллельными осями прецессии (см. рис. 5.25) представляет собой круг радиуса  $2G$  (рис. 5.30).

Сравним систему двух гиродинов с системой двух электродвигателей-маховиков, у которых максимальный кинетический момент равен  $G$ . Область  $S$  такой системы имеет форму квадрата с длиной сторон  $2G$  (рис. 5.31).

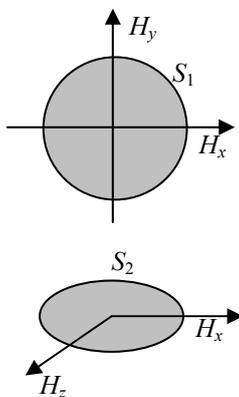


Рис. 5.32. Области  $S_1$  и  $S_2$

Площадь области  $S$  системы двух гиродинов оказывается в  $\pi$  раз больше области  $S$  системы двух двигателей-маховиков.

Рассмотрим гиросиловую систему (см. рис. 5.1), состоящую из двух типовых групп гиродинов с параллельными осями прецессии (см. рис. 5.5).

Кинетический момент первой группы изменяется в плоскости  $Oxy$ , второй группы – в плоскости  $Oxz$ . Соответственно области  $S_1$  и  $S_2$  типовых групп имеют формы кругов, которые расположены в плоскостях  $Oxy$  и  $Oxz$  (рис. 5.32).

Область  $S$  системы четырех гиродинов построим следующим образом. Вокруг каждой точки области  $S_1$ , как из центра, опишем круг области  $S_2$ . На рис. 5.33 такое построение выполнено для четырех точек области  $S_1$ .

Результирующая область  $S$  представляет собой фигуру, вытянутую вдоль оси  $Ox$  (рис. 5.34). В плоскости  $Oyz$  сечение области  $S$  имеет форму квадрата.

Сравним область  $S$  системы четырех гиродинов с областью  $S$  трех электродвигателей-маховиков, у которых кинетический момент может изменяться в диапазоне от  $-G$  до  $+G$ . Область  $S$  маховичной системы имеет форму куба с длиной сторон  $2G$  (см. рис. 4.27).

Вычислим минимальные и максимальные коэффициенты использования кинетических моментов гиродин. Для этого воспользуемся соотношениями, полученными в разделе 4.6.2. Для системы четырех гиродин

$$\chi_{\min} = 2G/4G = 0,5; \chi_{\max} = 4G/4G = 1,$$

для трех электродвигателей-маховиков

$$\chi_{\min} = G/3G \approx 0,33; \chi_{\max} = \sqrt{3} G/3G \approx 0,58.$$

Из этого сравнения следует, что гиросиловые системы обеспечивают лучшее использование инерционных масс в целях управления.

Наглядное изображение области  $S$  системы четырех гиродин, у которых оси прецессии установлены перпендикулярно граням октаэдра (см. рис. 5.6), можно найти в работе [114].

При установке гиродин по схеме «додекаэдр» (см. рис. 5.7) [92] область  $S$  имеет форму деформированной сферы с воронками [95]. Коэффициенты использования кинетического момента вдоль строительных осей космического аппарата составляют  $\chi_x = 0,745$ ;  $\chi_y = \chi_z = 0,79$ . Чем больше число гиродин, тем ближе форма области  $S$  приближается к сфере.

Поверхность области  $S$  характеризует состояния насыщения электромеханической системы по кинетическому моменту. Построение области  $S$  гиросиловой системы произвольной конфигурации может оказаться весьма трудоемкой задачей.

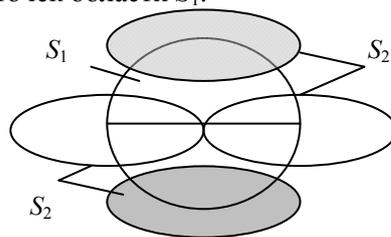


Рис. 5.33. Построение области  $S$

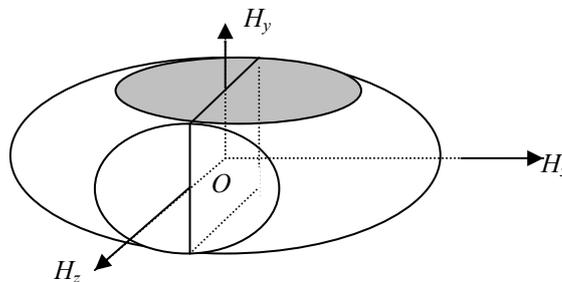


Рис. 5.34. Область  $S$  системы четырех гиродин

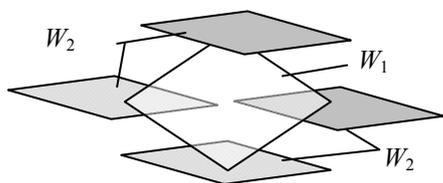
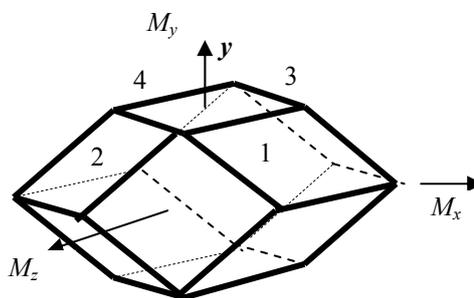


Ромб образуется в результате объединения двух областей  $W_1$  и  $W_2$ . Область  $W$  подобна ромбу, построенному на векторе кинетического момента  $\mathbf{H}$ , и повернута относительно него на угол  $\pi/2$  [34].

Форма ромба непрерывно меняется в зависимости от углов прецессии гиросилов. Построим область  $W$  гиросиловой системы, состоящей из двух типовых групп (см. рис. 5.5). Область  $W_1$  первой группы ( $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ ) – ромб в вертикальной плоскости, область  $W_2$  второй группы ( $\mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4$ ) – ромб в горизонтальной плоскости (рис. 5.37).

Область  $W$  образуется в результате объединения двух областей  $W_1$  и  $W_2$ . В каждой точке области  $W_1$  как из центра построим область  $W_2$  (рис. 5.38).

Построенная область  $W$  имеет форму 12-гранника (рис. 5.39). Форма 12-гранника непрерывно меняется в зависимости от углов прецессии. В частном случае, когда все ромбы одинаковые, область  $W$  – ромбододекаэдр. Граница области  $W$  характеризует состояния насыщения гиросиловой системы по управляющему моменту.

Рис. 5.38. Построение области  $W$ Рис. 5.39. Область  $W$ 

В общем случае, когда любые два вектора управляющего момента  $-\lambda_i \times \mathbf{G}_i$  из совокупности  $n$  векторов не коллинеарны, а любые три вектора не компланарны, область  $W$  представляет собой симметричный относительно центра многогранник, обладающий следующими свойствами: число граней не превышает  $2C_n^2$ , гранями являются ромбы с длиной сторон  $2G\lambda^*$  [30].

При наличии коллинеарных или компланарных векторов гранями области  $W$  могут быть параллелограммы и многоугольники. Форма области  $W$  непрерывно меняется (при изменении углов прецессии), а ее размеры пропорциональны кинетическому моменту гиросилов и максимальной скорости прецессии.

Области  $W$  гиросиловых систем приведены в [28 – 30, 97]. Область  $W$  дает наглядное представление о диапазоне изменения управляющего момента гиросиловой системы в произвольном направлении. Состояния гиросиловой системы, при которых область  $W$  вырождается в плоскую фигуру, называются особыми.

### 5.6.3. Моментные характеристики

Назовем зависимости вида  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H}, t)$  моментными характеристиками гиросиловой системы. Они являются трехмерными аналогами моментных характеристик электродвигателя-маховика и в общем случае нестационарны, т. е. зависят от времени  $t$  создания кинетического момента. По аналогии с электродвигателями-маховиками построим одномерную моментную характеристику для типовой группы гиродинов с параллельными осями прецессии (рис. 5.40).

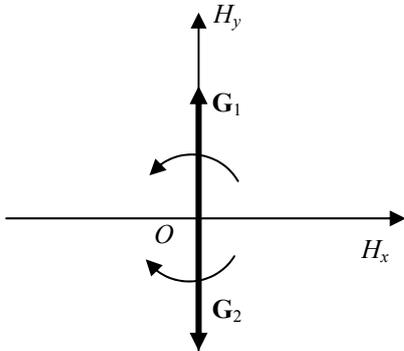


Рис. 5.40. Типовая группа гиродинов

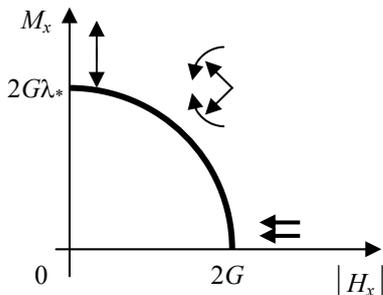


Рис. 5.41. Моментная характеристика типовой группы

Пусть кинетический момент типовой группы изменяется вдоль оси  $Ox$  от 0 до  $-2G$ .

С учетом симметрии в движении гиродинов

$$H_x = 2G \cos \beta_1;$$

$$M_x = -dH_x/dt = 2G(d\beta_1/dt) \sin \beta_1.$$

Примем  $d\beta_1/dt = -d\beta_2/dt = \lambda^*$ . Возводя левые и правые части равенств в квадрат и складывая, получим

$$(M_x/G\lambda^*)^2 + (H_x/G)^2 = 4.$$

Моментная характеристика типовой группы (рис. 5.41) (как и двигателя-маховика) имеет насыщение по кинетическому моменту.

В отличие от двигателей-маховиков, которые насыщаются по скорости, насыщение гиросиловых систем наступает, когда главные оси роторов гиродинов становятся параллельными.

Моментные характеристики типовой группы при ненулевом кинетическом моменте системы по оси  $Oy$  приведены в [34]. Моментные характеристики для гиросиловой системы из четырех гиродинов (см. рис. 5.1) построены в [41].

Таким образом, обобщенные характеристики дают достаточно полное и наглядное представление об управляющих свойствах гиросиловых систем управления. Для анализа конкретных гиросистем и алгоритмов управления гиродинами могут использоваться все обобщенные характеристики или отдельные из них, наиболее подходящие для решения поставленной задачи. Область  $S$  определяет потенциальные возможности гиросистемы по изменению вектора кинетического момента. Область  $W$  характеризует потенциальные возможности гиросистемы по изменению вектора управляющего момента. Моментные характеристики определяют изменение размеров области  $W$  при движении по типовой траектории кинетического момента.

## 5.7. АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ГИРОДИНАМИ

### 5.7.1. Общий подход к задаче управления гиродинами

Управление угловым положением космических аппаратов складывается из трех этапов: определение вектора состояния космического аппарата, вычисление вектора управления как функции вектора состояния, преобразование вектора управления в управляющий момент при помощи системы исполнительных органов. Состояние космического аппарата как объекта управления определяют датчики углов ориентации и угловой скорости. Вектор управления (вектор желаемого управляющего момента) формируется как функция угловых отклонений и угловой скорости космического аппарата. В исполнительных органах электрические сигналы управления преобразуются в управляющий момент. В традиционных маховичных системах реализация вектора управления не представляет трудностей: три компоненты вектора управления реализуются тремя независимыми двигателями-маховиками. В шаровом двигателе-маховике компоненты вектора управления реализуются тремя дугowymi статорами [20]. В гиросиловых системах этот процесс значительно сложнее. Возникает задача о распределении вектора управления между отдельными гиродинами. Процесс преобразования вектора управления в требуемые скорости прецессии будем называть алгоритмом управления гиродинами. Аналогичные задачи появляются в избыточных маховичных системах [14] и шаровых двигателях-маховиках с индукционными катушками [8, 27].

Рассмотрим систему  $n$  одинаковых гиродинов с произвольно ориентированными осями прецессии. Вектор управляющего момента, создаваемый такой системой относительно инерциальной системы координат, вычисляется по формуле

$$\mathbf{M} = -G \sum_{j=1}^n \lambda_j \times \mathbf{g}_j$$

или в матричной форме

$$m = B\lambda, \quad (5.7)$$

где  $m, \lambda$  – матрицы-столбцы;  $B$  –  $(3 \times n)$  – матрица, элементы которой зависят от углов прецессии гиродинов  $\beta_j$ ;  $\lambda_j$  – скорость прецессии  $j$ -го гиродина;  $m_1, m_2, m_3$  – компоненты вектора управляющего момента, отнесенные к кинетическому моменту одного гиродина  $G$ ;  $\mathbf{g}_j$  – единичный вектор, направленный по вектору кинетического момента  $j$ -го гиродина. Полагаем, что вектор управления станцией  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  определен. Вектор управляющего момента системы гиродинов является функцией углов и скоростей прецессии

$\mathbf{m} = \mathbf{m}(\beta_j, \lambda_j)$ . Задача управления гиродинами заключается в нахождении скоростей прецессии, обеспечивающих выполнение равенства  $\mathbf{m}(\beta_j, \lambda_j) = \mathbf{u}$ . Заменяя в соотношении (5.7) матрицу  $\mathbf{m}$  на  $(3 \times 1)$  – матрицу  $u$ , элементами которой являются компоненты вектора управления  $\mathbf{u}$ , получим систему трех уравнений (назовем их уравнениями моментов) для определения неизвестных скоростей прецессии

$$B\lambda = u. \quad (5.8)$$

Если число гиродинов больше трех, то число неизвестных скоростей прецессии превышает число уравнений. Такая система может быть решена многими способами. Однако нужно учитывать, что в результате движения гиродинов матрица  $B$  непрерывно меняется и в некоторый момент времени система уравнений (5.8) может оказаться несовместной. Для однозначного решения она должна быть дополнена некоторыми уравнениями или условиями оптимальности. Общий подход к решению задачи, основанный на использовании определителя Грама, предложен в [89, 96]. Другой способ определения скоростей прецессии состоит в том, что уравнения (5.8) заменяются системой уравнений вида

$$B_1 l_1 = p_1, B_2 l_2 = p_2, \dots, B_q l_q = p_q, \quad (5.9)$$

такой, что ее решение является решением уравнений (5.8). Система (5.9) должна удовлетворять условиям

$$\sum_{v=1}^q B_v l_v = B\lambda; \quad \sum_{v=1}^q p_v = u.$$

В этом случае задача управления гиродинами сводится, во-первых, к распределению вектора управления между  $q$ -группами гиродинов, во-вторых, к нахождению скорости прецессии каждого гиродина  $v$ -й группы [29]. Минимальное число гиродинов в группе равно двум [34].

Объединение гиродинов в группы и распределение функций управления между ними целесообразно производить таким образом, чтобы система уравнений оставалась совместной при изменении взаимного положения гиродинов. Каждый гиродин может входить в состав нескольких групп или одной группы. В последнем случае система уравнений (5.9) распадается на независимые подсистемы, а группы гиродинов могут рассматриваться как автономные исполнительные органы.

Одна из типовых групп – система гиродинов с параллельными осями прецессии – представляет собой автономный исполнительный орган, создающий управляющие моменты относительно двух осей станции. Две или три такие системы, расположенные на станции соответствующим образом, могут обеспечить управление ее угловым положением.

## 5.7.2. Управление типовыми группами

Пусть оси прецессии  $n$  одинаковых гиродинов параллельны оси  $Oz$ , единичные векторы  $\mathbf{g}_j$  приведены в начало координат  $O$ , а кинетический момент гиродинов условно равен единице.

Полагаем, что диапазон изменения углов прецессии не ограничен, углы прецессии отсчитываются от оси  $Ox$  и в текущий момент времени удовлетворяют условию  $\beta_1 > \beta_2 \dots > \beta_n$  (рис. 5.42, а). Для характеристики управляющих свойств системы гиродинов используем область  $S$  вариации кинетического момента и область  $W$  изменения вектора управляющего момента [30, 39, 85].

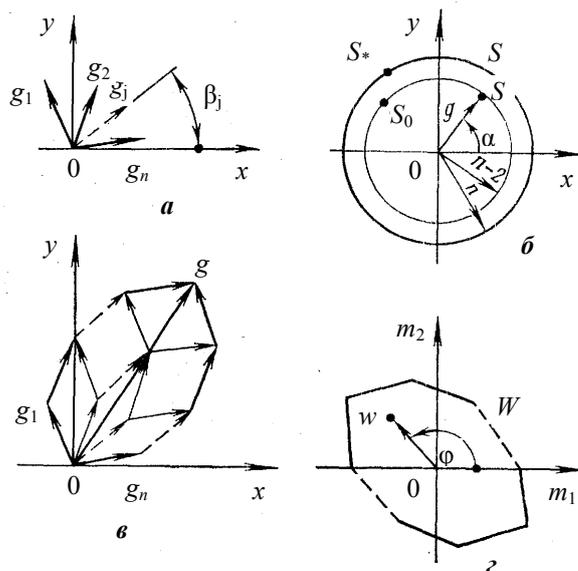


Рис. 5.42. Система гиродинов с параллельными осями прецессии

Область  $S$  представляет собой круг радиуса  $n$  (рис. 5.42, б). Каждому вектору кинетического момента исследуемой системы  $\mathbf{g} = \sum \mathbf{g}_j$  соответствует точка  $s \in S$  с координатами

$$x = \sum_{j=1}^n x_j; \quad y = \sum_{j=1}^n y_j; \quad x_j = \cos \beta_j; \quad y_j = \sin \beta_j.$$

Суммируя векторы  $\mathbf{g}_j$ , начиная с  $\mathbf{g}_1$ , в порядке убывания углов  $\beta_j$ , и, начиная с  $\mathbf{g}_n$ , в порядке возрастания углов  $\beta_j$ , получим две выпуклые ломаные линии – верхнюю и нижнюю, общей замыкающей которых является вектор  $\mathbf{g}$ . Они образуют симметричный относительно центра векторный  $2n$ -угольник.

Последний ограничен замкнутой ломаной линией, содержащей внутри себя все ломаные линии, полученные суммированием векторов  $\mathbf{g}_j$  в произвольном порядке (рис. 5.42, в).

Можно показать, что при наличии ограничения на величину скорости прецессии  $|\dot{\lambda}| \leq \lambda_*$  область  $W$  имеет форму  $2n$ -угольника, подобного (с коэффициентом подобия  $\lambda_*$ ) векторному  $2n$ -угольнику, построенному на векторе  $\mathbf{g}$ , и повернутого относительно него на угол  $1/2\pi$  (рис. 5.42, г). Каждому вектору управляющего момента

$$\mathbf{m} = -\sum_{j=1}^n \lambda_j \times \mathbf{g}_j$$

соответствует точка  $w \in W$  с координатами

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -y_1 \dots & -y_j \dots & -y_n \\ x_1 \dots & x_j \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Площадь области  $W$  характеризует среднюю по всем направлениям величину управляющего момента. Она зависит не только от результирующего вектора кинетического момента, но и от взаимного положения гироудинов. Площадь области  $W$  будет минимальной (область  $W$  вырождается в отрезок прямой), если векторы  $\mathbf{g}_j$  коллинеарны.

Коллинеарное состояние векторов  $\mathbf{g}_j$  будем называть особой ситуацией в расположении гироудинов.

Каждой особой ситуации внутри области  $S$  соответствует особая точка  $s_0$  [30, 95].

Особые точки располагаются на окружностях радиуса  $g = 1, 3, \dots, n - 2$ , если число гироудинов нечетное, и на окружностях радиуса  $g = 2, 4, \dots, n - 2$ , если число гироудинов четное. В последнем случае особой точкой является и точка  $O$  (см. рис. 5.42, б).

В особых ситуациях система гироудинов не может реализовать вектор управления произвольного направления, а область  $W$  из плоской фигуры вырождается в отрезок, перпендикулярный вектору  $\mathbf{g}$  (вырожденная область  $W$ ). Особые ситуации, которым соответствуют точки  $s^*$  на границе области  $S$ , представляют собой состояния насыщения, при которых все векторы  $\mathbf{g}_j$  совпадают по направлению.

Между областями  $W$  и  $S$  существует соответствие, в силу которого каждой области  $W$ , заданной совокупностью углов прецессии  $\beta_j$ , соответст-

вует одна точка  $s$  внутри или на границе области  $S$ . Обратное утверждение в общем случае ( $n \geq 3$ ) неверно, т. е. каждой точке  $s$ , кроме  $s^*$ , соответствует некоторое множество областей  $W$ .

Не особой точке  $s$  соответствуют невырожденные области  $W$ , особой точке  $s_0$  – одна вырожденная и множество невырожденных областей  $W$ , особой точке  $s^*$  на границе области  $S$  – одна вырожденная область  $W$ , особой точке  $O$  (при  $n > 3$ ) – множество невырожденных и вырожденных областей  $W$ .

Следовательно, не меняя результирующий вектор кинетического момента  $\mathbf{g}$ , можно регулировать взаимное положение гиросилов так, чтобы особые ситуации в их расположении не возникали.

Уравнения моментов (5.8) для определения скоростей прецессии системы гиросилов с параллельными осями прецессии примут вид

$$\begin{bmatrix} y_1 \dots & y_j \dots & y_n \\ x_1 \dots & x_j \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

В системе двух гиросилов ( $n = 2$ ) уравнения моментов  $y_1\lambda_1 + y_2\lambda_2 = u_1$ ,  $y_1\lambda_1 + x_1\lambda_2 = -u_2$  имеют решение

$$\lambda_1 = \frac{x_2 u_1 + y_2 u_2}{y_1 x_2 + x_1 y_2}; \quad \lambda_2 = -\frac{x_1 u_1 + y_1 u_2}{y_1 x_2 + x_1 y_2}.$$

Такая система подробно исследована в разделе 5.5.

В особых ситуациях, когда векторы  $\mathbf{g}_1$  и  $\mathbf{g}_2$  противоположны, определитель системы уравнений равен нулю и гиросилы не могут реализовать вектор управления произвольного направления.

Увеличивая число гиросилов в системе, вероятность возникновения особых ситуаций можно уменьшить.

Рассмотрим систему трех гиросилов. При  $n = 3$  уравнения моментов (5.10) примут вид

$$y_1\lambda_1 + y_2\lambda_2 + y_3\lambda_3 = u_1; \quad x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + x_3\lambda_3 = -u_2. \quad (5.11)$$

Для однозначного определения скоростей прецессии уравнения (5.11) должны быть дополнены третьим уравнением или некоторым условием оптимальности.

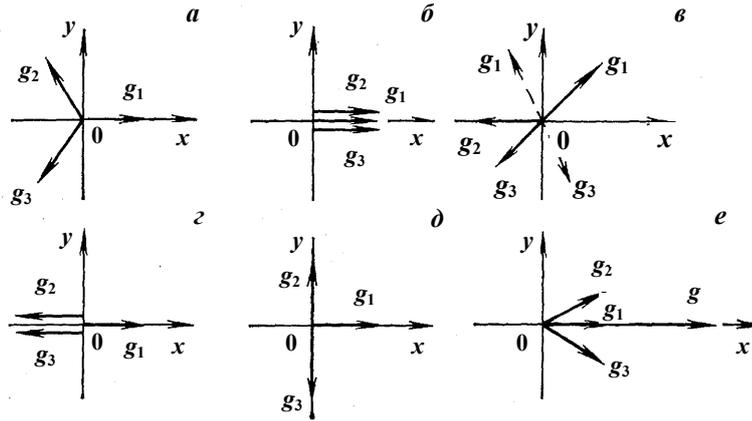


Рис. 5.43. Взаимное положение векторов кинетических моментов гироскопов

Особенность системы трех гироскопов состоит в том, что один и тот же вектор кинетического момента системы может быть получен при различных положениях векторов  $\mathbf{g}_j$  относительно друг друга. Исключение составляют два случая: кинетический момент равен нулю – углы между векторами  $\mathbf{g}_1$ ,  $\mathbf{g}_2$ ,  $\mathbf{g}_3$  составляют  $2/3\pi$  (рис. 5.43, а); кинетический момент равен предельному значению  $g = 3$  (точки  $s^*$ ) – углы между векторами равны нулю (рис. 5.43, б). В точках  $s_0$  один из векторов  $\mathbf{g}_j$  совпадает с вектором кинетического момента системы гироскопов  $\mathbf{g}$ , а два других противоположны и составляют произвольный угол с первым (рис. 5.43, в). В частности, если линия действия этих векторов совмещается с первым вектором, этот угол равен  $\pi$ , и возникает особая ситуация (рис. 5.43, з). В особых ситуациях при ограниченной скорости прецессии нельзя мгновенно изменить взаимное положение гироскопов и создать управляющий момент вдоль вектора кинетического момента системы гироскопов. Поэтому дополнительное условие к уравнениям моментов должно регулировать взаимное положение так, чтобы особые ситуации не возникали.

Взаимное положение гироскопов в точке  $s \in S$ , заданной вектором  $\mathbf{g}$ , будем считать оптимальным, если оно обеспечивает максимальную в этой точке площадь области  $W$ . Последнее условие выполняется, если векторы  $\mathbf{g}_j$  занимают симметричное положение, при котором один из них (средний) совпадает с вектором  $\mathbf{g}$  (рис. 5.43, е). Углы прецессии симметрично расположенных гироскопов обращают в нуль одну из трех функций:

$$f_1 = \mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_1 \mathbf{g}_3; \quad f_2 = \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3 - \mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2; \quad f_3 = \mathbf{g}_1 \mathbf{g}_3 - \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3$$

в зависимости от того, какой гироскоп является средним.

Пусть  $\mathbf{g}_k$  – средний вектор. Если рассматривать отличие функции  $f_k$  от нуля как отклонение системы гироскопов от симметричного положения, уравнения моментов (5.8) можно дополнить уравнением регулирования взаимного по-

ложения гиросилов  $\tau(\lambda_{k-1} + \lambda_{k+1}) = f_k$ , где  $\tau$  – постоянная времени, а нумерация гиросилов принята циклической. Поскольку средним вектором  $\mathbf{g}_k$  может быть любой из векторов  $\mathbf{g}_j$ , уравнение регулирования можно представить в виде

$$\begin{aligned} \chi_1 \lambda_1 + \chi_2 \lambda_2 + \chi_3 \lambda_3 &= f, \\ f &= \tau^{-1} [(1 - \chi_1) f_1 + (1 - \chi_2) f_2 + (1 - \chi_3) f_3]. \end{aligned}$$

Параметры  $\chi_j$  принимают значение 1 или 0 в зависимости от того, какой из векторов  $\mathbf{g}_j$  является средним и составляет наименьший угол с вектором  $\mathbf{g}$ : если  $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_k$ , то  $\chi_k = 0$ ,  $\chi_{k-1} = \chi_{k+1} = 1$ . Для определения среднего вектора  $\mathbf{g}_k$  можно использовать функции  $f_j$ : вектор  $\mathbf{g}_k$  является средним, если  $f_{k+1} < 0$ ,  $f_{k-1} > 0$ . Следовательно,  $\chi_1 = 0$ , если  $f_2 < 0$ ,  $f_3 > 0$ ;  $\chi_2 = 0$ , если  $f_3 < 0$ ,  $f_1 > 0$ ;  $\chi_3 = 0$ , если  $f_1 < 0$ ,  $f_2 > 0$ ; в остальных случаях  $\chi_j = 1$ .

С учетом уравнения регулирования взаимного положения гиросилов система уравнений для определения искомых скоростей прецессии примет вид

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ -u_2 \\ f \end{bmatrix}.$$

Скорости прецессии вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1/\Delta [f(\mathbf{g}_3 \mathbf{g}_2) \mathbf{h} - \chi_2(\mathbf{g}_3 \mathbf{u}) + \chi_3(\mathbf{g}_2 \mathbf{u})]; \\ \lambda_2 &= 1/\Delta [f(\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_3) \mathbf{h} - \chi_3(\mathbf{g}_1 \mathbf{u}) + \chi_1(\mathbf{g}_3 \mathbf{u})]; \\ \lambda_3 &= 1/\Delta [f(\mathbf{g}_2 \mathbf{g}_1) \mathbf{h} - \chi_1(\mathbf{g}_2 \mathbf{u}) + \chi_2(\mathbf{g}_1 \mathbf{u})]; \\ \Delta &= [\chi_1(\mathbf{g}_3 \mathbf{g}_2) + \chi_2(\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_3) + \chi_3(\mathbf{g}_2 \mathbf{g}_1)], \end{aligned} \tag{5.12}$$

где  $\mathbf{h}$  – единичный вектор, направленный по оси прецессии гиросилов.

Управляющий момент  $\mathbf{m}$  системы гиросилов с регулированием взаимного положения зависит не только от величины кинетического момента  $g$ , но и от предыстории движения, т. е. от времени, в течение которого кинетический момент создавался. Общей характеристикой системы гиросилов как исполнительного органа может служить зависимость  $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\mathbf{g}, t)$ , где  $t$  – время, за которое достигается заданное значение кинетического момента (оно зависит от постоянной времени  $\tau$ ). Управляющий момент, создаваемый гиросилами в точке  $s \in S$ , определенной полярными координатами  $g, \alpha$  в произвольном направлении, заданном вектором  $\mathbf{r}(\varphi)$ , является функцией четырех переменных  $m = m(\varphi, g, \alpha, \tau)$ . В пространстве параметров  $\varphi, g, \alpha$  эта функция представляет собой совокупность поверхностей, наглядное представление о которых дают сечения.

Каждой точке  $(g, \alpha)$  в текущий момент времени могут быть поставлены в соответствие точки  $w \in W$ , определенные полярными координатами  $m, \varphi$ . Область  $W$  системы трех гироскопов в общем случае представляет собой шестиугольник. Формы области  $W$  при различных положениях векторов  $\mathbf{g}_j$  (см. рис. 5.43, *a, в, д, e*) изображены на рис. 5.44.

Каждому направлению  $\mathbf{r}$  ( $\varphi$ ), проведенному из точки  $s$ , может быть поставлена в соответствие зависимость  $m(g, \tau)$ , которую будем называть моментной характеристикой. Она характеризует изменение протяженности области  $W$  вдоль траектории изменения вектора кинетического момента.

Пусть вектор  $\mathbf{r}$  задан в точке  $0 \in S$ , а модуль кинетического момента изменяется от 0 до 3. Направления, совпадающие с векторами  $\mathbf{g}_j$ , являются благоприятными для создания управляющего момента, поскольку при всех значениях  $g$  выполняется условие симметричного расположения гироскопов. Моментная характеристика для этих направлений не зависит от  $\tau$ :  $m(g) = \lambda_*[4 - (g - 1)^2]^{1/2}$ , где  $\lambda_*$  – максимальная скорость прецессии гироскопов. Для всех других направлений, особенно для  $\mathbf{r} = -\mathbf{g}_j$ , моментная характеристика зависит от  $\tau$ . Семейство моментных характеристик для  $\mathbf{r} = -\mathbf{g}_j$  и  $\lambda_* = 0,2$  рад/с изображено на рис. 5.45.

Скорости прецессии гироскопов, вычисленные по формулам (5.12), содержат две составляющие, одна из которых определяет долю гироскопа в создании управляющего момента, другая – регулирует взаимное положение. Соотношение между ними определяется параметром  $\tau$ . При  $\tau \rightarrow \infty$  – превалирует задача создания управляющего момента, при  $\tau \rightarrow 0$  – задача регулирования взаимного положения. В первом случае взаимное положение не регулируется и особые ситуации могут возникать на окружности единичного радиуса области  $S$ , во втором – управляющий момент не создается до тех пор, пока гироскопы не займут симметричное положение.

Особенностью моментных характеристик в направлении  $\mathbf{r} = -\mathbf{g}_j$ , является наличие «провалов» при  $g < 1$ . При  $\mathbf{r} \neq -\mathbf{g}_j$ , величина провалов уменьшается, при  $\mathbf{r} = \mathbf{g}_j$  провалы отсутствуют. С увеличением числа гироскопов в системе влияние провалов уменьшается. Моментные характеристики системы трех гироскопов в различных направлениях ( $\varphi = 0, 15, 30, 45, 60^\circ$ ) при  $\tau = 1$  с изображены на рис. 5.46.

Рассмотрим изменение кинетического момента системы гироскопов вдоль оси  $Ox$ . Если кинетический момент изменяется в направлении  $\mathbf{r} = -\mathbf{g}_1$  от нуля до границы области  $S$  ( $x = -3$ ) и обратно, то система гироскопов оказывается повернутой на угол  $1/3\pi$  относительно своего исходного положения, изображенного на рис. 5.43, *a*. Характер изменения управляющего момента системы трех гироскопов при изменении кинетического момента вдоль оси  $Ox$  иллюстрирует рис. 5.47. Направления изменения кинетического момента указаны стрелками.

Управляющий момент системы зависит не только от кинетического момента, но и от знака его производной. Это обстоятельство является отражением того факта, что управляющий момент системы гироскопов зависит от предыстории движения.

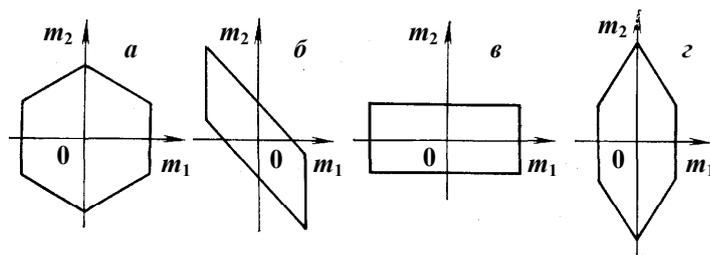


Рис. 5.44. Области  $W$

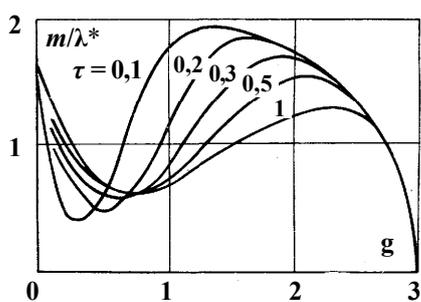


Рис. 5.45. Моментные характеристики в направлении  $\mathbf{r} = -\mathbf{g}_1$

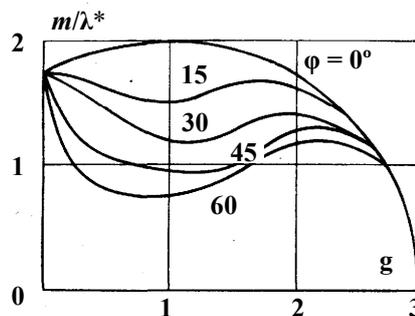


Рис. 5.46. Моментные характеристики в зависимости от угла  $\varphi$

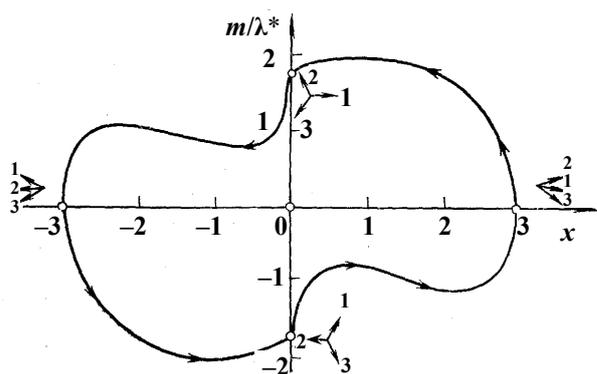


Рис. 5.47. Моментная характеристика при изменении кинетического момента по оси  $Ox$

Таким образом, предлагаемый алгоритм управления системой трех гиродинамов обеспечивает изменение кинетического момента от нуля до границы области  $S$  в произвольном направлении, при этом особые ситуации в расположе-

нии гиросилов не возникают. Для сравнения укажем, что применение в качестве критерия оптимальности условия, минимизирующего сумму квадратов скоростей прецессии  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \min$ , всегда приводит к возникновению особых ситуаций при изменении кинетического момента в направлении  $\mathbf{r} = -\mathbf{g}_j$ .

В заключение следует отметить, что принцип регулирования взаимного положения трех гиросилов можно распространить на систему с произвольным числом гиросилов. Взаимное положение векторов  $\mathbf{g}_j$  регулируется так, чтобы углы между смежными векторами были одинаковы. Для  $n$  гиросилов, кроме двух уравнений моментов, можно записать  $n - 2$  уравнений регулирования взаимного положения. В каждое из них в качестве неизвестных входят скорости прецессии трех гиросилов. С увеличением числа гиросилов настолько же увеличивается число уравнений регулирования взаимного положения.

### 5.7.3. Настройка гиросиловой системы

Рассмотрим гиросиловую систему (ГСС) ориентации космического аппарата, в состав которой входят две ортогонально расположенные типовые группы гиросилов [28, 40]. Схема ее установки изображена на рис. 5.1. Каждая типовая группа объединяет по два одинаковых гиросилова с параллельными осями прецессии (см. рис.5.5) и может создавать управляющие моменты относительно двух осей космического аппарата [34]. Системы, укомплектованные типовыми группами, в работе [98] предложено именовать *кратными*. В кратных ГСС возникает задача о распределении функций управления между отдельными группами [40, 42] или задача о выборе критерия самонастройки [97]. В [57] предложен алгоритм управления гиросиловыми, основанный на разложении программного вектора кинетического момента ГСС на два одинаковых вектора, каждый из которых реализуется отдельной группой. Анализ показывает, что принцип такого равномодульного управления неосуществим во всей области  $S$  изменения вектора кинетического момента ГСС [57]. Этого недостатка позволяют избежать критерии настройки, оптимизирующие размеры области  $W$  изменения вектора управляющего момента ГСС. Предлагаемый алгоритм управления гиросиловыми, обеспечивающий настройку на максимум площади области  $W$  типовой группы, реализуется во всей области  $S$  [40].

Пусть оси прецессии первой группы гиросилов параллельны оси  $Oz$ , а оси второй группы параллельны оси  $Oy$  связанной системы координат  $Oxyz$  (см. рис. 5.5). Положение векторов кинетических моментов гиросилов  $\mathbf{G}_i (i = 1 - 4)$  в связанной системе координат определяется углами прецессии  $\beta_i$ , которые отсчитываются от оси  $Ox$ , или единичными векторами  $\mathbf{g}_1 = \mathbf{G}_1/G = (x_1, y_1, 0) = (\cos\beta_1, \sin\beta_1, 0)$ ;  $\mathbf{g}_2 = \mathbf{G}_2/G = (x_2, y_2, 0) = (\cos\beta_2, \sin\beta_2, 0)$ ;  $\mathbf{g}_3 = \mathbf{G}_3/G = (x_3, 0, z_3) = (\cos\beta_3, 0, \sin\beta_3)$ ;  $\mathbf{g}_4 = \mathbf{G}_4/G = (x_4, 0, z_4) = (\cos\beta_4, 0, \sin\beta_4)$ , где  $G$  – кинетический момент одного гиросилова. Положительному направлению отсчета углов прецессии соответствует вращение векторов  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  в сторону оси  $Oy$ , а векторов  $\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$  в сторону оси  $Oz$ . Направления отсчета углов прецессии указаны на рис. 5.48.

Вектор кинетического момента первой группы  $\mathbf{H}_{12} = G\mathbf{g}_{12}$ ,  $\mathbf{g}_{12} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2$  перемещается в координатной плоскости  $Oxy$ , вектор кинетического момента второй группы  $\mathbf{H}_{34} = G\mathbf{g}_{34}$ ,  $\mathbf{g}_{34} = \mathbf{g}_3 + \mathbf{g}_4$  перемещается в плоскости  $Oxz$ . Проекции вектора кинетического момента ГСС  $\mathbf{H} = G\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{12} + \mathbf{g}_{34}$  на оси  $Oxyz$  равны

$$H_x = Gx; x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4; H_y = Gy; y = y_1 + y_2; H_z = Gz; z = z_3 + z_4, \quad (5.13)$$

где  $\mathbf{g} = (x, y, z)$  – вектор кинетического момента ГСС в относительных единицах.

Поверхность области  $S$  (см. рис. 5.34) изменения вектора  $\mathbf{g}$  описывается системой уравнений [28, 50]:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2[(4 - y^2)(4 - z^2)]^{1/2} - 8 = 0; x^2 + z^2 \geq 4; \\ |y| - 2 = 0, x^2 + z^2 \leq 4; |z| - 2 = 0; x^2 + y^2 \leq 4. \end{aligned}$$

Проекция вектора управляющего момента системы гиросилов, установленной на неподвижном основании,  $\mathbf{M} = G\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{m} = -d\mathbf{g}/dt$  можно получить дифференцированием равенств (5.13)

$$\begin{aligned} M_x = Gm_x, \quad m_x = -x' = y_1\beta'_1 + y_2\beta'_2 + z_3\beta'_3 + z_4\beta'_4; \\ M_y = Gm_y, \quad m_y = -y' = -x_1\beta'_1 - x_2\beta'_2; \\ M_z = Gm_z, \quad m_z = -z' = -x_3\beta'_3 - x_4\beta'_4. \end{aligned}$$

Задача управления гиросиловыми системами заключается в нахождении скоростей прецессии  $\lambda_i = \beta'_i$ , обеспечивающих реализацию требуемого вектора управления космическим аппаратом. Искомые скорости прецессии  $\lambda_i$ , должны удовлетворять избыточной системе уравнений [28]:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 z_3 + \lambda_4 z_4 = m_1; \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = -m_2; \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = -m_3, \quad (5.14)$$

где  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$  – вектор управления, отнесенный к кинетическому моменту гиросилов.

Система уравнений (5.14), дополненная уравнением настройки

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 - \lambda_3 z_3 - \lambda_4 z_4 = m_4,$$

распадается на две подсистемы

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = m_{12}; \quad \lambda_3 z_3 + \lambda_4 z_4 = m_{34}; \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = -m_2; \quad \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = -m_3; \\ m_{12} = 1/2(m_1 + m_4); \quad m_{34} = 1/2(m_1 - m_4), \end{aligned} \quad (5.15)$$

где  $m_4$  – подлежащая определению функция управления. После выбора функции управления задача нахождения скоростей прецессии гиросилов может

считаться решенной: искомые скорости прецессии вычисляются по формулам, аналогичным (5.6).

Перейдем к выбору функции управления  $m_4$ . Компоненты вектора управления  $m_{12}$  и  $m_2$  реализуются первой группой гиродинов, компоненты  $m_{34}$  и  $m_3$  реализуются второй группой. Область  $W_1$  изменения вектора управляющего момента первой группы площадью

$$F_1 = 4G\lambda^2 |\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2|,$$

где  $\lambda$  – максимальная скорость прецессии, расположенная в плоскости  $Oxy$ , имеет форму ромба, подобного ромбу, построенному на векторах  $\mathbf{g}_1$  и  $\mathbf{g}_2$ , и повернутого относительно последнего на угол  $1/2\pi$  [30, 34, 39]. Аналогично, область  $W_2$  второй группы площадью

$$F_2 = 4G^2 \lambda^2 |\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_4|$$

расположена в плоскости  $Oxz$  и имеет форму ромба, подобного ромбу, построенному на векторах  $\mathbf{g}_3$  и  $\mathbf{g}_4$ .

Возможности самонастройки минимально избыточной ГСС весьма ограничены и сводятся к распределению кинетического ГСС по оси  $Ox$  между двумя группами. Пусть  $x_{12}^*$  и  $x_{34}^*$  – оптимальные значения кинетических моментов первой и второй групп по оси  $Ox$ , а  $\Delta = x_{12}^* - x_{34}^*$  – оптимальная разность. Если вектор кинетического момента ГСС  $\mathbf{g} = (x, y, z)$  задан и оптимальная разность известна, то из равенств (5.13) получим систему уравнений для определения углового положения векторов  $\mathbf{g}_i$ :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= x_{12}^*; x_3 + x_4 = x_{34}^*; \\ y_1 + y_2 &= y; z_3 + z_4 = z; \\ x_{12}^* &= (x + \Delta)/2; x_{34}^* = (x - \Delta)/2. \end{aligned}$$

Отсюда будем иметь

$$\cos \beta_{1,2} = 1/2x_{12}^* \pm y \left[ \frac{1}{(x_{12}^*)^2 + y^2} - \frac{1}{4} \right]^{1/2}; \cos \beta_{3,4} = 1/2x_{34}^* \pm z \left[ \frac{1}{(x_{34}^*)^2 + z^2} - \frac{1}{4} \right]^{1/2}.$$

Рассмотрим задачу нахождения оптимальной разности  $\Delta = \Delta(x, y, z)$  из условия  $\min \{F_1, F_2\} = \max$ . Оно равносильно условию

$$\min(f_1, f_2) = \max, \quad (5.16)$$

где  $f_1 = |\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2|$ ,  $f_2 = |\mathbf{g}_3 \mathbf{g}_4|$  – площади ромбов, построенных на векторах  $\mathbf{g}_1$ ,  $\mathbf{g}_2$  и  $\mathbf{g}_3$ ,  $\mathbf{g}_4$ , численно равные определителям двух систем уравнений (5.15).

В частном случае условие (5.16) совпадает с условием  $f_1(x, y, \Delta) = f_2(x, z, \Delta)$  или

$$|\mathbf{g}_{12}\mathbf{d}_{12}| = |\mathbf{g}_{34}\mathbf{d}_{34}|; \mathbf{d}_{12} = \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\mathbf{d}_{34} = \mathbf{g}_3 - \mathbf{g}_4, \quad (5.17)$$

где  $d_{12}$   $d_{34}$  – диагонали ромбов, построенных на векторах  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  и  $\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$ .

Подставляя в (5.17) соотношения

$$\begin{aligned} g_{12}^2 &= x_{12}^2 + y^2; g_{34}^2 = x_{34}^2 + z^2; d_{12}^2 = 1 - \frac{1}{4} g_{12}^2; \\ d_{34}^2 &= 1 - \frac{1}{4} g_{34}^2; x_{12} = \frac{1}{2}(x + \Delta); x_{34} = \frac{1}{2}(x - \Delta), \end{aligned}$$

получим уравнение, которому удовлетворяет оптимальная разность

$$x\Delta^3 + (y^2 - z^2)\Delta^2 + x(x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 8)\Delta + (y^2 - z^2)(x^2 - 8) + 2(y^4 - z^4) = 0. \quad (5.18)$$

В качестве оптимальной разности выбирается один из трех корней уравнения (5.18), обеспечивающий максимальные площади ромбов  $f_1$  и  $f_2$ . Решения уравнения (5.18) можно найти, если воспользоваться вытекающими из (5.17) равенствами

$$g_{12} = g_{34} \quad (5.19)$$

или

$$g_{12} = d_{34}. \quad (5.20)$$

Искомая разность

$$\Delta = (z^2 - y^2)/x, \quad (5.21)$$

найденная из равенства (5.19), реализует принцип равномодульного управления. Подставляя (5.21) в соотношения

$$g_{12} = [\frac{1}{4}(x + \Delta)^2 + y^2]^{1/2} \leq 2; \quad g_{34} = [\frac{1}{4}(x - \Delta)^2 + z^2]^{1/2} \leq 2,$$

получим неравенства

$$(x^2 + z^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 \leq 16x^2; \quad (x^2 + y^2 - z^2)^2 + 4x^2z^2 \leq 16x^2,$$

определяющие область  $V_1$  допустимости равномодульного управления [57].

Обозначим через  $V_1^-$  область, в которой принцип равномодульного управления не выполняется. В частности, принцип равномодульного управления не позволяет найти оптимальную разность при нулевом кинетическом моменте ГСС.

Другие корни уравнения (5.18) находятся из условия (5.20):

$$\Delta = \pm [8 - x^2 - 2y^2 - 2z^2]^{1/2}. \quad (5.22)$$

Для определенности полагаем, что в исходном состоянии при нулевом кинетическом моменте ГСС  $\Delta = 2\sqrt{2}$ , при этом  $x_{12} > 0$ ,  $x_{34} < 0$ , векторы  $\mathbf{g}_1$ ,  $\mathbf{g}_2$  и  $\mathbf{g}_{12}$  расположены справа от плоскости  $Oyz$ , а векторы  $\mathbf{g}_3$ ,  $\mathbf{g}_4$  и  $\mathbf{g}_{34}$  слева от этой плоскости (рис. 5.48).

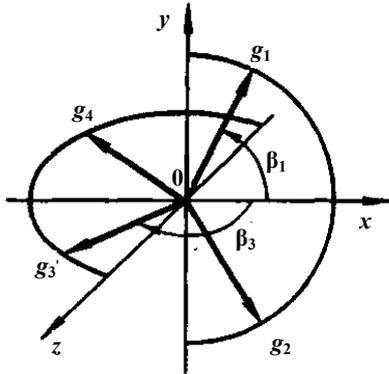


Рис. 5.48. Направления отсчета углов прецессии

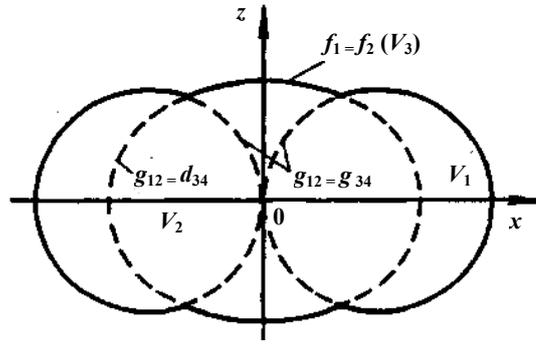


Рис. 5.49. Сечение области  $V_3$

Равенство (5.22) сохраняет смысл, пока подкоренное выражение остается положительным. Следовательно, равенство (5.20) и оптимальная разность (5.22) могут быть реализованы внутри области  $V_2$ , ограниченной поверхностью эллипсоида

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8. \quad (5.23)$$

Равенство площадей ромбов (5.17) выполнимо внутри области  $V_3 = V_1 \cap V_2$ . Сечение области  $V_3$  координатной плоскостью  $Oxz$  изображено на рис. 5.49.

Обозначим через  $V_{12} = V_1 \cap V_2$  – пересечение областей  $V_1$  и  $V_2$ , а через  $V_4 = V_2 \cap V_1^-$  – пересечение областей  $V_2$  и  $V_1^-$ . В области  $V_{12}$  могут быть выполнены как равенство (5.19), так и равенство (5.20). Величины, полученные из равенства (5.19), будем обозначать одним штрихом, а найденные из равенства (5.20) двумя штрихами. Из двух разностей  $\Delta'$  (5.21) и  $\Delta''$  (5.22) в качестве оптимальной следует выбрать ту, которая обеспечит большую площадь ромбов, построенных на векторах  $\mathbf{g}_i$ .

Исследуем движение вектора  $\mathbf{g}$  кинетического момента ГСС из некоторой исходной точки, расположенной в координатной плоскости  $Oyz$ , до границы области  $S$ . Полагаем, что конец вектора  $\mathbf{g}$  перемещается по прямой, параллельной оси  $Ox$  ( $x > 0$ ), при этом переменные  $y, z$  рассматриваются как параметры. Исходная точка расположена в области  $V_4 \in V_2$ , если ее координаты удовлетворяют условию  $y^2 + z^2 < 4$ . Предположим вначале, что это условие выполнено и  $|y| < |z| < \sqrt{2}$ . По мере нарастания  $x$  вектор  $\mathbf{g}$  переходит из области  $V_4$ , где выполняется условие (5.20), в область  $V_{12}$ . В этой области площади  $f_1''$ ,  $f_2''$ ,

найденные из равенства (5.20), как функции  $x$  возрастают, достигают максимума  $f_1''_{\max} = f_2''_{\max} = 1$  при  $x = (2 - y^2)^{1/2} - (2 - z^2)^{1/2}$ , затем убывают и достигают минимума  $f_1''_{\min} = f_2''_{\min} = 1/2 |z| (4 - z^2)^{1/2}$  при  $x''_{34} = 0$ . Площади  $f_1', f_2'$ , найденные из равенства (5.19), как функции  $x$  возрастают и достигают максимума при  $x = (2 - y^2)^{1/2} + (2 - z^2)^{1/2}$ . Величина  $x$ , начиная с которой реализуется равенство (5.19), определяется условием  $f_2'' = f_2'$ , что эквивалентно  $g''_{34} = g'_{34}$  или  $x''_{34} = -x'_{34}$ . Отсюда

$$x = 1/2 (\Delta' - \Delta''). \quad (5.24)$$

Подставляя в (5.24) соотношения для  $\Delta'$  (5.21) и  $\Delta''$  (5.22), найдем координату точки перехода от равенства (5.24) к равенству (5.19):

$$x^2_n = 1/5 \{4 + z^2 - 3y^2 + [(4 + z^2 - 3y^2)^2 - 5(y^2 - z^2)^2]^{1/2}\}. \quad (5.25)$$

Переход осуществляется раньше, чем площадь  $f_2''$  достигнет своего минимума. Дальнейшее движение до границы области  $S$  осуществляется за счет равномодульного управления при оптимальной разности (5.21).

Взаимное положение ромбов, построенных на векторах  $\mathbf{g}_i$ , удобно изображать на одной плоскости, условно совместив координатные плоскости  $Oxy$  и  $Oxz$ . Исходное положение ромбов при  $x = 0$  и  $|z| > |y|$  изображено на рис. 5.50, *a*. Положение ромбов в точке перехода (5.25) от оптимальной разности (5.22) к оптимальной разности (5.21) показано на рис. 5.50, *a* штриховой линией. Положение ромбов после перехода к равномодульному управлению изображено на рис. 5.50, *б*.

Исследуем область параметров  $|z| \geq \sqrt{2} > |y|$ . С увеличением  $x$  векторы  $\mathbf{g}_{12}$  и  $\mathbf{g}_{34}$  поворачиваются в сторону оси  $Ox$ , площадь  $f_2''$  возрастает и достигает максимума  $f_2''_{\max} = 1/2 |z| (4 - z^2)^{1/2}$  при  $x = \Delta$  ( $x''_{34} = 0$ ). Дальнейшее выполнение равенства

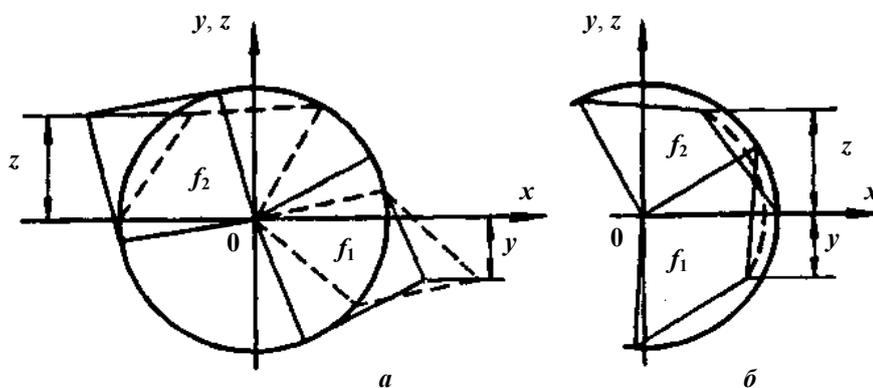


Рис. 5.50. Взаимные положения ромбов

ства (5.20) возможно лишь за счет встречного движения векторов, что приводит к вырождению ромбов и уменьшению площадей  $f_1, f_2$  до нуля. Поэтому в точке  $x = \Delta$  целесообразно перейти к условию (5.16). Подставляя в равенство  $x = \Delta$  соотношение (5.22), получим условие такого перехода

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 4. \quad (5.26)$$

После точки перехода увеличение вектора  $\mathbf{g}$  осуществляется только за счет вектора  $\mathbf{g}_{12}$ . Вектор  $\mathbf{g}_{34}$  остается неподвижным и площадь  $f_2$  сохраняет максимальное значение. Площадь  $f_1$  увеличивается, достигает максимума  $f_{1\max} = 1$  при  $x = x_{12} = (2 - y^2)^{1/2}$ , затем уменьшается. На этом участке реализуется оптимальная разность  $\Delta = x$ . При выполнении условия

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad (5.27)$$

площадь  $f_1$  уменьшится до  $f_2$ . Затем до границы области  $S$  осуществляется равномодульное управление.

Положение ромбов в характерных точках изображено на рис. 5.51. Положение ромбов в исходном состоянии изображено сплошной линией, положение при переходе к оптимальной разности  $\Delta = x$  – штриховой линией, положение первого ромба при переходе к равномодульному управлению – линией двойной толщины.

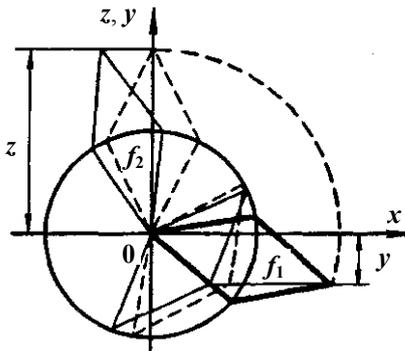


Рис. 5.51. Положение ромбов в характерных точках

Таким образом, внутри области  $V_2$  существует область  $V_2^-$ , в которой критерий оптимальности (5.16) обеспечивает большую площадь ромбов, чем критерий (5.17). Область  $V_2^-$  расположена внутри конуса (5.27) между поверхностями эллипсоида (5.23) и сферы (5.26).

Если  $y^2 + z^2 > 4$ , то исходная точка из области  $V_3$  перемещается в область  $V_3^-$ , в которой равенство площадей ромбов не выполнимо. В исходном состоянии векторы  $\mathbf{g}_{12}$  и  $\mathbf{g}_{34}$  вытянуты вдоль осей  $Oy$  и  $Oz$ . Когда  $|z| > |y|$ , то  $f_1 > f_2$ . Начальное движение вектора  $\mathbf{g}$  осуществляется

только за счет изменения одного вектора  $\mathbf{g}_{12}$ , а вектор  $\mathbf{g}_{34}$  остается неподвижным. При выполнении условия (5.27) площади ромбов становятся равными, траектория кинетического момента из области  $V_3^-$  переходит в область  $V_1$  и далее до границы области  $S$  осуществляется равномодульное управление. В диапазоне  $0 < x < (z^2 - y^2)^{1/2}$  оптимальная разность реализуется в виде  $\Delta = x$ . Область  $V_3^-$  расположена внутри конуса (5.27) между поверхностями области  $S$  и эллипсоида (5.23).

Оптимальная разность  $\Delta = x$  реализуется внутри области  $V_5$ , образуемой за счет суммирования областей  $V_2^-$  и  $V_3^-$ . Сечение области  $V_5$  координатной плоскостью  $Oxz$  для  $x > 0$  изображено на рис. 5.52.

Обобщим полученные результаты. При  $x > 0$  и  $|z| > |y|$  оптимальная разность может принимать три значения:

$$\Delta_1 = (8 - x^2 - 2y^2 - 2z^2)^{1/2},$$

если выполняется одно из двух условий  $x < x_n$  и  $|z| < \sqrt{2}$  или  $x^2 + y^2 + z^2 < 4$  и  $|z| \geq \sqrt{2}$ ;

$$\Delta_2 = |z^2 - y^2|/x,$$

если выполняются одно из двух условий  $x \geq x_n$  и  $|z| < \sqrt{2}$  или  $x^2 + y^2 - z^2 \geq 0$  и  $|z| \geq \sqrt{2}$ ;

$$\Delta_3 = x,$$

если одновременно выполняются условия  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4$ ,  $x^2 + y^2 - z^2 < 0$  и  $|z| \geq \sqrt{2}$ .

Исследуем движение векторов  $\mathbf{g}_{12}$  и  $\mathbf{g}_{34}$  при  $x < 0$ . В отличие от предыдущего случая движение вектора кинетического момента ГСС вдоль отрицательного направления оси  $Ox$  вызывает уменьшение площадей ромбов, построенных на векторах  $\mathbf{g}_i$ . Чтобы этого не происходило, целесообразно изменить исходное положение векторов, т. е. вектор  $\mathbf{g}_{12}$  расположить слева от координатной плоскости, а вектор  $\mathbf{g}_{34}$  справа. Для определения оптимальных разностей можно воспользоваться результатами, полученными выше. В расчетной формуле (5.25) следует поменять местами параметры  $y$  и  $z$ , а в качестве оптимальной разности для исходного состояния использовать корень (5.22) уравнения (5.18) со знаком минус. Новые формулы справедливы и для случая  $|y| > |z|$  и  $x > 0$ .

Таким образом, область  $S$  разделяется на ряд областей, внутри которых реализуется одна из оптимальных разностей. Сечение области  $S$  координатной плоскостью при  $|y| > |z|$  изображено на рис. 5.53. В этом сечении можно различить 8 зон. Оптимальные разности, реализуемые в каждой зоне, указаны значками.

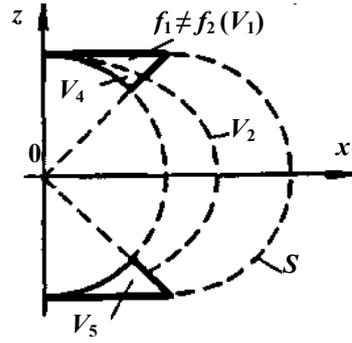


Рис. 5.52. Сечение области  $V_5$

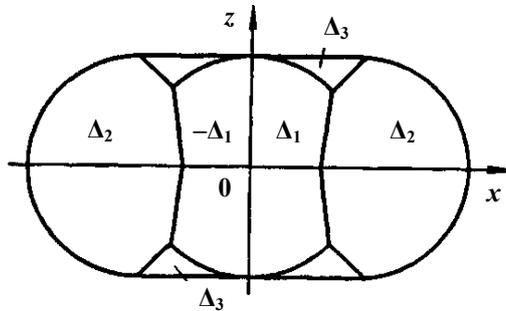


Рис. 5.53. Сечение области  $S$

Иногда может оказаться нежелательной перестройка ГСС при малых компонентах вектора кинетического момента  $x, y, z$  ( $|y| > |z|, x > 0$ ). Тогда замена оптимальной разности при  $x = 0$ , обязательная для строгого выполнения критерия оптимальности (5.16), не производится. Переход к равномодульному управлению осуществляется при  $x \geq x_n$ . В диапазоне  $0 < x < x_n$  обеспечивается равенство площадей ромбов без их максимизации. Такой переход возможен до тех пор, пока подкоренное выражение в формуле (5.25) остается положительным. Отсюда получим ограничение на величину компоненты  $y$ :  $y^2 < 0,76 + 0,62z^2$ . Временный отказ от строгого выполнения критерия оптимальности (5.16) позволяет осуществить различные варианты управления, учитывающие дополнительные требования к ГСС.

Область  $W$  ГСС, состоящей из двух типовых групп гиродинов, представляет собой 12-гранник (в частном случае ромбододекаэдр), гранями которого являются ромбы с длиной сторон  $2G\lambda^*$  (рис. 5.39) [28, 30, 39]. Обозначим через  $\mathbf{r}_i = d\mathbf{g}_i/dt$  – единичные векторы, определяющие линии действия векторов управляющих моментов гиродинов. Объем  $Q$  области  $W$  численно равен суммарному объему двух параллелепипедов, построенных на векторах  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4$  и  $\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ :

$$Q = 8G^3\lambda^3 \left| (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4) \right| + \left| (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \right|.$$

Оптимизация площадей ромбов  $f_1$  и  $f_2$  позволяет поддерживать объем области  $W$ , близким к максимальному. Так, в исходном состоянии (при нулевом кинетическом моменте) объем области  $W$ , реализуемый при выполнении критерия оптимальности (5.16), составляет 0,93 от максимального объема ромбододекаэдра.

После выбора оптимальной разности можно определить функцию управления  $m_4$ , входящую в уравнение настройки. Если контур самонастройки ГСС формируется по принципу пропорционального регулятора, то скорость изменения текущей разности кинетических моментов двух типовых групп  $x'_{12} - x'_{34}$  пропорциональна рассогласованию между оптимальной и фактической разностями кинетических моментов  $\Delta - (x_{12} - x_{34})$ . Уравнение настройки ГСС запишется в виде

$$\tau (x'_{12} - x'_{34}) + (x_{12} - x_{34}) = \Delta,$$

где  $\tau$  – постоянная времени. Сравнивая эту запись с уравнением настройки, дополняющим избыточную систему (5.14), получим выражение для функции управления

$$m_4 = -(\Delta - x_{12} + x_{34})/\tau.$$

Скорости прецессии гиродинов, найденные как решения систем уравнений (5.15), содержат две составляющие. Одна из них определяет долю гироина в реализации вектора управления космическим аппаратом, другая составляющая участвует в настройке ГСС на заданный критерий оптимальности. Нужно соответствие между ними устанавливается подбором постоянной времени  $\tau$ , которая влияет на скорость самонастройки.

## 5.7.4. Оптимизация настройки гиросиловой системы

Настройка минимально избыточной системы гиросилов [28, 33, 40, 42] может преследовать две главные цели: исключение особых состояний в работе гиросиловой системы (ГСС), максимальное расширение области управляемости. Мерой удаления ГСС от особых состояний служит определитель Грама [89, 98], обобщенной характеристикой управляющих свойств системы – область изменения вектора управляющего момента [30, 39]. Закон настройки должен обеспечивать приведение ГСС в состояние, при котором выбранный показатель качества максимален. В общем случае критерий настройки является многомерной функцией углов прецессии гиросилов [97]. Для системы четырех гиросилов критерий настройки можно представить в виде функции кинетического момента ГСС и одного параметра настройки, что облегчает поиск экстремума и упрощает закон управления. В частных случаях параметр настройки может быть определен как функция кинетического момента ГСС.

Полагаем, как и в разделе 5.7.3, что ГСС состоит из двух типовых групп гиросилов (см. рис. 5.48). Каждая типовая группа, объединяющая по два гиросилов с параллельными осями прецессии, представляет собой исполнительный орган, создающий управляющие моменты относительно двух осей космического аппарата [34].

Текущее положение ГСС в пространстве углов прецессии определяется вектором  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ , где  $\beta_i$  ( $i = 1 - 4$ ) – углы прецессии гиросилов.

Вектор состояния  $\beta$  определяет вектор кинетического момента ГСС и его проекции на оси космического аппарата (5.13).

Скорость изменения взаимного положения векторов  $\mathbf{g}_i$  определяется в пространстве скоростей прецессии вектором  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ , где  $\lambda_i = d\beta_i/dt$  – скорость прецессии  $i$ -го гиросилов.

Векторам  $\beta$  и  $\lambda$  соответствует вектор управляющего момента ГСС на неподвижном основании

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{m}_i \lambda_i, \quad (5.28)$$

где  $\mathbf{m}_i = -d\mathbf{g}_i/d\beta_i$ .

Равенство (5.28) может быть записано в виде

$$\mathbf{M} = G A \lambda,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} m_{1x} & m_{2x} & m_{3x} & m_{4x} \\ m_{1y} & m_{2y} & m_{3y} & m_{4y} \\ m_{1z} & m_{2z} & m_{3z} & m_{4z} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

–  $(3 \times 4)$  – матрица Якоби.

Единичные векторы

$$\mathbf{m}_1 = (y_1, -x_1, 0); \mathbf{m}_2 = (y_2, -x_2, 0); \mathbf{m}_3 = (z_3, 0, -x_3); \mathbf{m}_4 = (z_4, 0, x_4) \quad (5.30)$$

определяют положение линий, вдоль которых действуют управляющие моменты гиринов. Величины и знаки моментов зависят от скоростей прецессии  $\lambda_i$ .

Обозначим через  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  – четырехмерные векторы с координатами, равными элементам строк матрицы  $A$ . Умножая  $A$  на транспонированную матрицу, получим

$$B = AA^T = \begin{bmatrix} n_1 n_1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2 n_2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3 n_3 \end{bmatrix}.$$

Определитель Грама  $F = \det B$ , составленный для векторов  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ , является мерой удаления вектора  $\beta$  от особых состояний  $\beta^*$  в пространстве углов прецессии [96]. В силу свойств определителя Грама  $\det B \geq 0$ , а равенство  $\det B = 0$  выполняется лишь в том случае, когда векторы  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  линейно зависимы и вектор  $\beta$  становится особым. Определитель Грама имеет наглядный геометрический смысл: он равен сумме квадратов объемов параллелепипедов, построенных на тройках векторов  $\mathbf{m}_i$  [97]. Его можно представить в виде квадрата объема четырехмерного параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{n}_i$  [47].

Настройка ГСС, состоящей из двух типовых групп гиринов, связана с распределением кинетического момента ГСС по оси  $Ox$  между этими группами [28, 30, 40, 42].

Пусть  $x_{12} = x_1 + x_2$  и  $x_{34} = x_3 + x_4$  – кинетические моменты первой и второй групп гиринов по оси  $Ox$  ( $x_{12} + x_{34} = x$ ), а  $\Delta = x_{12} - x_{34}$  – разность кинетических моментов двух групп. Если вектор кинетического момента ГСС  $\mathbf{g} = (x, y, z)$  задан и разность  $\Delta$  известна, то равенства (5.13) можно записать в виде системы тригонометрических уравнений для определения проекций векторов  $\mathbf{g}$  на связанные оси

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = x; \quad x_3 + x_4 = x_{34}; \quad y_1 + y_2 = y; \quad z_3 + z_4 = z; \\ x_{12} = \frac{1}{2}(x + \Delta), \quad x_{34} = \frac{1}{2}(x - \Delta). \end{aligned}$$

Решая тригонометрические уравнения и учитывая уравнения связей между проекциями векторов  $\mathbf{g}_i$ :  $x_1^2 + y_1^2 = 1$ ;  $x_2^2 + y_2^2 = 1$ ;  $x_3^2 + z_3^2 = 1$ ;  $x_4^2 + z_4^2 = 1$ , найдём

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{1}{4}(x + \Delta) \pm a_1 y; \quad x_{3,4} = \frac{1}{4}(x - \Delta) \pm a_2 z; \\ y_{1,2} &= \frac{1}{2} [y \pm a_1(x + \Delta)]; \quad z_{3,4} = \frac{1}{2} [z \pm a_2(x - \Delta)]; \\ a_1 &= \frac{1}{2} [(4 - x_{12}^2 - y^2)/(x_{12}^2 + y^2)]^{1/2}; \\ a_2 &= \frac{1}{2} [(4 - x_{34}^2 - z^2)/(x_{34}^2 + z^2)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Для определённости полагаем, что со знаком плюс вычисляются проекции векторов  $\mathbf{g}_1$  и  $\mathbf{g}_3$ .

Соотношения (5.31) позволяют однозначно определить вектор состояния в зависимости от вектора кинетического момента ГСС  $\mathbf{g}(x, y, z)$  и текущей разности  $\Delta$ . Регулируя параметр  $\Delta$ , можно осуществлять настройку ГСС на заданный критерий оптимальности.

Рассмотрим задачу нахождения оптимальной разности  $\Delta = \Delta(x, y, z)$  из условия  $\det b = \max$ . Перемножая матрицы  $A$  (5.29) и  $A^T$ , получим с учётом (5.30), определитель Грама как функцию вектора состояния  $\beta$

$$f(\beta) = \det B = \begin{vmatrix} y_1^2 + y_2^2 + z_3^2 + z_4^2 & -(x_1y_1 + x_2y_2) & -(x_3z_3 + x_4z_4) \\ -(x_1y_1 + x_2y_2) & x_1^2 + x_2^2 & 0 \\ -(x_3z_3 + x_4z_4) & 0 & x_3^2 + x_4^2 \end{vmatrix}. \quad (5.32)$$

Раскроем соотношение (5.32):

$$F(\beta) = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 (x_3^2 + x_4^2) + (x_3z_4 - x_4z_3)^2 (x_1^2 + x_2^2). \quad (5.33)$$

В каждое из слагаемых равенств (5.33) входят квадраты объёмов двух параллелепипедов. Их основаниями служат ромбы, построенные на парах векторов  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$  и  $\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4$ , принадлежащих разным типовым группам. Высоты параллелепипедов соответственно равны проекциям векторов  $\mathbf{m}_3$  и  $\mathbf{m}_4$  на оси прецессии первой пары, а векторов  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$  на оси прецессии второй пары. Чтобы представить определитель Грама в виде функции кинетического момента ГСС  $\mathbf{g}(x, y, z)$  и разности  $\Delta$ , подставим в (5.33) соотношения (5.31):

$$F(x, y, z, \Delta) = F_{11}(x, y, \Delta)F_{22}(x, z, \Delta) + F_{21}(x, z, \Delta)F_{12}(x, y, \Delta); \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} F_{11}(x, y, \Delta) &= \frac{1}{8}(x_{12} - y^2)^2(4 - x_{12}^2 - y^2)/(x_{12}^2 + y^2); \\ F_{12}(x, y, \Delta) &= x_{12}^2 + y^2(4 - x_{12}^2 - y^2)/(x_{12}^2 + y^2); \\ F_{21}(x, z, \Delta) &= \frac{1}{8}(x_{34}^2 - z^2)^2(4 - x_{34}^2 - z^2)/(x_{34}^2 + z^2); \\ F_{22}(x, z, \Delta) &= x_{34}^2 + z^2(4 - x_{34}^2 - z^2)/(x_{34}^2 + z^2); \end{aligned}$$

$$x_{12} = \frac{1}{2}(x - \Delta), \quad x_{34} = \frac{1}{2}(x - \Delta).$$

Оптимальному значению разности соответствует максимум выражения (5.34).

В частных случаях зависимость  $\Delta$  от кинетического момента может быть найдена в явном виде. Рассмотрим случай, когда  $y = z = 0$  и кинетический момент изменяется вдоль оси  $Ox$ . При  $y = z = 0$  получим из (5.34)

$$F(x, \Delta) = F_{11}(x, \Delta)F_{22}(x, \Delta) + F_{11}(x, \Delta)F_{21}(x, \Delta);$$

$$\begin{aligned} F_{11}(x, \Delta) &= 1/8 x_{12}^2(4 - x_{12}^2); \\ F_{12}(x, \Delta) &= x_{12}^2; \\ F_{21}(x, \Delta) &= 1/8 x_{34}^2(4 - x_{34}^2); \\ F_{22}(x, \Delta) &= x_{34}^2 \end{aligned}$$

или

$$F(x, \Delta) = 1/8 x_{12}^2 x_{34}^2 (8 - x_{12}^2 - x_{34}^2). \quad (5.35)$$

Представим (5.35) в виде полинома от разности  $\Delta$

$$F(x, \Delta) = 1/256 [-\Delta^6 + (x^2 + 16)\Delta^4 + x^2(x^2 - 32)\Delta^2 + x^4(16 - x^2)]. \quad (5.36)$$

Определим значения разности  $\Delta \geq 0$ , обеспечивающие экстремум функции (5.36). Для этого частную производную

$$\partial F(x, \Delta) / \partial \Delta = 1/128 \Delta [-3\Delta^4 + 2(x^2 + 16)\Delta^2 + x^2(x^2 - 32)]$$

приравняем нулю.

Подставляя найденные значения разностей

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 0; \\ \Delta_2 &= [1/3 (32 - x^2)]^{1/2}; \\ \Delta_3 &= x \end{aligned}$$

в (5.36), найдём экстремальные значения определителя Грама как функции кинетического момента  $x$ :

$$F_1(x) = 1/256 x^4(16 - x^2); \quad F_2(x) = 1/216 (8 - x^2)^3; \quad F_3(x) = 0.$$

Оптимальная разность, при которой определитель Грама максимален, принимает значения  $\Delta_1$  или  $\Delta_2$ :

$$\Delta(x) = \begin{cases} \Delta_2, F_2 \geq F_1 \\ \Delta_1, F_2 \leq F_1 \end{cases}. \quad (5.37)$$

Пусть кинетический момент ГСС нарастает вдоль оси  $Ox$  от нуля до границы области  $S$  ( $x = 4$ ). Функция  $F_1(x)$ , равная вначале нулю, возрастает, достигает максимума  $F_{1\max} = 64/27$  в точке  $x = \sqrt{32/3}$  и снова обращается в нуль при насыщении ГСС ( $x = 4$ ). Функция  $F_2(x)$  имеет максимум  $F_{2\max} = 64/27$  при  $x = 0$ , затем уменьшается и обращается в нуль при  $x = 2\sqrt{2}$ .

Определим  $x$ , при котором осуществляется переход от разности  $\Delta_2$  к  $\Delta_1 = 0$ . Для этого воспользуемся условием  $F_1(x) = F_2(x)$ .

Точка перехода находится решением алгебраического уравнения

$$5x^6 - 336x^4 + 6144x^2 - 16384 = 0.$$

Условием задачи удовлетворяет решение  $x \approx 1,79$ . С учётом (5.37) оптимальная разность может быть представлена как функция кинетического момента  $x$ :

$$\Delta(x) = \begin{cases} \sqrt{(32-x^2)/3} & x \leq 1,79; \\ 0 & x \geq 1,79. \end{cases} \quad (5.38)$$

В точке перехода  $x \approx 3,1$ ,  $F_1 = F_2 \approx 0,51$ .

Исследуемые функции (5.38) и  $F(x)$  изображены на рис. 5.54.

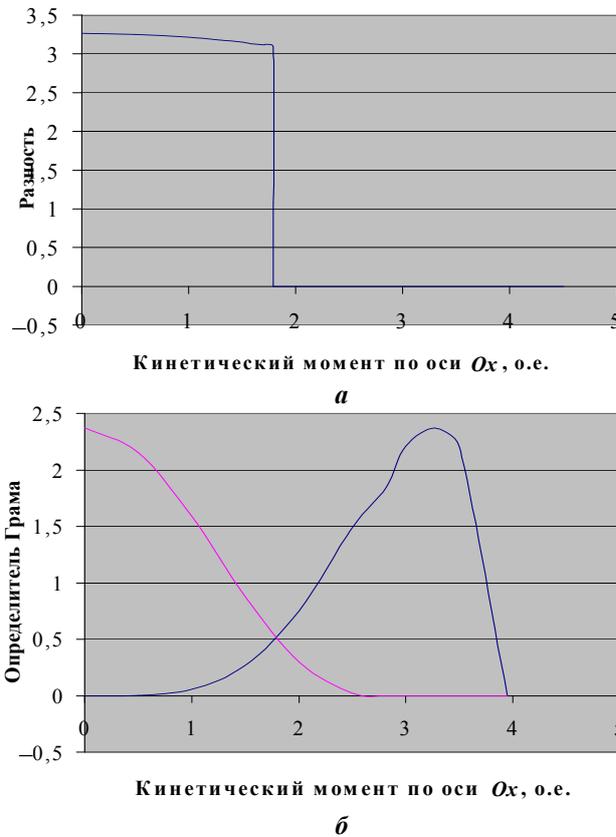


Рис. 5.54. Оптимальная разность  $\Delta$  (а) и определитель Грама (б)

Следует отметить, что оптимальная разность является разрывной функцией кинетического момента.

Область  $W$  изменения вектора управляющего момента минимально избыточной ГСС имеет форму выпуклого 12-гранника (см. рис. 5.39) [28, 30, 39]. Форма области  $W$  определяется вектором состояния  $\beta$ , а её размеры пропорциональны кинетическому моменту гироскопа  $G$  и максимальной скорости прецессии  $\lambda_*$ .

В процессе работы ГСС форма области  $W$  непрерывно изменяется. В особых состояниях область  $W$  вырождается в плоскую фигуру [30, 39].

Поверхность области  $W$  состоит из ромбов с длиной сторон  $l = 2G\lambda_*$ . Примем  $G = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ ,  $\lambda_* = 0,2 \text{ с}^{-1}$ . Полагаем для определенности, что в исходном состоянии векторы  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  находятся в правой полуплоскости ( $x_{12} > 0$ ), а векторы  $\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$  слева от плоскости  $Oyz$  ( $x_{34} < 0$ ). Рёбра 1, 2 12-гранника параллельны векторам  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ , а рёбра 3, 4 – векторам  $\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4$  (см. рис. 5.39).

Объём области  $W$  складывается из объёмов 12-ти пирамид, основаниями которых являются ромбы поверхности, а общая вершина расположена в центре симметрии.

С учётом центральной симметрии области  $W$  достаточно вычислить объёмы 6-ти пирамид. Ромбы – основания пирамид – образуются комбинацией пар векторов  $\mathbf{m}_i$ , а высоты равны расстояниям от центра симметрии до граней и вычисляются как полусуммы проекций на нормали к граням двух других векторов  $\mathbf{m}_i$ , не образующих граней.

Вычислим объём пирамиды, основанием которой служит ромб площадью  $S_1 = l|\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1|$ , построенный на рёбрах 1, 2. Единичный вектор, нормальный грани, обозначим  $\mathbf{e}_1 = (\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1)/|\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1|$ .

Высота пирамиды равна  $h_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_4)\mathbf{e}_1$ . Объём пирамиды с учётом  $l = 2$  находится по формуле

$$V_1 = \frac{1}{3} S_1 h_1 = \frac{2}{3} (\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1)(\mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_4).$$

Вычисляя аналогично объёмы остальных пирамид, получим объём области  $W$

$$V = 2 \sum_{j=1}^6 V_j = \frac{4}{3} [(\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1)(\mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_4) + (\mathbf{m}_3 \times \mathbf{m}_4)(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) + (\mathbf{m}_3 \times \mathbf{m}_2)(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_4) + (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_4)(\mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3) + (\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_4)(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_3) + (\mathbf{m}_3 \times \mathbf{m}_1)(\mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_4)]. \quad (5.39)$$

Из формулы (5.39), преобразованной к виду

$$V = 4[\mathbf{m}_3(\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1) + \mathbf{m}_4(\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1) + \mathbf{m}_1(\mathbf{m}_3 \times \mathbf{m}_4) + \mathbf{m}_2(\mathbf{m}_3 \times \mathbf{m}_4)],$$

следует, что объём области  $W$  равен полусумме объёмов четырёх параллелепипедов, построенных на рёбрах 12-гранника. С другой стороны

$$V = 4[(\mathbf{m}_2 \times \mathbf{m}_1)(\mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_4) + (\mathbf{m}_3 \times \mathbf{m}_4)(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2)], \quad (5.40)$$

т. е. объём области  $W$  равен сумме объёмов двух параллелепипедов: их основаниями являются грани, параллельные парам векторов  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$  и  $\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4$ , а высота каждого равна диагонали основания другого параллелепипеда.

Рассмотрим задачу нахождения оптимальной разности  $\Delta = \Delta(x, y, z)$  из условия  $V = \max$ .

Раскрывая равенство (5.40), получим

$$V = 4 [(x_1 y_2 - x_2 y_1)(x_3 + x_4) + (x_3 z_4 - x_4 z_3)(x_1 + x_2)]. \quad (5.41)$$

Чтобы представить объём  $V$  в функции кинетических моментов ГСС и разности  $\Delta$ , воспользуемся подстановкой соотношений (5.31) в (5.41):

$$\begin{aligned} V(x, y, z, \Delta) &= S_{12}(x, y, \Delta)h_{34}(x, \Delta) + S_{34}(x, z, \Delta)h_{12}(x, \Delta); \quad (5.42) \\ S_{12}(x, y, \Delta) &= 4(y^2 - x_{12}^2)[(4 - x_{12}^2 - y^2)/(x_{12}^2 + y^2)]^{1/2}; \\ S_{34}(x, y, \Delta) &= 4(z^2 - x_{34}^2)[(4 - x_{34}^2 - z^2)/(x_{34}^2 + z^2)]^{1/2}; \\ h_{12}(x, \Delta) &= 2x_{12} = x + \Delta; \\ h_{34}(x, \Delta) &= 2x_{34} = x - \Delta. \end{aligned}$$

Оптимальная разность находится из условия максимума выражения (5.42).

В частных случаях зависимость  $\Delta$  от кинетического момента может быть найдена в явном виде.

Рассмотрим случай, когда  $y = z = 0$  и кинетический момент изменяется вдоль оси  $Ox$ . При  $y = z = 0$  получим из (5.42)

$$V(x, \Delta) = -4x_{12}x_{34}(\sqrt{4 - x_{12}^2} + \sqrt{4 - x_{34}^2}). \quad (5.43)$$

Определим значения разностей  $\Delta \geq 0$ , обеспечивающих экстремумы выражения (5.43). Для этого частную производную

$$\begin{aligned} \partial V(x, \Delta) / \partial \Delta &= 2(b_1 + b_2) + (x^2 - \Delta^2)[(x + \Delta)/b_1 - (x - \Delta)/b_2]; \\ b_1 &= [16 - (x + \Delta)^2]^{1/2}, \quad b_2 = [16 - (x - \Delta)^2]^{1/2} \end{aligned}$$

приравняем нулю.

Оптимальная разность  $\Delta$  находится из условия

$$[2b_1^2 + (x^2 - \Delta^2)(x + \Delta)]^2 b_2^2 = [2b_2^2 \Delta - (x^2 - \Delta^2)(x - \Delta)]^2 b_1^2. \quad (5.44)$$

Раскрывая соотношение (5.44), найдём что  $\Delta_1 = 0$  или является решением уравнения

$$3\Delta^6 - (7x^2 + 104)\Delta^4 + (5x^4 - 48x^2 + 768)\Delta^2 - x^6 + 24x^4 - 256x^2 = 0. \quad (5.45)$$

Обозначим через  $\Delta_2(x)$  решение уравнения (5.45). В частности, при  $x = 0$  уравнение принимает вид

$$3\Delta^4 - 104\Delta^2 + 768 = 0.$$

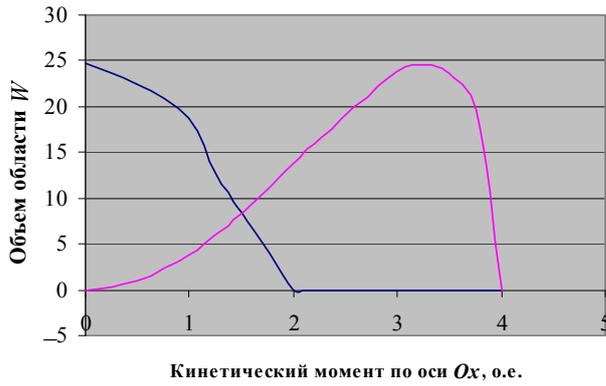
Условиям задачи удовлетворяет решение  $\Delta_2(0) = 4\sqrt{2/3}$ , которое совпадает с оптимальной разностью, полученной при использовании определителя Грама.

Подставляя  $\Delta_1 = 0$  и  $\Delta_2$  в (5.42), найдём экстремальные значения функций  $V_1$  и  $V_2$ .

При  $\Delta_1 = 0$   $V_1 = 2x^2\sqrt{16-x^2}$ . Если  $x$  увеличивается, эта функция, равная нулю при нулевом кинетическом моменте, возрастает, достигает максимума  $V_{1\max} = 128/(3\sqrt{3})$  при  $x = 4\sqrt{2/3}$  и снова обращается в нуль в состоянии насыщения ГСС ( $x = 4$ ). Функция  $V_2$  принимает максимальное значение  $V_{2\max} = 128/(3\sqrt{3})$  в исходном состоянии ( $x = 0$ ), затем убывает и обращается в нуль при  $x = \Delta_2$ . Подставив последнее равенство в уравнение (5.45), получим значение кинетического момента  $x = 2$ , при котором  $V_2$  обращается в нуль.



а



б

Рис. 5.55. Оптимальная разность  $\Delta(a)$  и объем области  $W(b)$

ставляет  $x \sim 1,5$ . Оптимальная разность  $\Delta$ , объёмы  $V_1$  и  $V_2$  как функции кинетического момента по оси  $Ox$  изображены на рис. 5.55. Оптимальная разность, как видно из графика  $\Delta = \Delta(x)$ , является разрывной функцией.

Оптимальная разность позволяет сформировать функцию управления, входящую в уравнение настройки [40, 42]. После этого требуемые скорости пре-

В точках максимума функций  $V_1$  и  $V_2$  область  $W$  принимает форму ромбододекаэдра, у которого все грани одинаковы и острый угол при вершинах всех ромбов  $\alpha = 2\arcsin 1/\sqrt{3} \sim 70,5$  град.

Оптимальная разность, обеспечивающая максимальный объём области  $W$  изменения вектора управляющего момента ГСС, принимает значения  $\Delta_1$  или  $\Delta_2$ :

$$\Delta(x) = \begin{cases} \Delta_2, V_2 \geq V_1; \\ 0, V_2 \leq V_1. \end{cases}$$

Кинетический момент, при котором осуществляется переход от разности  $\Delta_2$  к  $\Delta_1$  определяется из условия  $V_1(x) = V_2(x)$  и составляет

цессии находятся решением двух систем алгебраических уравнений с переменными коэффициентами [28]. Искомые скорости прецессии содержат две составляющие: одна реализует вектор управления космическим аппаратом, другая осуществляет настройку ГСС на заданный критерий оптимальности.

### 5.8. ПРОГРАММНЫЕ ПОВОРОТЫ

Рассмотрим программные повороты космического аппарата вокруг оси  $Ox$  при помощи типовой пары гироудинов с параллельными осями прецессии (рис. 5.56).

В исходном состоянии, когда кинетический момент системы равен нулю, кинетические моменты гироудинов направлены друг против друга (рис. 5.57, *a*).

Чтобы повернуть космический аппарат вокруг оси  $Ox$  против часовой стрелки, нужно создать приращение кинетического момента инерционных вращающихся масс вдоль оси  $-Ox$  (рис. 5.57, *б*):

$$H_x = G (\cos \beta_1 + \cos \beta_2),$$

где  $G$  – кинетический момент одного гироудина.

С учетом симметрии в расположении гироудинов ( $\beta_2 = -\beta_1$ )

$$H_x = 2G \cos \beta_1.$$

В соответствии с законом сохранения момента количества движения такое же приращение кинетического момента, но противоположное по знаку, получит корпус космического аппарата:  $K = -H_x$ . Так как  $K = I\omega$ , то

$$I\omega = -2G \cos \beta_1,$$

где  $I$  – момент инерции космического аппарата вокруг оси  $Ox$ .

Космический аппарат начнет вращаться с угловой скоростью

$$\omega = -2(G/I)\cos\beta_1. \quad (5.46)$$

Чтобы разогнать космический аппарат до заданной программной скорости  $\omega_n$ , нужно повернуть роторы гироудинов на программный угол

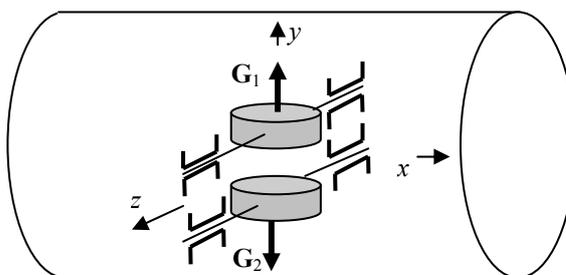


Рис. 5.56. Типовая пара гироудинов на космическом аппарате

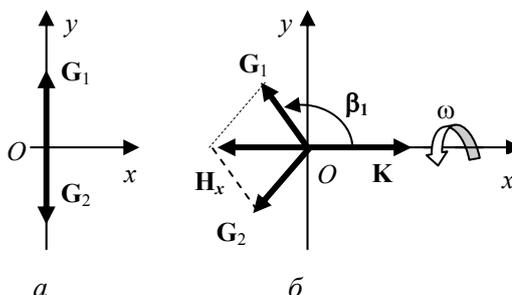


Рис. 5.57. Векторы кинетических моментов гироудинов в исходном состоянии (*a*) и после поворота гироузлов (*б*)

$$\beta_n = \arccos(-I\omega_n/2G).$$

Изменение угловой скорости космического аппарата от нуля до  $\omega_n$  вызывает приращение его кинетической энергии от нуля до

$$T = 1/2 I\omega_n^2.$$

Если бы существовала возможность непосредственного превращения электрической энергии солнечных батарей в кинетическую энергию вращения космического аппарата, то затраты электрической энергии на разгон космического аппарата до заданной скорости  $\omega_n$  составили бы  $T$ .

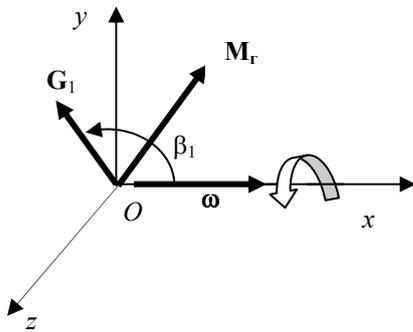
Поскольку

$$\omega_n = -2(G/I)\cos\beta_n,$$

то

$$T = 2(G^2/I)\cos^2\beta_n.$$

При вращении космического аппарата с угловой скоростью  $\omega$  возникают гироскопические моменты, действующие на роторы гиродинов. Для первого гиродина (рис. 5.58):



$$\mathbf{M}_Г = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}_1.$$

Гироскопический момент направлен по оси прецессии, препятствуя повороту гиروزла приводом прецессии:

$$M_{Гz} = -G\omega \sin \beta_1.$$

После подстановки (5.46)

$$M_{Гz} = (G^2/I) \sin 2\beta_1.$$

Рис. 5.58. Гироскопический момент

Чтобы повернуть гиروزлы двух гиродинов на программный угол прецессии  $\beta_n$ , приводы прецессии за время разгона космического аппарата  $t_1$  до заданной программной скорости  $\omega_n$  должны совершить работу, которая вычисляется как удвоенный определенный интеграл от  $\beta_1(0) = 1/2\pi$  до  $\beta_1(t_1) = \beta_n$ :

$$A = 2 \int_{\pi/2}^{\beta_n} M_{Гz}(\beta_1) d\beta_1.$$

После вычисления определенного интеграла и тригонометрических преобразований получим

$$A = 2(G^2/I)\cos^2\beta_n.$$

Это означает, что затраты электроэнергии в гиродинах (без учета потерь на трение) равны приращению кинетической энергии космического аппарата за время разгона до заданной скорости. Общие затраты электроэнергии со-

ставят  $T + A$ . Отношение общих затрат электроэнергии к полезным (на изменение кинетической энергии космического аппарата)

$$n = (T + A)/T$$

в гиросиловой системе равно двум. В маховичных системах это отношение зависит от момента инерции  $I$  космического аппарата и момента инерции  $I_M$  электродвигателя-маховика

$$n = 1 + I/I_M$$

и может быть велико. Поэтому с ростом моментов инерции космических аппаратов эффективность применения силовых гироскопов по сравнению с электродвигателями-маховиками возрастает. Отношение  $n = 2$  достижимо в маховичной системе при  $I_M = I$ , т. е. использование гиродинов эквивалентно установке электродвигателя-маховика с моментом инерции, равным моменту инерции космического аппарата. Достоинство гиросиловых систем состоит в том, что их энергопотребление слабо зависит от моментов инерции космического аппарата.

Установим связь между углом  $\varphi_n$  и временем  $t_n$  программного поворота космического аппарата. Полагаем, что скорость прецессии гиродинов на участке разгона максимальна и равна  $\lambda_*$ , а время торможения равно времени разгона. Максимальное время разгона  $t_1 = \frac{1}{2}\pi/\lambda_*$  соответствует повороту гироузла первого гироина на угол  $\frac{1}{2}\pi$ . Осциллограммы программного поворота для переменных  $\lambda_1(t)$ ,  $\beta_1(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $\varphi(t)$  изображены на рис. 5.59.

Проинтегрируем уравнения движения на интервале времени  $0 \div t_1 \leq \frac{1}{2}\pi/\lambda_*$  (участок разгона космического аппарата).

Изменение угла прецессии первого гироина:

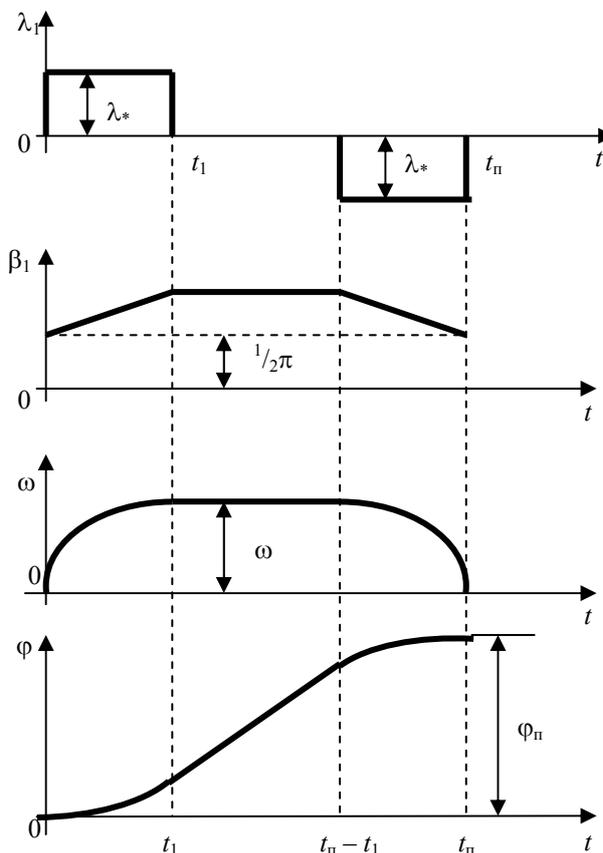


Рис. 5.59. Программный поворот

$$\beta_1(t) = \frac{1}{2}\pi + \int_0^t \lambda(t) dt = \frac{1}{2}\pi + \lambda_* t.$$

Изменение угловой скорости космического аппарата:

$$\omega(t) = -2(G/I)\cos\beta(t) = -2(G/I)\cos(\frac{1}{2}\pi + \lambda_* t) = 2(G/I)\sin \lambda_* t.$$

Изменение угла поворота:

$$\varphi(t) = \int_0^t \omega(t) dt = 2(G/I) \int_0^t \sin \lambda_* t dt = 2(G/I\lambda_*)(1 - \cos\lambda_* t).$$

В момент времени  $t_1$  (окончание разгона)

$$\beta_1(t_1) = \frac{1}{2}\pi + \lambda_* t_1; \omega(t_1) = \omega_n = 2(G/I)\sin \lambda_* t_1; \varphi(t_1) = 2(G/I\lambda_*)(1 - \cos\lambda_* t_1).$$

Согласно осциллограмме для  $\varphi(t)$  программный угол вычисляется по формуле

$$\varphi_n = 2\varphi(t_1) + \omega_n (t_n - 2t_1).$$

При максимальном времени разгона ( $t_1 = \frac{1}{2}\pi/\lambda_*$ )

$$\beta_1(t_1) = \pi; \omega_n = 2(G/I); \varphi(t_1) = 2(G/I\lambda_*);$$

$$\varphi_n = 4(G/I\lambda_*) + 2(G/I)(t_n - \pi/\lambda_*) = 4(G/I\lambda_*)(1 + \frac{1}{2} t_n \lambda_* - \frac{1}{2} \pi).$$

Взаимное положение роторов гиродинов во время программного поворота изображено на рис. 5.60.

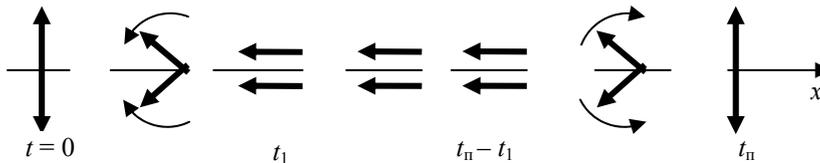


Рис. 5.60. Взаимное положение роторов гиродинов

Время поворота на программный угол  $\varphi_n$

$$t_n = I\varphi_n/2G + (\pi - 2)/\lambda_*$$

зависит от кинетического момента гиродинов  $G$  и максимальной скорости прецессии  $\lambda_*$ . Уменьшению времени поворотов на большие углы способствует главным образом увеличение кинетического момента гиродинов.

## 5.9. ВЫБОР ОСНОВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГИРОДИНА

Основными характеристиками гиродина как исполнительного органа, определяющими его массу и энергопотребление, являются кинетический момент  $G$  и максимальный управляющий момент (максимальная скорость прецессии  $\lambda$ ).

Поставим задачу определения величин  $G$  и  $\lambda$ , обеспечивающих плоские повороты космического аппарата вокруг оси  $Ox$  на программный угол  $\varphi_n$  за требуемое время  $T$  при помощи системы четырех гиродинов (см. рис. 5.1).

В исходном состоянии гиросиловой системы векторы кинетических моментов гиродинов  $\mathbf{G}_1$  и  $\mathbf{G}_2$  отклонены от оси  $Ox$  на углы  $\alpha$  и  $-\alpha$ , а векторы  $\mathbf{G}_3$  и  $\mathbf{G}_4$  на углы  $\pi - \alpha$  и  $-(\pi - \alpha)$ , где  $\alpha$  – угол начальной установки роторов. Вектор кинетического момента гиросиловой системы в исходном состоянии равен нулю.

Текущее положение векторов  $\mathbf{G}_i$  относительно корпуса космического аппарата определяется углами прецессии  $\beta_i$ , которые отсчитываются от оси  $Ox$  (см. рис. 5.48). Вдоль оси программного поворота  $Ox$  гиросиловая система создает кинетический момент

$$H_x = G(\cos\beta_1 + \cos\beta_2 + \cos\beta_3 + \cos\beta_4).$$

Скорости прецессии гиродинов могут изменяться в диапазоне:  $-\lambda \leq \beta_i' \leq \lambda$ .

Рассмотрим следующую программу изменения скоростей прецессии гиродинов. Пусть все роторы гиродинов прецессируют из исходного состояния с максимальными скоростями, равными

$$\beta_2' = -\beta_1' = \beta_4' = -\beta_3' = \lambda.$$

Векторы  $\mathbf{G}_1$  и  $\mathbf{G}_2$  (соответственно  $\mathbf{G}_3$  и  $\mathbf{G}_4$ ) вращаются в противоположных направлениях. В момент времени  $t = \alpha/\lambda$ , когда векторы  $\mathbf{G}_1$  и  $\mathbf{G}_2$  достигают оси  $Ox$ , полагаем  $\beta_2' = \beta_1' = 0$ , в момент времени  $t = (\pi - \alpha)/\lambda$ , когда векторы  $\mathbf{G}_3$  и  $\mathbf{G}_4$  достигают оси  $Ox$ , полагаем  $\beta_3' = \beta_4' = 0$ .

Приращение кинетического момента гиросиловой системы по оси  $Ox$  в процессе движения гиродинов составит

$$H_x(t) = \begin{cases} 2G[\cos(\alpha - \lambda t) - \cos(\alpha + \lambda t)], & \lambda t \leq \alpha; \\ 2G[1 - \cos(\alpha + \lambda t)], & \alpha < \lambda t < \pi - \alpha; \\ 4g, & \lambda t \geq \pi - \alpha. \end{cases} \quad (5.47)$$

Скорость изменения кинетического момента вдоль оси  $Ox$ :

$$H_x'(t) = \begin{cases} 2G\lambda[\sin(\alpha - \lambda t) - \sin(\alpha + \lambda t)], & \lambda t \leq \alpha; \\ 2G\lambda \sin(\alpha + \lambda t), & \alpha < \lambda t < \pi - \alpha; \\ 0, & \lambda t \geq \pi - \alpha. \end{cases} \quad (5.48)$$

Исключая из выражений (5.47) и (5.48) время  $t$  как параметр, получим моментную характеристику гиросиловой системы в относительных единицах

$$\begin{aligned} m_x^2 + x^2 &= 16 \sin^2 \alpha, & \lambda t < \alpha; \\ m_x^2 + (x - 2)^2 &= 4, & \alpha \leq \lambda t \leq \pi - \alpha, \end{aligned}$$

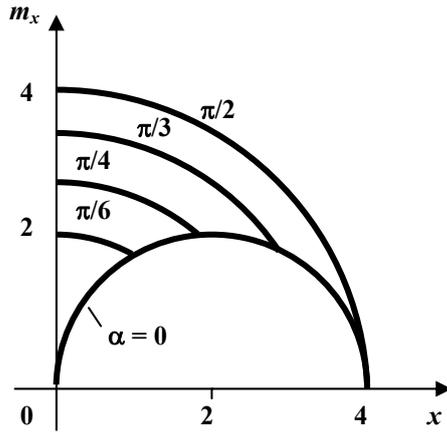


Рис. 5.61. Моментная характеристика

где  $x = H_x/G$  – кинетический момент гиросиловой системы, выраженный в долях от кинетического момента гиродина,  $m_x = x'/\lambda$  – управляющий момент гиросиловой системы (с точностью до знака), выраженный в долях от максимального управляющего момента гиродина.

Первое выражение представляет окружность с центром в начале координат и радиусом  $4\sin\alpha$ , второе – окружность с центром в точке  $x = 2$  и радиусом, равным двум. Результирующая моментная характеристика состоит из дуг этих окружностей, пересекающихся в точке с координатами  $x = 4\sin^2\alpha$ ,  $m_x = 2\sin 2\alpha$  (рис. 5.61).

Плоское вращение космического аппарата с моментом инерции  $I$  вокруг оси  $Ox$  описывается уравнением

$$I\varphi' = -H_x.$$

Закон изменения угловой скорости  $\varphi'$  космического аппарата определяют скорости прецессии гиродинов. Пусть они изменяются по следующей программе

$$\beta_1' = -\beta_2' = \begin{cases} \lambda, \lambda t \leq \pi - \alpha; \\ 0, \lambda t \geq \pi - \alpha, \end{cases}$$

$$\beta_3' = -\beta_4' = \begin{cases} \lambda, \lambda t \leq \alpha; \\ 0, \lambda t \geq \alpha. \end{cases}$$

Тогда угловая скорость космического аппарата будет возрастать по закону

$$\varphi' = \begin{cases} 2\omega [\cos(\alpha - \lambda t) - \cos(\alpha + \lambda t)], \lambda t \leq \alpha; \\ 2\omega [1 - \cos(\alpha + \lambda t)], \alpha < \lambda t < \pi - \alpha, \end{cases} \quad (5.49)$$

где  $\omega = G/I$  – приращение угловой скорости космического аппарата при изменении его кинетического момента на величину, равную кинетическому моменту одного гиродина.

Изменение угловой скорости космического аппарата в процессе разгона при углах  $\alpha$ , равных  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $0^\circ$ , изображено на рис. 5.62. Угловая скорость и время измеряются в относительных единицах ( $\varphi'/\omega$  и  $\lambda t$ , град). Левая кривая соответствует углу  $\alpha = 90^\circ$ , правая – углу  $\alpha = 0^\circ$ .

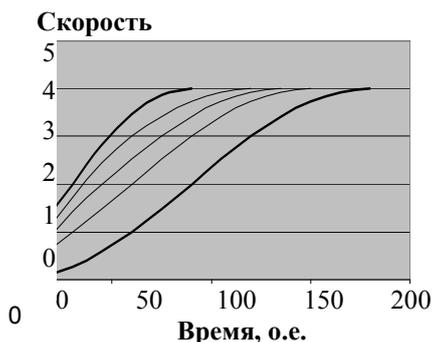


Рис. 5.62. Скорость космического аппарата во время разгона

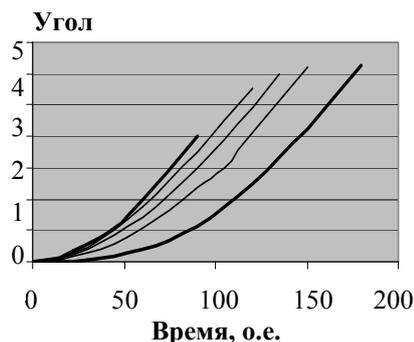


Рис. 5.63. Угол поворота космического аппарата во время разгона

В момент времени  $t = (\pi - \alpha)/\lambda$  разгон космического аппарата заканчивается, после чего его вращение происходит с постоянной скоростью

$$\varphi' = 4\omega. \quad (5.50)$$

Интегрируя соотношения (5.49) и (5.50), получим закон изменения во времени угла поворота космического аппарата

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2\omega[\sin \alpha - \sin(\alpha + \lambda t) - \sin(\alpha + \lambda t)]/\lambda, & \lambda t \leq \alpha; \\ 2\omega[2\sin \alpha - \alpha + \lambda t - \sin(\alpha + \lambda t)]/\lambda, & \alpha < \lambda t < \pi - \alpha; \\ 2\omega(2\sin \alpha - \pi + 2\lambda t)/\lambda, & \lambda t \geq \pi - \alpha. \end{cases} \quad (5.51)$$

Изменение угла поворота космического аппарата в процессе разгона при углах  $\alpha$ , равных  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $0^\circ$ , изображено на рис. 5.63. Угол поворота и время измеряются в относительных единицах ( $\varphi\lambda'/\omega$  и  $\lambda t$ , град). Левая кривая соответствует углу  $\alpha = 90^\circ$ , правая – углу  $\alpha = 0^\circ$ . За время  $t = (\pi - \alpha)/\lambda$ , в течение которого происходит разгон, космический аппарат поворачивается на угол

$$\varphi(t) = 2\omega[2\sin \alpha + \pi - 2\alpha]/\lambda, \quad \lambda t \geq \pi - \alpha.$$

В процессе поворота космического аппарата на программный угол можно выделить три этапа: разгон, вращение с постоянной скоростью, торможение. При поворотах на небольшие углы второй этап может отсутствовать. Полагая, что временные зависимости  $\varphi'(t)$  и  $\varphi(t)$ , характеризующие разгон и торможение космического аппарата, симметричны. Это означает, что разгон и торможение осуществляются за одинаковое время, в течение которого космический аппарат поворачивается на одинаковые углы. Пусть  $T$  – время поворота космического аппарата на программный угол  $\varphi_n$ . Заменяя в (5.51) текущее время на  $T$ , найдем зависимость между программным углом и временем поворота

$$\varphi_n = 2\varphi(\frac{1}{2}T) = \begin{cases} 4\omega[2\sin \alpha - \sin(\alpha - \frac{1}{2}T\lambda) - \sin(\alpha + \frac{1}{2}T\lambda)]/\lambda, & \lambda T \leq 2\alpha; \\ 4\omega[2\sin \alpha - \alpha + \frac{1}{2}T\lambda - \sin(\alpha + \frac{1}{2}T\lambda)]/\lambda, & 2\alpha < \lambda T < 2(\pi - \alpha); \\ 4\omega(2\sin \alpha - \pi + \lambda T)/\lambda, & \lambda T \geq 2(\pi - \alpha). \end{cases} \quad (5.52)$$

Если время поворота  $T$  и угол поворота  $\varphi_n$  заданы, то из (5.52) получим зависимость между величиной кинетического момента в относительных единицах  $\omega$  и максимальной скоростью прецессии

$$\omega = \begin{cases} \frac{1}{4} \varphi_n \lambda [2 \sin \alpha - \sin(\alpha + \frac{1}{2} T \lambda) - \sin(\alpha - \frac{1}{2} T \lambda)]^{-1}, & \lambda T \leq 2\alpha; \\ \frac{1}{4} \varphi_n \lambda [2 \sin \alpha - \alpha + \frac{1}{2} T \lambda - \sin(\alpha + \frac{1}{2} T \lambda)]^{-1}, & 2\alpha < \lambda T < 2(\pi - \alpha); \\ \frac{1}{4} \varphi_n \lambda (2 \sin \alpha - \pi + \lambda T)^{-1}, & \lambda T \geq 2(\pi - \alpha). \end{cases} \quad (5.53)$$

Задача поворота космического аппарата на программный угол  $\varphi_n$  за требуемое время  $T$  может быть решена при помощи гиродинов с различными характеристиками  $\omega$  и  $\lambda$ . На плоскости этих параметров зависимость (5.53) позволяет выделить область допустимых значений  $\omega$  и  $\lambda$ . Выбор кинетического момента и максимальной скорости прецессии в допустимой области обеспечивает выполнение поворота на угол  $\varphi_n$  за время, меньшее заданного. С увеличением скорости прецессии требуемая величина кинетического момента гиродинов уменьшается, однако, как следует из последней зависимости (5.53), даже при  $\lambda \rightarrow \infty$  она не может быть меньше  $\frac{1}{4} I \varphi_n / T$ . В частном случае, когда для поворота космического аппарата вокруг оси  $Ox$  используются две одинаковые «спарки» гиродинов ( $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ), формулы (5.53) примут вид

$$\omega = \begin{cases} \frac{1}{8} \varphi_n \lambda (1 - \cos \frac{1}{2} T \lambda)^{-1}, & \lambda T \leq \pi; \\ \frac{1}{4} \varphi_n \lambda (2 - \pi + T \lambda)^{-1}, & \lambda T \geq \pi. \end{cases}$$

Изучение зависимостей  $\omega = \omega(\varphi_n, T, \lambda)$  [33] показывает, что для поворота на большие программные углы важен выбор кинетического момента гиродинов. При поворотах на малые углы возрастает роль скорости прецессии. Это объясняется тем, что процесс поворота на небольшой угол состоит только из участков разгона и торможения. Время разгона и торможения обратно пропорционально максимальной скорости прецессии. Процесс поворота на большой угол содержит участок вращения космического аппарата с постоянной скоростью. Угловая скорость космического аппарата на этом участке пропорциональна кинетическому моменту гиродина и не зависит от скорости прецессии. Выбор параметров гиродина в допустимой области обеспечивает выполнение всех заданных угловых маневров космического аппарата. Создавая большие управляющие моменты, необходимые для быстрых угловых маневров космического аппарата, гиродин должен создавать и малые моменты, необходимые для точной стабилизации. Это противоречивое требование. В реактивных системах подобное противоречие разрешается установкой разных типов реактивных двигателей: для программных поворотов используются двигатели большой тяги, для стабилизации – двигатели малой тяги. Аналогично решается проблема в мощных маховичных системах. Например, для быстрых программных поворотов орбитальной станции «Алмаз» применялся кольцевой двигатель-маховик диаметром 2,7 м, а для трехосной стабилизации станции – шаровой двигатель-маховик [20]. В гиродинах противоречие разрешается за счет стабилизации кинетического момента роторов и высокой кратности регулирования скорости прецессии. Кратность регулирования определяется как отношение максимальной и минимальной скоростей привода прецессии. В гиродинах эта величина достигает 500.

**РАЗГРУЗКА ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ  
СИСТЕМ ОРИЕНТАЦИИ ОТ НАКОПЛЕННОГО  
КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА**

- ◆ Реактивные системы разгрузки
- ◆ Магнитные системы разгрузки
  - ◆ Гравитационная разгрузка

По принципу действия электромеханические системы ориентации являются двухконтурными. Первый контур (исполнительные органы – двигатели-маховики, силовые гироскопы) управляет угловым положением космического аппарата. Второй контур, или система разгрузки, управляет кинетическим моментом электромеханической системы. Известны реактивные и магнитные системы разгрузки. Их исполнительными органами являются реактивные двигатели и электрические катушки.

Необходимость системы разгрузки связана с действием на космический аппарат внешних возмущающих моментов. Паряруя действие внешних возмущающих моментов, электромеханическая система постепенно насыщается по кинетическому моменту и теряет возможность создавать управляющий момент. Чтобы вернуть ее в рабочее состояние, необходимо уменьшить кинетический момент. Это возможно, если к космическому аппарату приложить искусственно создаваемый внешний момент  $M_p$ , который заведомо больше внешнего возмущающего момента  $M_b$  по величине и противоположен по знаку. Для создания внешнего момента разгрузки  $M_p$  могут использоваться реактивные двигатели и электрические катушки, взаимодействующие с магнитным полем Земли. Роль момента разгрузки  $M_p$  может быть возложена и на гравитационный момент. Регулирование гравитационного момента осуществляется за счет изменения ориентации космического аппарата. Под действием внешнего момента  $M_p$  кинетический момент электромеханической системы уменьшается. Когда он снизится до заданного уровня, действие момента  $M_p$  прекращается.

### 6.1. РЕАКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ РАЗГРУЗКИ

Для восстановления работоспособности электромеханической системы, достигшей границы области  $S$ , изменения кинетического момента и находящейся в состоянии насыщения, необходимо вернуть ее исполнительные органы (двигатели-маховики и силовые гироскопы-гиродины) в исходное состояние. Во время этого процесса космический аппарат подвержен действию внутренних возмущающих моментов. В реактивных системах компенсация внутренних возмущающих моментов осуществляется реактивными двигателями, создающими внешний момент разгрузки. Известны разомкнутые и замкнутые системы разгрузки и системы, реализующие принцип управления «по возмущению» [7].

Рассмотрим процесс разгрузки на примере маховичной системы, полагая, что все сказанное будет справедливо и для гиросиловых систем.

Движение космического аппарата с моментом инерции  $I$  под действием управляющего момента двигателя-маховика  $M = -dH/dt$  и внешнего возмущающего момента  $M_b$  описывается уравнением (4.1). В режиме идеальной стабилизации космического аппарата при  $M_b = \text{const}$  кинетический момент двигателя-маховика возрастает во времени

$$H = M_b t.$$

Скорость вращения двигателя-маховика непрерывно нарастает, пока не достигнет максимального значения, при котором управляющий момент падает до нуля.

Чтобы вернуть двигатель-маховик в рабочее состояние, необходимо уменьшить его кинетический момент. Это возможно, если в правую часть уравнения (4.1) добавить искусственно создаваемый реактивный момент  $M_p$ , знак которого противоположен знаку накопленного кинетического момента ( $\text{sign } M_p = -\text{sign } H$ ). Реактивные двигатели системы разгрузки включаются, когда кинетический момент двигателя-маховика превысит допустимый уровень  $H_p$ .

Функциональная схема разомкнутой системы разгрузки изображена на рис. 6.1.

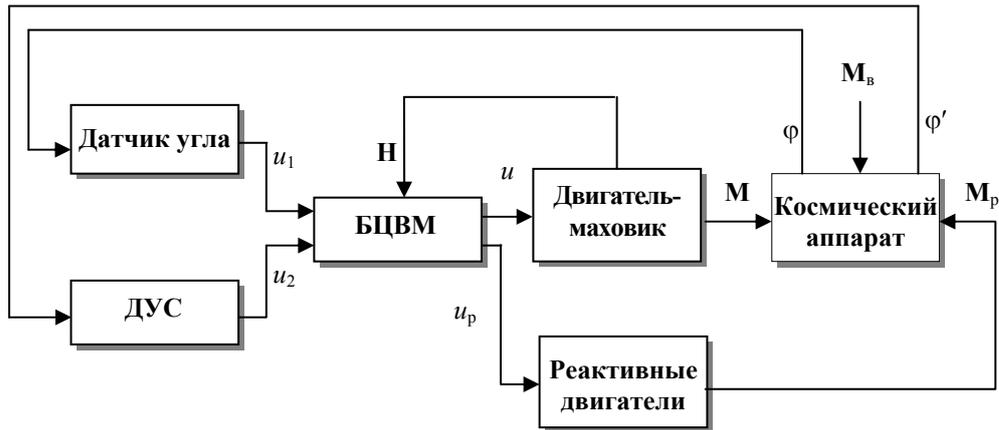


Рис. 6.1. Функциональная схема разомкнутой системы разгрузки

В режиме разгрузки движение космического аппарата происходит согласно уравнению

$$I \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{dH}{dt} + M_b - M_p \text{sign} H.$$

Под действием момента реактивных двигателей  $M_p$  происходит «сброс» (уменьшение) кинетического момента двигателя-маховика

$$H = H_p + M_b t - M_p t \text{sign} H$$

(за начало отсчета времени выбран момент включения реактивных двигателей). Когда кинетический момент снизится до заданного уровня  $H_0$ , действие момента  $M_p$  прекращается.

Естественно, что момент реактивных двигателей должен быть больше возмущающего момента. С другой стороны он должен быть меньше управляющего момента двигателя-маховика. В противном случае при разгрузке будет возникать большая ошибка ориентации. Если момент реактивных дви-

гателей превышает момент двигателя-маховика, целесообразно применять импульсный режим работы реактивных двигателей [85].

Логичу включения и отключения реактивных двигателей можно изобразить в виде релейной схемы (рис. 6.2).

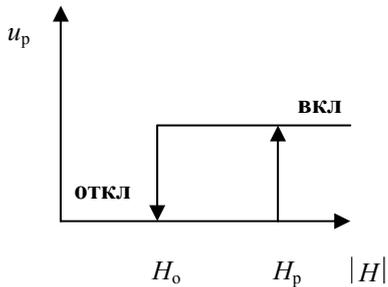


Рис. 6.2. Логика включения и отключения реактивных двигателей

Время разгрузки маховичной системы (время включенного состояния реактивных двигателей) определяется величиной накопленного кинетического момента основной системы и величиной момента реактивных двигателей:

$$t_p = (H_p - H_0)/M_p.$$

Замкнутая система разгрузки представляет собой самостоятельную

систему ориентации, исполнительными органами которой являются реактивные двигатели (рис. 6.3).

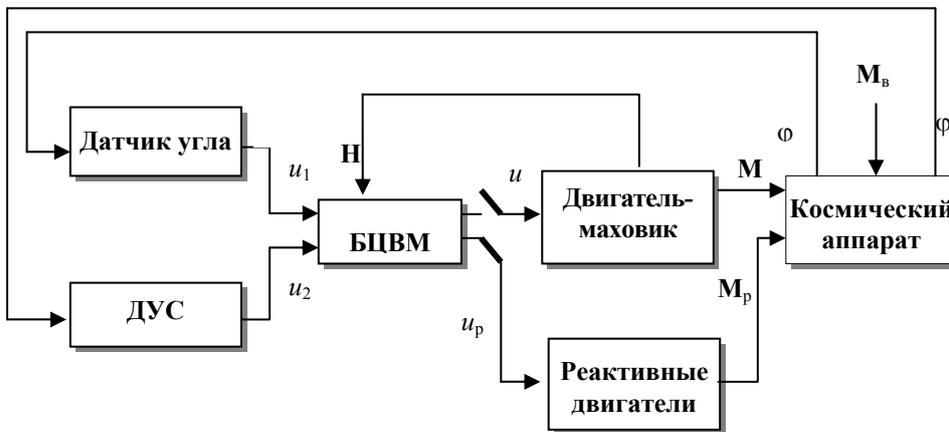


Рис. 6.3. Функциональная схема замкнутой системы разгрузки

Если кинетический момент двигателя-маховика превысит допустимый уровень, уровень разгрузки  $H_p$ , управление угловым положением передается реактивной системе, а двигатель-маховик принудительно тормозится. При торможении он создает внутренний возмущающий момент, действующий на космический аппарат и нарушающий его ориентацию. Этот момент парируется реактивной системой. Момент реактивных двигателей должен быть больше возмущающего момента, возникающего при торможении двигателя-маховика. Это требование легко выполняется.

Когда кинетический момент двигателя-маховика снизится до заданного уровня  $H_0$ , уровня отключения системы разгрузки, реактивные двигатели отключаются и управление вновь осуществляется маховичной системой.

Датчики основной системы работают и в режиме разгрузки. В случае отказа двигателя-маховика реактивная система может использоваться как основная. В этом достоинство замкнутой системы.

Если электромеханическая система используется только для стабилизации космического аппарата, то сигналом на включение системы разгрузки служит определенный уровень кинетического момента, накопленный двигателем-маховиком в результате действия на космический аппарат внешнего возмущающего момента. В режиме программных поворотов кинетический момент двигателя-маховика изменяется в широком диапазоне, превышающем уровень включения системы разгрузки. Чтобы во время программного поворота не происходило ложное включение системы разгрузки, в качестве сигнала на ее включение может использоваться уровень суммарного кинетического момента системы «космический аппарат – двигатель-маховик»:

$$k_c = I\omega + H(t).$$

Величину  $H(t)$  можно представить в виде

$$H(t) = H_c + \Delta H(t),$$

где  $H_c$  – кинетический момент двигателя-маховика в режиме стабилизации, накопленный к началу программного поворота;  $\Delta H(t)$  – изменение кинетического момента двигателя-маховика в процессе программного поворота. Если пренебречь действием внешнего возмущающего момента во время программного поворота, то

$$I\omega \cong -\Delta H(t) \text{ и } k_c \cong H_c.$$

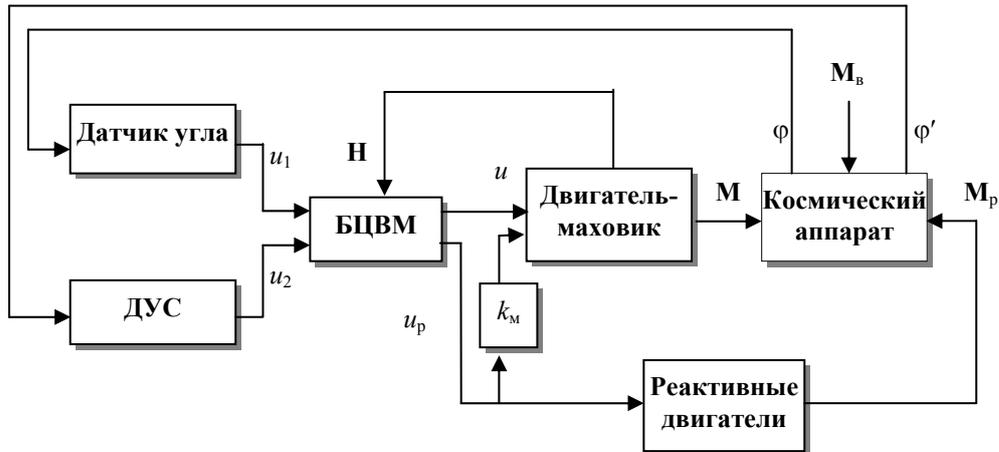
Для вычисления общего кинетического момента системы необходима информация об угловой скорости космического аппарата  $\varphi' = \omega$ , поступающая с датчика угловой скорости, и информация о скорости вращения маховика  $\Omega$ , поступающая с тахогенератора двигателя-маховика:

$$k_c = I\omega + I_m \Omega,$$

где  $I, I_m$  – моменты инерции космического аппарата и двигателя-маховика.

В режиме разгрузки из-за действия больших возмущающих моментов погрешность стабилизации возрастает. В разомкнутой системе это объясняется тем, что искусственный внешний момент реактивных двигателей системы разгрузки  $M_p$  значительно превышает внешние возмущающие моменты, действующие на космический аппарат в режиме стабилизации. В замкнутой системе управление при разгрузке передается более грубой реактивной системе, погрешность которой больше, чем у основной электромеханической системы.

Погрешность угловой стабилизации космического аппарата удастся снизить за счет применения принципа управления по возмущению. Функциональная схема системы разгрузки, реализующей такой принцип, изображена на рис. 6.4.



**Рис. 6.4.** Функциональная схема системы разгрузки, реализующей принцип управления по «возмущению»

Если кинетический момент двигателя-маховика, накопленный в режиме стабилизации, превышает заданный уровень  $H_p$ , то БЦВМ выдает сигнал на включение реактивных двигателей  $u_p$ . Одновременно пропорциональный сигнал  $k_M u_p$  подается в двигатель-маховик так, чтобы управляющие моменты реактивных двигателей и двигателя-маховика были одинаковы по величине, но противоположны по знаку. Результирующий момент, действующий на космический аппарат, будет равен нулю, однако двигатель-маховик тормозится. При таком способе разгрузки удастся минимизировать угловые отклонения космического аппарата, возникающие при включении реактивных двигателей. Реализация принципа управления по возмущению предъявляет высокие требования к разбросу параметров двигателя-маховика и реактивных двигателей, таким как величина управляющего момента и запаздывание при включении.

## 6.2. МАГНИТНЫЕ СИСТЕМЫ РАЗГРУЗКИ

### 6.2.1. Назначение и состав системы

Действующие на космический аппарат внешние возмущающие моменты могут возникать вследствие его взаимодействия с окружающими полями. Если удастся управлять таким взаимодействием, то внешний момент может быть использован для управления угловым положением космического аппарата. Подобный подход реализуется в магнитных системах разгрузки. Работа магнитных систем не связана с расходом реактивного топлива, а отсутствие под-

вижных частей делает их надежными и долговечными. Магнитные системы могут использоваться вместо реактивных систем для начального успокоения космического аппарата [60, 111].

В состав системы магнитной разгрузки входят магнитометр, магнитоприводы и периферийный адаптер.

Индукционные магнитометры основаны на явлении электромагнитной индукции – возникновении ЭДС в измерительной катушке при прохождении через её контур магнитного потока. Изменение магнитного потока связано с изменением магнитного сопротивления катушки. Это достигается периодическим изменением магнитной проницаемости сердечника. Он периодически намагничивается до насыщения вспомогательным переменным полем возбуждения.

Чувствительными элементами (первичными датчиками) магнитометра являются преобразователи геомагнитного поля ферроиндукционного типа [11, 60]. Первичный датчик содержит три феррозонда, которые ориентируются параллельно осям космического аппарата. Действие феррозонда основано на изменении магнитного состояния ферромагнетика под воздействием двух магнитных полей разных частот.

На фотографии (рис. 6.5) изображены два магнитометра. У правого магнитометра снят защитный кожух, видны три феррозонда, расположенные ортогонально.

Каждый феррозонд состоит из сердечника и четырех обмоток: возбуждения, сигнальной, компенсационной и калибровочной. Сердечник изготавливается из тонкой ленты пермаллоя.

Обмотка возбуждения используется для принудительного перемагничивания сердечника током возбуждения. Предположим, что ток возбуждения меняется по гармоническому закону. В отсутствие измеряемого магнитного поля сердечник будет перемагничиваться по симметричному циклу. Изменение магнитного потока, вызванное перемагничиванием сердечника по симметричной кривой, индуцирует в сигнальной обмотке ЭДС, изменяющуюся по гармоническому закону. Если одновременно на сердечник действует измеряемое магнитное поле, то кривая перемагничивания сердечника становится несимметричной. В сигнальной обмотке появляются сигналы, содержащие информацию об измеряемом поле. В частности, появляются чётные гармоники, амплитуда которых пропорциональна напряжённости измеряемого поля и которые отсутствуют при симметричном цикле перемагничивания. В блоке электроники нечётные гармоники могут быть отфильтрованы, а чётные усилены и использованы для измерения магнитной индукции.

Компенсационная обмотка необходима для реализации компенсационного метода измерения. Калибровочная обмотка обеспечивает проведение тестов и задание калибровочных сигналов.



Рис. 6.5. Магнитометры

Другим элементом магнитометра является электронный преобразователь (узел управления, генератор переменного тока возбуждения, преобразователь сигналов измерения, формирователь токов калибровки).

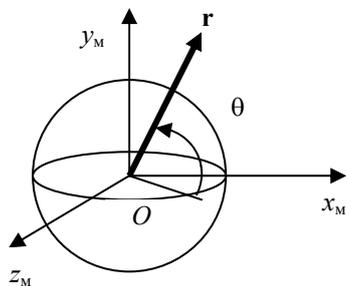
Понятие «магнитопривод» объединяет исполнительные электромагниты и электронные узлы формирования токов намагничивания. Основными параметрами электромагнитов стержневого типа являются номинальный магнитный момент, масса, длина и энергопотребление. Подробная методика расчета таких устройств предложена в [60]. Основным материалом сердечников является электротехническая сталь 10850.

Магнитопривод с сердечником длиной 0,8 м первых метеорологических космических аппаратов «Метеор» создавал магнитный момент  $560 \text{ А}\cdot\text{м}^2$ . Затем эта величина была снижена до  $400 \text{ А}\cdot\text{м}^2$ . При благоприятном расположении относительно вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  такие магнитоприводы способны развивать управляющий момент более  $0,01 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Магнитопривод с сердечником длиной 0,7 м и массой 1,3 кг малого космического аппарата создает магнитный момент  $100 \text{ А}\cdot\text{м}^2$ .

В периферийном адаптере реализуются алгоритмы управления магнитной системой. Он включен в сеть бортовой ЦВМ системы ориентации. Вычислительный узел периферийного адаптера представляет собой микро-ЭВМ, которая осуществляет вычисления, обмен информацией, проводит текущий контроль и тестовую проверку. Специальный узел обеспечивает обмен информацией с магнитометром и магнитоприводом.

### 6.2.2. Математическая модель магнитного поля Земли

В первом приближении магнитное поле Земли можно представить как магнитное поле диполя, ось которого проходит через центр Земли  $O$  и составляет с осью вращения Земли угол, примерно равный  $11,5^\circ$  [1, 60, 88].



**Рис. 6.6.** Положение космического аппарата в геомагнитной системе координат

Введем геомагнитную систему координат, у которой ось  $Oy_m$  – ось диполя направлена в сторону северного магнитного полюса. Плоскость, проходящая через точку  $O$  и перпендикулярная оси  $Oy_m$ , образует на поверхности Земли геомагнитный экватор. Магнитные полюсы, экватор и широты не совпадают с географическими. Ось  $Oz_m$  направим вдоль линии пересечения геомагнитного и земного экваторов. Положение космического аппарата

в геомагнитной системе координат определяется радиусом-вектором центра масс  $\mathbf{r}$  и широтой  $\theta$  (рис. 6.6).

Потенциальная функция шара или диполя с магнитным моментом  $P_3$  (магнитный момент Земли) определяется выражением [1, 60, 111]

$$U = -P_3 \sin\theta / r^2.$$

Индукция магнитного поля  $\mathbf{B}$  есть градиент потенциальной функции, взятый со знаком минус, т. е.

$$\mathbf{B} = -\text{grad } U.$$

Поскольку

$$\text{grad } U = [\partial U / \partial r, \partial U / \partial r_{\perp}], \quad \partial r_{\perp} = r d\theta,$$

то

$$\mathbf{B} = -P_3 (2 \sin\theta \mathbf{e}_r - \cos\theta \mathbf{e}_{\theta}) / r^3,$$

где  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{\theta}$  – единичные векторы, направленные вдоль радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  и по нормали к нему в плоскости магнитного меридиана.

Модуль вектора индукции магнитного поля

$$B = P_3 (4 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^{1/2} / r^3.$$

Из этой формулы видно, что на круговых орбитах индукция магнитного поля возрастает по мере увеличения широты  $\theta$ . Индукция на полюсе ( $\theta = 1/2\pi$ )

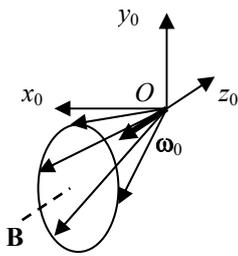
$$B_{\text{п}} = 2P_3 / r^3$$

в два раза превышает индукцию на экваторе

$$B_0 = P_3 / r^3.$$

Магнитная индукция измеряется в *теслах* (Тл) или *гауссах* (Гс). На поверхности Земли ( $r = 6370$  км)  $B_0 = 0,31 \cdot 10^{-4}$  Тл = 0,31 Гс,  $B_{\text{п}} = 0,62 \cdot 10^{-4}$  Тл = 0,62 Гс.

Иногда на начальных этапах исследования задач магнитного управления используют простейшую модель магнитного поля Земли, в которой геомагнитная ось  $Oy_{\text{м}}$  совпадает с осью вращения Земли.



**Рис. 6.7. Годограф вектора  $\mathbf{B}$  в орбитальной системе координат**

Тогда проекции вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  на оси орбитальной системы координат  $Ox_0y_0z_0$  составят [1]:

$$\begin{aligned} B_{x_0} &= B_0 \sin i \cos(\omega_0 t - \alpha); \\ B_{y_0} &= -2B_0 \sin i \sin(\omega_0 t - \alpha); \\ B_{z_0} &= -B_0 \cos i, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где  $i$  – наклон орбиты к плоскости экватора;  $\omega_0$  – угловая орбитальная скорость;  $\alpha$  – фазовый угол;  $B_0$  – магнитная индукция на экваторе.

В орбитальной системе координат вектор  $\mathbf{B}$  движется по поверхности эллиптического конуса, ось симметрии которого лежит вдоль оси  $Oz_0$  (рис. 6.7). Действительно, если возвести в квадрат и сложить два первых соотношения, то получится уравнение эллипса

$$(B_{x_0} / B_0 \sin i)^2 + (B_{y_0} / 2B_0 \sin i)^2 = 1$$

с длиной полуосей  $B_0 \sin i$  и  $2B_0 \sin i$ .

### 6.2.3. Управление магнитными системами

Принцип действия магнитных систем основан на взаимодействии магнитного момента  $\mathbf{P}$  системы электрических катушек с магнитным полем Земли, в результате чего возникает механический управляющий момент

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \times \mathbf{B}. \quad (6.2)$$

Сложность использования магнитных систем состоит в том, что вектор  $\mathbf{B}$  существенно меняется в процессе орбитального движения. Управляющий момент максимален, если векторы  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{B}$  перпендикулярны. Если они коллинеарны, то управляющий момент создать невозможно.

Это обстоятельство затрудняет использование магнитных систем в качестве основных систем ориентации, но не является препятствием в их использовании как систем разгрузки: система разгрузки включается в моменты времени, когда положение космического аппарата благоприятно для создания момента  $\mathbf{M}$ .

Если в процессе управления вектор  $\mathbf{P}$  изменяется в соответствии с некоторым законом управления, то соотношение (6.2) следует дополнить принятым законом управления.

Законы управления могут быть различными. Общим для них является то, что они должны уменьшать ошибку управления  $\epsilon$ . Система должна создавать

управляющий момент, направление которого противоположно вектору  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , т. е. можно потребовать выполнение равенства

$$\mathbf{P} \times \mathbf{V} = -c \boldsymbol{\varepsilon},$$

где  $c$  – некоторый коэффициент.

Умножим обе части этого равенства векторно на  $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{V}) = -c(\mathbf{V} \times \boldsymbol{\varepsilon}).$$

Раскроем левую часть по правилам двойного векторного произведения

$$\mathbf{P}(\mathbf{V}\mathbf{V}) - \mathbf{V}(\mathbf{P}\mathbf{V}) = c(\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{V}).$$

Примем

$$\mathbf{P}\mathbf{V} = 0, \text{ т. е. } \mathbf{P} \perp \mathbf{V}.$$

Это условие соответствует оптимальному направлению вектора магнитного момента  $\mathbf{P}$  по отношению к вектору магнитной индукции  $\mathbf{V}$ . Действительно, составляющая вектора  $\mathbf{P}$ , параллельная  $\mathbf{V}$ , на которую потребовались бы дополнительные энергозатраты и дополнительная масса исполнительных органов, управляющий момент, согласно (6.2), не создает. Получим общую зависимость магнитного момента от ошибки управления

$$\mathbf{P} = c(\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{V})/B^2. \quad (6.3)$$

После подстановки (6.3) в (6.2) найдем закон изменения вектора управляющего момента

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \times \mathbf{V} = c(\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} / B^2 = -c[\boldsymbol{\varepsilon}B^2 - \mathbf{V}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{V})] / B^2 = -c[\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{b})],$$

где  $\mathbf{b}$  – единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором магнитной индукции  $\mathbf{V}$ .

В системах разгрузки роль ошибки управления играет суммарный вектор кинетического момента системы «космический аппарат-маховики (силовые гироскопы)»  $\mathbf{k}_c = I\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}(t)$  или вектор кинетического момента электромеханической системы  $\mathbf{H}(t)$ , если программные повороты не производятся. Это позволяет записать зависимость (6.3) в виде

$$\mathbf{P} = c(\mathbf{k}_c \times \mathbf{V})/B^2. \quad (6.4)$$

Соответственно закон изменения вектора управляющего момента

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \times \mathbf{V} = -c[\mathbf{k}_c B^2 - \mathbf{V}(\mathbf{k}_c \mathbf{V})]/B^2. \quad (6.5)$$

Из этого выражения видно, при произвольном взаимном положении векторов  $\mathbf{k}_c$  и  $\mathbf{V}$ , т. е. при произвольном угле  $\alpha$  между ними, механический момент не совпадает по направлению с вектором  $\mathbf{k}_c$ . Умножая скалярно вектор  $\mathbf{M}$  на единичный вектор кинетического момента  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_c/k_c$ , вычислим проекцию вектора  $\mathbf{M}$  на направление  $\mathbf{k}_c$

$$M_k = \mathbf{M} \mathbf{k}_c = -c[\mathbf{k}_c \mathbf{k}_c B^2 - (\mathbf{k}_c \mathbf{V})(\mathbf{k}_c \mathbf{V})]/k_c B^2 = -c(k_c - k_c \cos^2 \alpha) = -ck_c \sin^2 \alpha.$$

Эта проекция – полезный механический момент, который и обеспечивает сброс кинетического момента. Полезный механический момент равен нулю только в случае коллинеарности векторов  $\mathbf{k}_c$  и  $\mathbf{V}$ .

В [60] доказывается асимптотическая устойчивость процесса разгрузки при использовании закона (6.5).

Следует отметить, что требуемый для разгрузки магнитный момент  $\mathbf{P}$  зависит от  $B^2$ . Эта величина меняется в орбитальном полете. Исключение составляет круговая орбита, лежащая в плоскости геомагнитного экватора. С увеличением наклона орбиты диапазон изменения  $B^2$  возрастает. На полярных орбитах, проходящих над полюсами, величина  $B^2$  изменяется в четыре раза. Это же происходит при увеличении эксцентриситета орбиты. Присутствие члена  $B^2$  в (6.4) делает общий коэффициент усиления системы  $c_1 = c/B^2$  переменным. Исключение  $B^2$  из (6.4) за счет выбора  $c_1 = \text{const}$  приводит к изменению эффективности разгрузки по мере изменения  $B^2$ , но позволяет существенно упростить блок логики при использовании аналоговых устройств. В таком случае расчет величины магнитного момента исполнительных органов должен производиться исходя из минимально возможной или некоторой средней эффективности разгрузки.

Большое разнообразие законов управления можно получить, если использовать в (6.4) различные комбинации линейных и релейных функций от  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{k}_c$  (или  $\mathbf{H}$ ),  $\mathbf{V}$ .

Спроектируем векторное равенство (6.4) (без деления на  $B^2$ ) на связанные оси космического аппарата

$$\begin{aligned} P_x &= c_1(k_{cy}B_z - k_{cz}B_y); \\ P_y &= c_1(k_{cz}B_x - k_{cx}B_z); \\ P_z &= c_1(k_{cx}B_y - k_{cy}B_x). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Законы управления с линейными функциями  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{k}_c$  и  $\mathbf{V}$ , очевидно, обеспечивают наилучшее качество управления кинетическим моментом. Для этого, даже без учета знаменателя в (6.4), требуется перемножение проекций векторов  $\mathbf{k}_c$  и  $\mathbf{V}$ . Выполнение этой операции при помощи аналоговых вычислителей сложно. Ее можно избежать, если в (6.6) использовать релейные функции

от  $k_{cx}$ ,  $k_{cy}$ ,  $k_{cz}$ , которые принимают значения  $0, \pm 1$ . В этом случае формирование законов (6.6) сводится к алгебраическому суммированию соответствующих проекций  $B_i$ . Применение этих законов предполагает линейное управление магнитным моментом исполнительных органов.

Иногда полезно релейное управление магнитным моментом исполнительных органов. Тогда магнитный момент принимает дискретные значения в зависимости от величины сигнала, определяемого правой частью выражения (6.6).

Перекрестные связи между каналами управления уменьшаются с уменьшением скалярного произведения  $\mathbf{k}_c \mathbf{V}$ . Иногда может оказаться полезным производить разгрузку в те моменты времени, когда  $\mathbf{k}_c \mathbf{V}$  близко к нулю и вектор  $\mathbf{V}$  становится примерно перпендикулярным вектору  $\mathbf{k}_c$ . Это условие встречается не всегда и зафиксировать его при отсутствии на борту цифровых вычислителей сложно. Для уменьшения перекрестных связей определяют моменты времени, когда проекция  $\mathbf{V}$  на какую-либо ось равна нулю. В этом случае появляется возможность независимого управления вокруг данной оси. Если проекция  $\mathbf{V}$  на какую-либо ось близка к максимуму, появляется благоприятная возможность для управления по ортогональным осям.

#### 6.2.4. Системы разгрузки с двумя и тремя электромагнитами

Простейшая система разгрузки состоит из двух электромагнитов, установленных параллельно двум осям космического аппарата, и магнитометра, измеряющего проекцию вектора магнитной индукции на третью ось (рис. 6.8). Такая система с релейными законами управления использовалась на космическом аппарате «Метеор». При ориентации космического аппарата в орбитальной системе координат (ось  $Oy$  направлена по радиусу-вектору орбиты) магнитная индукция вдоль оси  $Oy$   $|B_y|$  изменяется, согласно (6.1), от нуля (на экваторе) до  $2B_0 \sin i$  (на полюсах), где  $i$  – наклон орбиты к плоскости экватора,  $B_0 = |\mathbf{V}|$  – магнитная индукция на экваторе (на высоте орбиты). Космический аппарат «Метеор» запускается на полярную орбиту ( $i = 1/2\pi$ ).

Разрешением на включение электромагнитов служит превышение определенного уровня сигнала  $|B_y|$ , поступающего с магнитометра. Это означает, что разгрузка осуществляется, когда космический аппарат пролетает над полюсами и магнитная индукция по оси  $Oy$  максимальна.

В соответствии со схемой расположения электромагнитов система разгрузки создает управляющий момент

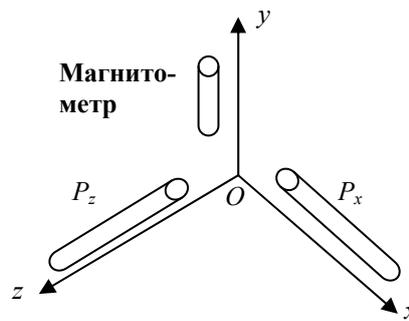


Рис. 6.8. Система разгрузки с двумя электромагнитами

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & 0 & P_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Его проекции на оси космического аппарата составят:

$$M_x = -P_z B_y; M_y = P_z B_x - P_x B_z; M_z = P_x B_y.$$

Электромагнит, расположенный вдоль оси  $Ox$ , создает разгрузочный момент по оси  $Oz$ , а электромагнит, расположенный вдоль оси  $Oz$  момент по оси  $Ox$ . Момент, действующий по оси  $Oy$ , является возмущающим. Уравнения движения космического аппарата [7, 85], управляемого тремя двигателями-маховиками и магнитной системой разгрузки, примут вид

$$\begin{aligned} I_x \omega_x' + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= M_{Bx} - H_x' + H_y \omega_z - H_z \omega_y - P_z B_y; \\ I_y \omega_y' + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= M_{By} - H_y' + H_z \omega_x - H_x \omega_z + P_z B_x - P_x B_z; \\ I_z \omega_z' + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= M_{Bz} - H_z' + H_x \omega_y - H_y \omega_x + P_x B_y, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{M}_B = (M_{Bx}, M_{By}, M_{Bz})$  – вектор внешнего возмущающего момента;  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$  – вектор кинетического момента маховичной системы;  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  – вектор угловой скорости космического аппарата.

Управление механическим моментом, создаваемым электромагнитами, осуществляется за счет регулирования магнитного момента (протекающих через обмотки токов). При использовании релейных сигналов управления

$$P_x = P_0 U_B U_z; P_z = P_0 U_B U_x,$$

где  $P_0$  – номинальный магнитный момент электромагнита;  $U_B$  – релейный сигнал магнитометра;  $U_x, U_z$  – релейные функции кинетических моментов двигателей-маховиков. Поскольку магнитометр измеряет только составляющую вектора индукции по оси  $Oy$ , то

$$U_B = \begin{cases} \text{sign} B_y & \text{при } |B_y| > B_* \\ 0 & \text{в ост. случаях} \end{cases},$$

где  $B_*$  – уровень включения магнитной системы.

Функции  $U_x, U_z$  принимают значения  $\pm 1$ , если кинетические моменты двигателей-маховиков  $|H_x|, |H_z|$  превышают уровень включения системы разгрузки  $H_p$  и равны нулю, когда кинетические моменты становятся меньше уровня отключения системы разгрузки  $H_0$ :

$$U_x = \begin{cases} \text{sign} H_x & \text{при } |H_x| > H_p \\ 0 & \text{при } |H_x| < H_0 \\ U_{x(n-1)} & \text{в ост. случаях} \end{cases}; \quad U_z = \begin{cases} \text{sign} H_z & \text{при } |H_z| > H_p \\ 0 & \text{при } |H_z| < H_0 \\ U_{z(n-1)} & \text{в ост. случаях} \end{cases}.$$

Включение системы разгрузки происходит при одновременном выполнении условий

$$|B_y| > B_* \text{ и } |H_x| > H_p \text{ (или } |H_z| > H_p).$$

В общем случае в систему магнитной разгрузки входят три электромагнита, параллельные трем осям космического аппарата, и трехкомпонентный магнитометр; реализуются алгоритмы управления, предложенные в разделе 6.2.3. Взаимодействие контура управления угловым положением и контура магнитной разгрузки проследим по общей блок-схеме, изображенной на рис. 6.9.

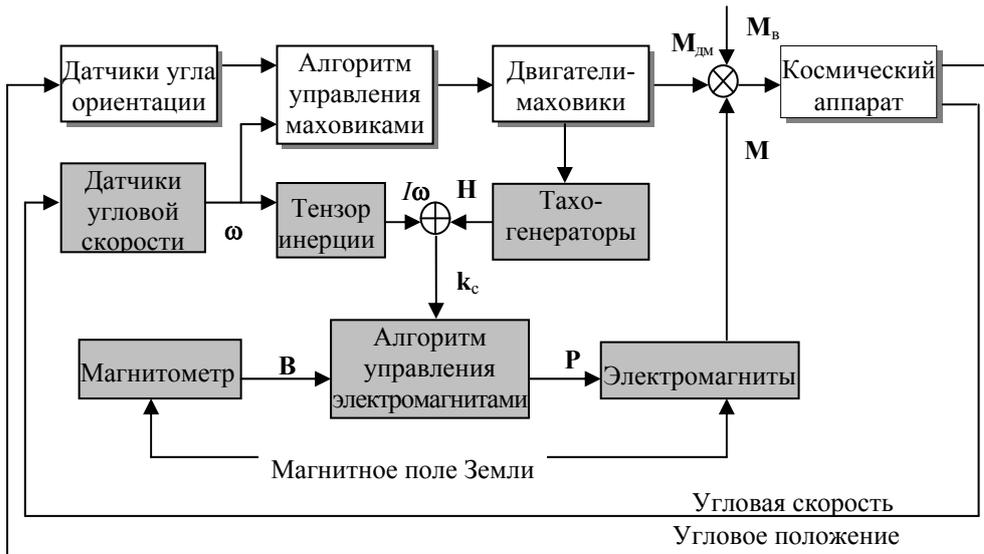


Рис. 6.9. Блок-схема маховичной системы с контуром магнитной разгрузки

В основную систему входят датчики угла ориентации, датчики угловой скорости, блок формирования сигналов управления маховиками и двигатели-маховики.

Система разгрузки выделена серым цветом. Ее датчиками являются магнитометр, датчики угловой скорости и тахогенераторы двигателей-маховиков. Помимо этого в нее входят блок формирования сигналов управления электромагнитами и сами электромагниты. На космический аппарат действуют внешний возмущающий момент  $M_{\text{в}}$ , управляющие моменты двигателей-маховиков  $M_{\text{дм}}$  и электромагнитов  $M$ . Информацию о суммарном кинетическом моменте системы  $k_c$  дает суммирование в определенном масштабе сигналов датчиков угловой скорости и тахогенераторов.

Следует отметить, что магнитная система может использоваться для начального успокоения космического аппарата после его отделения от ракетоносителя [60, 111]. В этом режиме весь кинетический момент сосредоточен в корпусе космического аппарата ( $I\omega$ ).

Команда на включение двигателей-маховиков подается через некоторое время, когда кинетический момент снизится до заданного уровня в результате работы магнитной системы. Управление электромагнитами в режиме начального успокоения осуществляется по сигналам датчиков угловой скорости.

В режиме стабилизации (при отсутствии программных поворотов) для управления могут использоваться только сигналы тахогенераторов (**Н**). Такой пример был рассмотрен в предыдущем разделе.

Применение бортовых ЦВМ, способных реализовывать сложные алгоритмы управления, позволяет оптимизировать параметры магнитоприводов, выбрать их число и рациональную схему установки на космическом аппарате. В некоторых случаях может оказаться выгодной установка магнитоприводов под углом к осям космического аппарата.

### 6.3. ГРАВИТАЦИОННАЯ РАЗГРУЗКА

Чтобы разгрузить электромеханическую систему от накопленного кинетического момента, к корпусу космического аппарата необходимо прикладывать внешний момент.

В роли внешнего разгружающего момента может использоваться гравитационный момент, возникающий при целенаправленном отклонении связанных осей космического аппарата относительно орбитальной системы координат.

Пусть космический аппарат имеет вид вытянутого цилиндра с диагональным тензором инерции

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix},$$

а двигатель-маховик, установленный по оси тангажа  $Oz$  достиг уровня разгрузки  $H_p$  (рис.6.10).

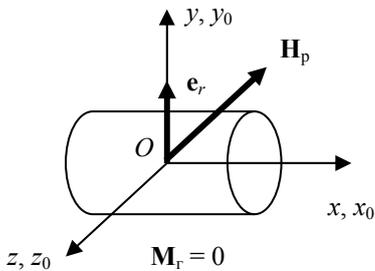


Рис. 6.10. Космический аппарат, стабилизированный в орбитальной системе координат

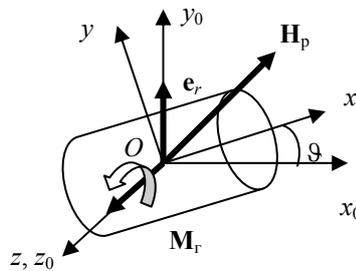


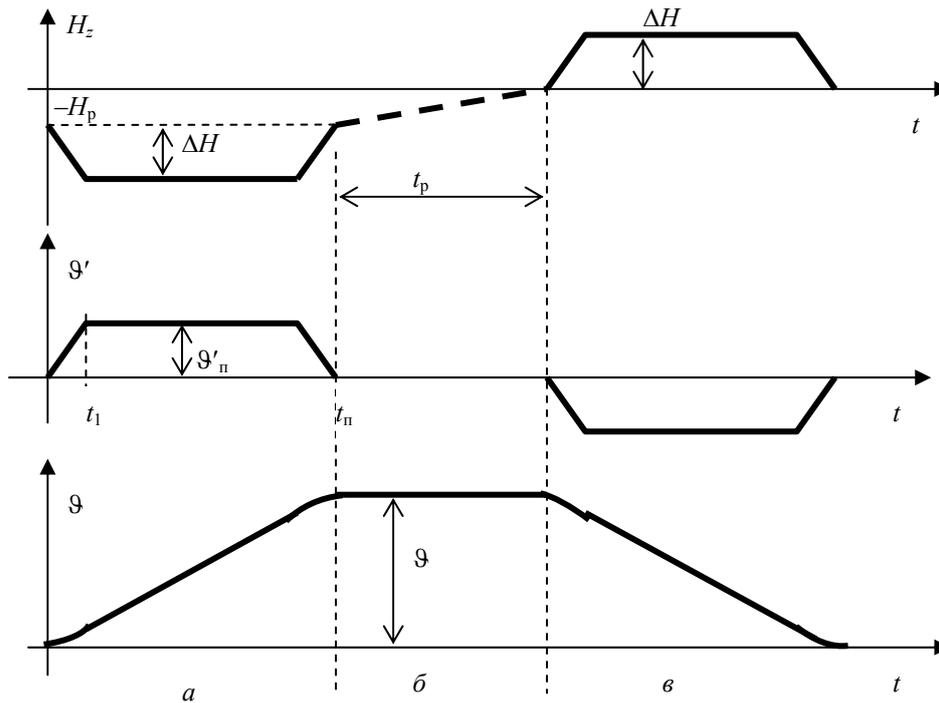
Рис. 6.11. Разгружающий гравитационный момент

Если космический аппарат идеально стабилизирован в орбитальной системе координат, то его оси  $Oxyz$  совпадают с осями ориентации  $Ox_0y_0z_0$ , при этом направляющие косинусы единичного вектора  $\mathbf{e}_r = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  принимают значения  $\gamma_1 = \gamma_3 = 0, \gamma_2 = 1$  и гравитационный момент равен нулю.

Чтобы кинетический момент двигателя-маховика уменьшался по модулю, на космический аппарат должен действовать внешний момент, направленный вдоль оси  $Oz$ . Знак момента должен удовлетворять условию

$$\text{sign } M_z = -\text{sign } H_z.$$

Гравитационный момент нужного знака создается за счет поворота космического аппарата вокруг оси  $Oz$  на небольшой угол  $\vartheta$  в положительном или отрицательном направлении.



**Рис. 6.12.** Маневры космического аппарата при гравитационной разгрузке: участок *a* – поворот на угол  $\vartheta$ ; участок *b* – гравитационная разгрузка; участок *c* – возвращение в исходное положение

Если  $H_p < 0$ , разгружающий гравитационный момент должен действовать в положительном направлении оси  $Oz$ , для чего требуется повернуть космический аппарат против часовой стрелки (рис. 6.11). Для поворота космического аппарата может использоваться двигатель-маховик, если уровень его разгрузки  $|H_p|$  меньше, чем уровень насыщения по кинетическому моменту. Изменения угловой скорости и угла поворота космического аппарата во времени изображе-

ны на рис. 6.12. Действие внешнего возмущающего момента, вызывающего нарастание кинетического момента, во время поворотов космического аппарата и в процессе разгрузки не учитывалось.

Поворот осуществляется за счет изменения кинетического момента двигателя-маховика на величину  $-\Delta H$  сверх уровня разгрузки  $-H_p$ . Поворот происходит со скоростью

$$\vartheta'_n = |\Delta H|/I_z,$$

а угол поворота составит

$$\vartheta = \vartheta'_n (t_n - t_1),$$

где  $t_1$  – время разгона двигателя-маховика;  $t_n$  – продолжительность поворота.

В новом положении направляющие косинусы единичного вектора  $e_r$  (направленного по оси  $Oy_0$ ) относительно связанных осей  $Oxyz$  зависят от угла  $\vartheta$

$$\gamma_1 = \sin\vartheta; \gamma_2 = \cos\vartheta; \gamma_3 = 0.$$

Используя формулы для расчета гравитационных моментов (2.22), получим

$$M_{rx} = M_{ry} = 0, M_{rz} = 3\omega_0^2(I_y - I_x) \times \\ \times \sin\vartheta \cos\vartheta = \frac{3}{2} \omega_0^2(I_y - I_x) \sin 2\vartheta.$$

Под действием постоянного момента  $M_{rz}$  кинетический момент двигателя-маховика снижается (рис. 6.12, участок «б»). Время полной разгрузки двигателя-маховика (до  $H_z = 0$ ):

$$t_p \cong H_p / M_{rz}.$$

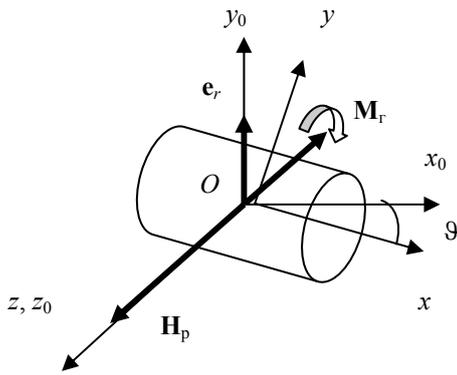


Рис. 6.13. Поворот космического аппарата для сброса положительного кинетического момента двигателя-маховика по оси  $Oz$

По завершении разгрузки двигателя-маховика космический аппарат следует вернуть в исходное положение. Такой маневр снова осуществляется при помощи двигателя-маховика (рис. 6.12, участок «в»). Если двигатель-маховик по оси тангажа «накопил» положительный кинетический момент, то космический аппарат следует повернуть по часовой стрелке, чтобы возникающий гравитационный момент действовал по оси  $-Oz$  (рис. 6.13). Обычно маневры космического аппарата с целью гравитационной разгрузки электромеханической системы ориентации планируются в те моменты времени, когда работа с научной аппаратурой не проводится и точная ориентация не требуется. После разгрузки совершается обратный поворот, космический аппарат возвращается в исходное угловое положение и точная ориентация восстанавливается. Гравитационная разгрузка гиросиловых систем ориентации успешно применялась на орбитальных станциях «Мир» и «Скайлаб» (США).

## СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ СОЛНЕЧНЫХ БАТАРЕЙ

- ◆ Назначение и состав системы
  - ◆ Движение Солнца и солнечных батарей
  - ◆ Схемы установки солнечных батарей на космических аппаратах
- ◆ Компенсация возмущающих моментов
  - ◆ Алгоритмы управления
- ◆ Привод солнечных батарей

## 7.1. НАЗНАЧЕНИЕ И СОСТАВ СИСТЕМЫ

В 1960 г. ВНИИЭМ выиграл конкурс на создание метеорологического спутника Земли. Для отработки принципиальных технических решений был создан небольшой (до 300 кг) космический аппарат – космическая электротехническая лаборатория «Омега» («Космос-14»). Спутник был снабжен большими солнечными батареями, неподвижными относительно корпуса космического аппарата [86]. Для ориентации солнечных батарей на Солнце использовался режим закрутки всего космического аппарата вокруг оси, перпендикулярной поверхности солнечных батарей и направленной на Солнце. Были получены важные данные о «старении» фотоэлементов в условиях космического полета под действием космического излучения и тепловых ударов при переходах Солнце-тень.

28 августа 1964 г. был запущен первый советский метеоспутник, получивший название «Космос-44». На нем успешно работала первая система ориентации солнечных батарей.

Применение автономных систем ориентации солнечных батарей позволило в 2,5 раза сократить площадь панелей с фотоэлектрическими элементами [86]. Тем не менее на долю системы электропитания, включая систему ориентации, солнечные и аккумуляторные батареи, устройства стабилизации напряжения, приходится 10 – 15% массы космического аппарата [86].

Управление ориентацией солнечных батарей во многом сходно с управлением ориентацией космического аппарата с тем отличием, что корпус космического аппарата служит подвижным основанием, относительно которого вращаются солнечные батареи. В свою очередь, для описания движения системы «космический аппарат + солнечные батареи» необходимо использовать уравнения движения вокруг центра масс космического аппарата, содержащего подвижные массы.

В состав системы ориентации солнечных батарей (рис. 7.1) входят:

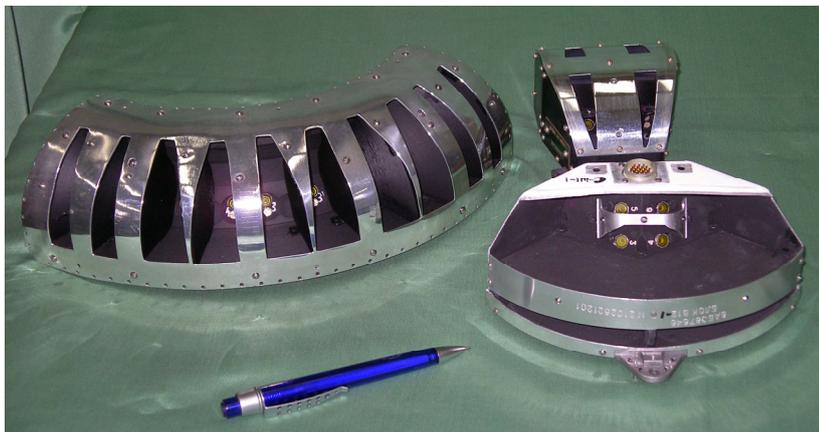
- локальная бортовая ЦВМ (вычислительное, логическое устройство);
- привод солнечных батарей (блок электромеханики);
- датчики Солнца.



Рис. 7.1. Функциональная схема системы ориентации солнечных батарей

В режиме неавтономного функционирования команды на перемещение солнечных батарей поступают из центральной ЦВМ космического аппарата. В режиме автономного функционирования ориентация солнечных батарей

производится по командам локальной БЦВМ. В нее поступает информация с датчиков Солнца, установленных непосредственно на солнечных батареях (метеоспутник «Метеор») или на корпусе космического аппарата (орбитальная станция «Мир»). Датчики Солнца щелевого типа изображены на рис. 7.2. В качестве чувствительных элементов этих датчиков используются кремниевые фотодиоды. Датчики формируют релейные сигналы наличия Солнца в заданных полях обзора. Солнечные датчики щелевого типа используются в системах ориентации солнечных батарей российских модулей «Заря» и «Звезда» Международной космической станции.



**Рис. 7.2. Датчики Солнца щелевого типа**

Для формирования закона управления могут использоваться сигналы о текущем положении солнечных батарей (угол поворота выходного вала привода) и скорости вращения приводного двигателя. Информация о текущем положении солнечных батарей подается также в центральную ЦВМ. На основе данных орбитального движения в ней вычисляется угловое положение Солнца или используются сигналы датчиков Солнца, входящих в состав системы ориентации корпуса космического аппарата.

В режиме неавтономного функционирования локальная БЦВМ играет роль устройства сопряжения между центральной ЦВМ и приводом солнечных батарей.

## 7.2. ДВИЖЕНИЕ СОЛНЦА И СОЛНЕЧНЫХ БАТАРЕЙ

Космические аппараты метеорологического назначения и для исследования природных ресурсов ориентируются в орбитальной системе координат. Введем единичный вектор  $s$ , направленный из центра масс космического аппарата на Солнце.

Угол между линией визирования Солнца и бинормалью орбиты обозначим  $i$ . Изменения угла  $i$  связаны с прецессией плоскости орбиты и годовым дви-

жением Солнца по эклиптике. Для коротких интервалов времени, соизмеримых с периодом обращения космического аппарата по орбите, будем считать угол  $i$  постоянным. При таком допущении вектор  $\mathbf{s}$  описывает в орбитальной системе координат  $Ox_0y_0z_0$  поверхность кругового конуса с осью симметрии  $Oy_0$  и углом  $2i$  при вершине (см. рис. 2.23).

Вектор  $\mathbf{s}$  может быть представлен в виде суммы двух векторов – постоянного вектора  $\mathbf{s}_1$ , направленного вдоль бинормали орбиты  $Oy_0$ , и переменного вектора  $\mathbf{s}_2$ , вращающегося вокруг этой оси. Положение вектора  $\mathbf{s}$  на поверхности конуса в текущий момент времени  $t$  может быть задано углом  $u = \omega_0 t$ , где  $\omega_0$  – угловая скорость вектора  $\mathbf{s}_2$ , равная угловой скорости орбитального движения (рис. 7.3). За начало отсчета времени выберем момент восхода Солнца над плоскостью местного горизонта  $Ox_0y_0$ .

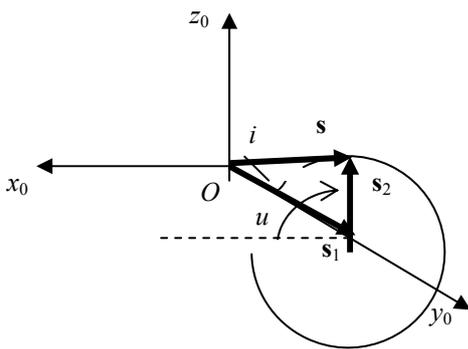


Рис. 7.3. Угловое положение Солнца

Положение вектора  $\mathbf{s}$  в орбитальной системе координат  $Ox_0y_0z_0$  определяют два угла:  $i$  – высота Солнца относительно бинормали орбиты,  $u$  – высота вектора  $\mathbf{s}_2$  над плоскостью местного горизонта.

Введем единичный вектор  $\mathbf{n}$ , нормальный активной поверхности солнечных батарей. Его положение определяется в системе координат  $Oxyz$ , связанной с корпусом космического аппарата, на котором установлен привод солнечных батарей. При ориентации в орбитальной системе координат оси космического аппарата  $Oxyz$ , совмещаются с осями  $Ox_0y_0z_0$ .

Слежение за Солнцем осуществляется при выполнении равенства

$$\mathbf{n} = \mathbf{s}. \quad (7.1)$$

Это означает, что вектор  $\mathbf{n}$ , как и вектор  $\mathbf{s}$ , должен описывать коническую поверхность относительно связанной системы координат. Положение вектора

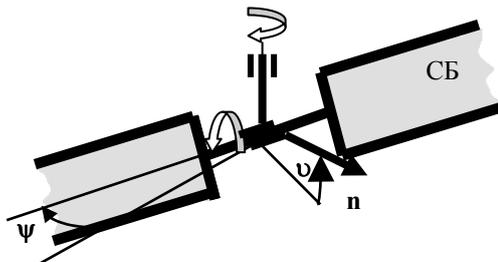


Рис. 7.4. Двухступенный привод солнечных батарей

$\mathbf{n}$  в связанной системе координат определяется двумя углами, следовательно, механизм вращения солнечных батарей должен быть двухосным – иметь две степени свободы движения. Вращение вокруг каждой оси производится своим приводом. Пример такого механизма, состоящего из двух приводов, изображен на рис. 7.4. Привод,

вращающий всю конструкцию, называется корневым, привод, непосредственно вращающий панели солнечных батарей, – боковым.

При помощи двухосного механизма можно повернуть вектор  $\mathbf{n}$  в любое положение. При отсутствии одного или другого привода система становится одноосной.

Таким образом, в отличие от системы ориентации корпуса космического аппарата, которая имеет три степени свободы движения, система ориентации солнечных батарей может иметь две или одну степени свободы движения.

### 7.3. СХЕМЫ УСТАНОВКИ СОЛНЕЧНЫХ БАТАРЕЙ НА КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТАХ

По принципу действия системы ориентации солнечных батарей могут быть двухстепенными (двухосными) и одностепенными (одноосными). Наибольшее распространение получили одноосные системы. Такие системы разработки НПП ВНИИЭМ установлены на 14-ти типах космических аппаратов [86].

Во время движения космического аппарата по орбите необходимо стремиться к оптимальной ориентации солнечных батарей, при которой угол отклонения нормали  $\mathbf{n}$  к активной поверхности батареи от линии направления на Солнце  $\mathbf{s}$  будет минимальным.

Одноступенная система не может обеспечить точное выполнение равенства (7.1), при этом потери энергии становятся неизбежными.

При одноосной ориентации наилучший результат можно получить совмещением вектора  $\mathbf{n}$  с проекцией вектора  $\mathbf{s}$  на плоскость, перпендикулярную оси вращения батарей.

Обозначим через  $\alpha$  угол рассогласования между ними.

Он зависит от реализуемого закона управления и погрешности ориентации.

Эффективность ориентации  $E$  за время работы системы на освещенном участке орбиты  $T$  можно оценить по среднему значению косинуса угла рассогласования [3]

$$E = \frac{1}{T} \int_0^T \cos \alpha(t) dt. \quad (7.2)$$

Компоновка привода солнечных батарей зависит от назначения и конструктивных особенностей космического аппарата, параметров его орбиты. Минимизация потерь возможна за счет правильного выбора положения оси вращения батарей относительно осей космического аппарата и минимизации угла рассогласования  $\alpha$ .

На космических аппаратах «Метеор» и «Ресурс» панели солнечных батарей установлены на коромысле, которое вращается вокруг оси рыскания (рис. 7.5).

Вектор  $\mathbf{n}$  движется не по конической поверхности, а в плоскости местного горизонта  $Oxy$ , т. е. по азимуту, и может совмещаться с проекцией вектора  $\mathbf{s}$  на эту плоскость. Солнечные батареи можно установить под некоторым углом относительно плоскости коромысла. Тогда вектор  $\mathbf{n}$  будет двигаться по поверхности конуса с осью симметрии  $Oz$ .

На космическом аппарате «Метеор-М» ось вращения солнечных батарей параллельна оси крена (рис. 7.6).

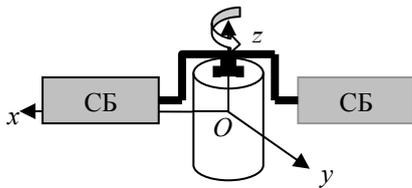


Рис. 7.5. Схема установки солнечных батарей на космических аппаратах «Метеор» и «Ресурс»

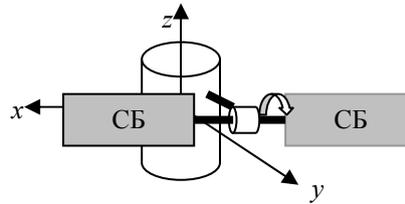


Рис. 7.6. Схема установки солнечных батарей на космическом аппарате «Метеор-М»

Вектор  $\mathbf{n}$  совмещается с проекцией вектора  $\mathbf{s}$  на плоскость  $Oyz$ .

На орбитальной станции «Салют» оси вращения батарей устанавливались параллельно осям тангажа и рыскания (рис. 7.7).

Параллельно оси тангажа располагались оси вращения солнечных батарей на базовом блоке орбитальной станции «Мир». Помимо этого солнечными батареями оснащались научные модули, которые пристыковывались к базовому блоку [102, 109]. Аналогично расположены приводы солнечных батарей разработки НПП ВНИИЭМ на модулях «Заря» и «Звезда» Международной космической станции (рис. 7.8).

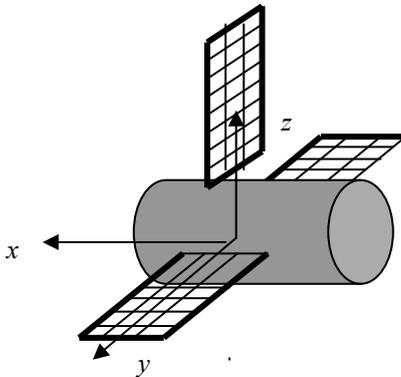


Рис. 7.7. Схема установки солнечных батарей на орбитальной станции «Салют»



Рис. 7.8. Международная космическая станция

На заднем плане фотографии видны солнечные батареи большой площади, которые доставлены транспортным кораблем Шатл и временно размещены на связке модулей «Заря» – «Звезда». Впоследствии эти батареи будут перенесены на американский сегмент станции. Их ориентация на Солнце будет осуществляться двухступенным приводом (рис. 7.9). Ось вращения корневого привода параллельна оси тангажа.

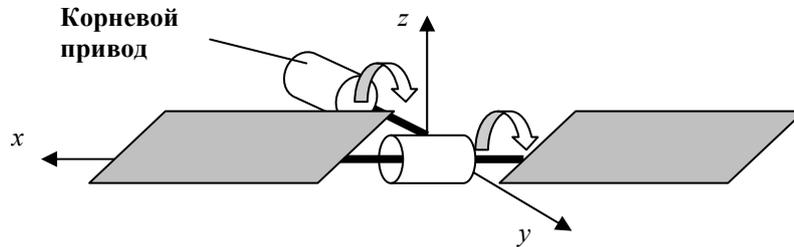


Рис. 7.9. Схема установки двухступенного привода на американском сегменте Международной космической станции

Для российского сегмента станции в ФГУП «НПП ВНИИЭМ» разработан двухступенный привод, у которого ось вращения корневого привода параллельна оси рыскания. Предлагаемая схема установки привода на российском сегменте станции изображена на рис. 7.10.



Рис. 7.10. Схема установки солнечных батарей на российском сегменте Международной космической станции

Схема установки корневого привода существенно влияет на кинематику солнечных батарей. Корневой привод системы ориентации солнечных батарей американского сегмента станции (см. рис. 7.9) будет вращаться равномерно с

угловой скоростью орбитального движения, боковой привод будет отслеживать медленные изменения угла  $i$ , связанные с годовым движением Солнца. При установке по схеме, изображенной на рис. 7.4 и рис. 7.10 корневой и боковой приводы будут вращаться неравномерно. Кинематика такого привода приведена в [15, 16]. Вследствие неравномерного вращения солнечных батарей на корпус орбитальной станции будут действовать внутренние возмущающие моменты.

#### 7.4. КОМПЕНСАЦИЯ ВОЗМУЩАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Вращение солнечных батарей (разгон, торможение) вызывает ответную реакцию корпуса космического аппарата. Запишем закон сохранения кинетического момента для механической системы «космический аппарат + солнечные батареи» при отсутствии внешних возмущающих моментов:

$$I_{КА} \omega_{КА} + I_{СБ} \omega_{СБ} = 0.$$

В этом равенстве  $I_{КА}$ ,  $I_{СБ}$  – моменты инерции корпуса космического аппарата и солнечных батарей;  $\omega_{КА}$ ,  $\omega_{СБ}$  – абсолютные угловые скорости космического аппарата и солнечных батарей.

Скорости неуправляемого космического аппарата и солнечных батарей связаны между собой через отношение моментов инерции

$$\omega_{КА} = -(I_{СБ} / I_{КА}) \omega_{СБ}.$$

Поскольку моменты инерции современных солнечных батарей значительны, велики и возмущающие моменты, создаваемые при их движении.

Известны способы борьбы с внутренними возмущающими моментами. Например при включении на борту двух одинаковых приборов вредное воздействие возмущающих моментов на корпус космического аппарата удастся исключить за счет их взаимной компенсации, когда роторы приборов вращаются в противоположные стороны. Такие же результаты дает применение специальных компенсаторов. Идея компенсации возмущающего момента от солнечных батарей реализована на метеорологическом спутнике «Метеор».

Вращение солнечных батарей с большим моментом инерции вызывает вращение в противоположную сторону корпуса космического аппарата. Чтобы этого не происходило, одновременно с приводом солнечных батарей включается компенсирующий маховик, вращающийся в противоположную сторону. Скорость вращения маховика  $\omega_m$  регулируется так, чтобы суммарный кинетический момент панелей солнечных батарей и компенсирующего маховика был всегда близок к нулю.

При использовании компенсирующего маховика с моментом инерции  $I_m$  закон сохранения кинетического момента для механической системы «космический аппарат + солнечные батареи + маховик» примет вид

$$I_{КА} \omega_{КА} + I_{СБ} \omega_{СБ} + I_m \omega_m = 0.$$

Чтобы исключить влияние движения солнечных батарей на космический аппарат (обеспечить  $\omega_{КА} = 0$ ), необходимо выполнить условие

$$I_{СБ} \omega_{СБ} + I_{М} \omega_{М} = 0.$$

Отсюда видно, что компенсирующий маховик должен вращаться в сторону, противоположную вращению солнечных батарей; его момент инерции зависит от отношения скоростей

$$I_{М} = -I_{СБ}(\omega_{СБ}/\omega_{М}).$$

Для слежения за Солнцем требуется вращение солнечных батарей с малой скоростью, близкой к орбитальной (порядка 0,06 град/с). Такое движение обеспечивает редукторный привод с большим передаточным отношением редуктора  $i$ . Скорости солнечных батарей  $\omega_{СБ}$  и приводного электродвигателя  $\omega_{дв}$  связаны соотношением

$$\omega_{СБ} = -\omega_{дв}/i.$$

Число пар внешних зубчатых зацеплений должно быть нечетным. В этом случае ротор электродвигателя и выходной вал редуктора, на котором закреплены солнечные батареи, будут вращаться в противоположные стороны.

Минимальный момент инерции (при  $\omega_{М} = \omega_{дв}$ )

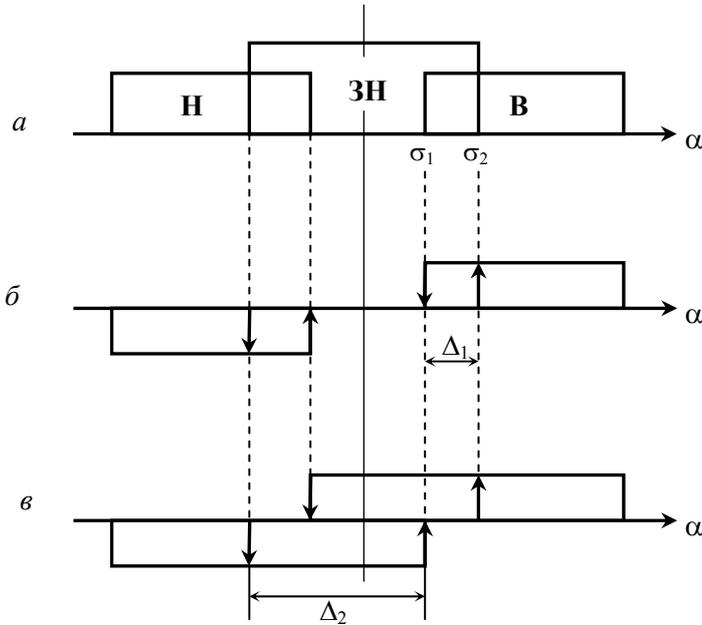
$$I_{М} = -I_{СБ}/i$$

обеспечивает установка компенсирующего маховика непосредственно на валу электродвигателя. Набор юстировочных колец позволяет настраивать его момент инерции на заданный момент инерции солнечных батарей с точностью до 1% [86].

## 7.5. АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ

При функционировании в автономном режиме часто применяется «старт-стопный» принцип слежения за Солнцем, при котором выходной вал привода движется с угловой скоростью, превышающей скорость движения Солнца по азимуту [4]. Включение и отключение привода в заданном направлении осуществляется при заданных углах азимута Солнца. Для обеспечения такого закона слежения требуется цифровой датчик Солнца с числом разрядов не менее трех. Оптическая ось датчика Солнца перпендикулярна поверхности солнечных батарей. Обычно датчик Солнца имеет три поля обзора. Поля обзора выбираются так, чтобы при всех годовых изменениях высоты Солнца и при всех ошибках слежения за азимутом Солнца, последнее не выходило из

полей обзора датчиков. Каждое поле обзора формируется при помощи сигналов фотодиодов, «видимость» Солнца у которых ограничена шторками (см. раздел 1.6). Поля обзора по их функциональному назначению можно обозначить **Н** – «назад», **В** – «вперед», **ЗН** – «зона нечувствительности». Солнце попадает в одно или два поля обзора в зависимости от угла рассогласования  $\alpha$  (угла ошибки). По первичным сигналам **Н**, **В** и **ЗН** (рис. 7.11, а) формируют выходную характеристику датчика Солнца с малым  $\Delta_1$  (рис. 7.11, б) или большим  $\Delta_2$  (рис. 7.11, в) гистерезисом.



**Рис. 7.11. Выходные характеристики датчика Солнца:**  
**а** – зоны обзора датчика Солнца; **б** – выходная характеристика с малым гистерезисом; **в** – выходная характеристика с большим гистерезисом

Средняя по времени ошибка слежения за Солнцем составит в первом случае

$$\sigma_* \approx \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2);$$

во втором

$$\sigma_* \approx \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_1),$$

где  $\sigma_1, \sigma_2$  – границы зон «видимости» датчика Солнца.

При использовании большого гистерезиса двигатель включается значительно реже, что приводит к уменьшению среднего потребления мощности, так как уменьшается число пусковых режимов.

При управлении от центральной ЦВМ движение солнечных батарей может производиться по командам: «движение вперед», «движение назад» и «стоп» [3]. Команды формируются на основании анализа сигналов датчика Солнца системы ориентации космического аппарата и сигналов обратной связи о фактическом положении солнечных батарей, поступающих из привода.

Следует отметить, что высокой точности наведения солнечных батарей на Солнце не требуется. Мощность солнечных батарей пропорциональна освещенности, а освещенность пропорциональна углу падения солнечных лучей (углу между нормалью к плоскости солнечных батарей и направлением на Солнце).

Пусть  $N$  – мощность при идеальной ориентации солнечных батарей. Потеря мощности при нарушении ориентации составит:

$$\Delta N = N(1 - \cos \delta),$$

где  $\delta$  – угол падения солнечных лучей.

Относительная потеря мощности

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{N(1 - \cos \delta)}{N} = 1 - \cos \delta;$$

при малых углах  $\delta$  ( $\cos \delta \approx 1 - \frac{1}{2} \delta^2$ ) может быть рассчитана по формуле

$$\frac{\Delta N}{N} \approx \frac{1}{2} \delta^2. \quad (7.3)$$

Из формулы (7.3) следует, что при погрешности ориентации  $\delta = 5 \div 10^\circ$  потеря мощности составит  $0,4 \div 1,5\%$ . В то же время суммарная ошибка расчета мощности солнечных батарей по времени полета за счет погрешности наших знаний о солнечной энергии, ошибок прогноза радиационной обстановки и температуры фотоэлементов достигает нескольких процентов [70]. В качестве материала фотоэлементов используется кремний или арсенид галлия. Удельная мощность солнечных батарей около Земли при максимальной освещенности и нормальной температуре составляет  $50 - 120 \text{ Вт/м}^2$ .

Обеспечивая слежение за Солнцем, система ориентации должна минимизировать влияние возмущающих факторов, связанных с движением солнечных батарей. При использовании «старт-стопного» режима существуют интервалы времени, когда солнечные батареи неподвижны и не оказывают возмущающего воздействия на корпус космического аппарата. В такие моменты времени могут проводиться наблюдения, требующие повышенной точности стабилизации.

На унифицированной космической платформе малого космического аппарата планируется движение солнечных батарей по командам центральной

ЦВМ [3]. Выбирается допустимый угол рассогласования. Типовой цикл слежения состоит из следующих этапов (рис. 7.12):

- солнечные батареи неподвижны, угол рассогласования нарастает из-за движения Солнца;
- когда угол рассогласования достигнет выбранного значения, выдается команда на движение батарей вслед за Солнцем;
- солнечные батареи поворачиваются со скоростью, значительно превышающей скорость Солнца, они «догоняют» Солнце и угол рассогласования обнуляется;
- солнечные батареи «обгоняют» Солнце; угол рассогласования возрастает;
- когда угол рассогласования достигнет выбранного значения, выдается команда на остановку солнечных батарей, затем цикл слежения повторяется.

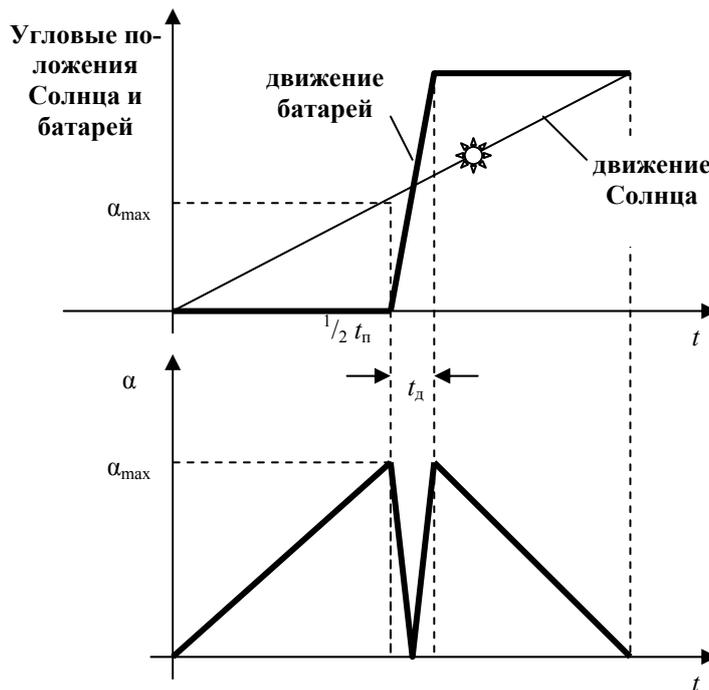


Рис. 7.12. Цикл слежения за Солнцем

На геостационарной орбите Солнце движется относительно космического аппарата со скоростью 0,0042 град/с. Скорость поворота солнечных батарей можно принять равной 0,6 град/с. Формула для оценки эффективности ориентации (7.2) преобразуется к виду [3]

$$E = \sin(\alpha_{\max})/\alpha_{\max},$$

где  $\alpha_{\max}$  – максимально допустимый угол рассогласования.

Расчеты по этой формуле дают возможность проанализировать снижение эффективности ориентации в зависимости от увеличения максимально допустимых углов рассогласования, а также определить соотношение времени движения  $t_d$  и времени неподвижного состояния солнечных батарей  $t_n$ . Если принять  $\alpha_{\max} = 6^\circ$ , то  $E = 0,9981$ , а отношение двух времен составит 0,011. Если вдвое увеличить допустимое рассогласование ( $\alpha_{\max} = 12^\circ$ ), то  $E = 0,9928$ , а  $t_d/t_n = 0,0088$ . Эти расчеты показывают, что за счет незначительного снижения эффективности ориентации можно обеспечить достаточно большие промежутки времени, в течение которых солнечные батареи будут оставаться в неподвижном состоянии, что дает возможность проводить на космическом аппарате сеансы наблюдений в отсутствие возмущающих моментов со стороны солнечных батарей.

На геостационарном метеорологическом космическом аппарате «Электро» использовались двухсторонние солнечные батареи, которые в зависимости от положения Солнца устанавливались в два фиксированных положения  $0^\circ$  и  $90^\circ$  (рис. 7.13). Ось вращения батарей параллельна оси тангажа. Суммарное время движения (перекладки) солнечных батарей за сутки не превышает одного часа.

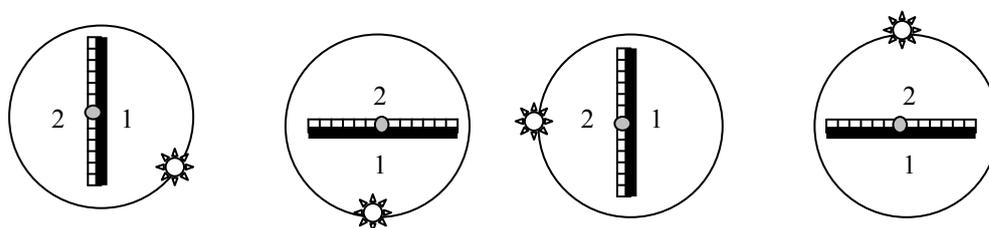


Рис. 7.13. Положение солнечных батарей в зависимости от положения Солнца (вид со стороны оси вращения)

На орбитальной станции «Мир» солнечные датчики щелевого типа, установленные на базовом блоке и модулях, объединялись в единую датчиковую систему, образуя круговое поле обзора ( $360^\circ$ ) с 16-ю секторами (зонами). В объединенную систему входят 16 фотодиодов, поле зрения каждого сектора составляет  $22,5^\circ$ . Секторам присваиваются номера от 1 до 16. Для передачи информации выходной сигнал (номер) сектора кодируется в двоичной системе счисления. Когда Солнце переходит из одного сектора в другой, включается привод солнечных батарей. Перестановка батарей в соседний сектор происходит со скоростью  $0,8^\circ/\text{с}$  и занимает примерно 30 с. Батареи «обгоняют» Солнце и устанавливаются в положение, соответствующее середине поля обзора, куда перешло Солнце. После этого привод отключается. Следующее включение привода происходит через 6 минут.

В «старт-стопном» режиме наибольшие возмущения возникают на участках разгона и торможения солнечных батарей. Для уменьшения возмущений следует по возможности медленно и плавно разгонять батареи до рабочей скорости перекладки.

Типовой процесс изменения во времени угловой скорости приводного двигателя изображен на рис. 7.14.



Рис. 7.14. Закон изменения угловой скорости приводного двигателя

Движение начинается с малой («ползучей») скорости. С этой скоростью производится выборка люфта редуктора. Уменьшается удар в момент трогания солнечных батарей после выборки люфта. Время движения с «ползучей» скоростью определяется размерами люфта. Затем происходит разгон батарей (с выбранным ускорением) до рабочей скорости. Двигаясь с рабочей скоростью, солнечные батареи поворачиваются на заданный угол. На последнем участке осуществляется торможение выбегом до полной остановки.

Один из путей снижения возмущающих моментов – равномерное вращение солнечных батарей со скоростью движения Солнца относительно космического аппарата. При идеальном вращении солнечных батарей возмущающие моменты не возникают. В реальных случаях величина возмущающих моментов будет определяться динамической ошибкой стабилизации скорости вращения батарей [3].

Для схемы установки солнечных батарей, изображенной на рис. 7.4, выполнение условия слежения за Солнцем (7.1) связано с существенно неравномерным вращением корневого и бокового приводов [15, 16]. По этой причине на корпус космического аппарата будут действовать внутренние возмущающие моменты. Компенсация возникающих моментов в таком случае возлагается на исполнительные органы системы ориентации космического аппарата.

## 7.6. ПРИВОД СОЛНЕЧНЫХ БАТАРЕЙ

Обобщенная функциональная схема привода солнечных батарей изображена на рис. 7.15. В конкретных типах приводов те или иные функциональные элементы могут отсутствовать.

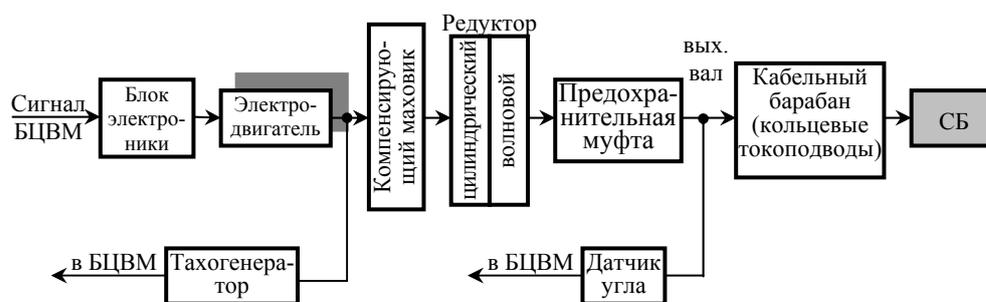


Рис. 7.15. Функциональная схема привода солнечных батарей

Активным звеном кинематической цепи является приводной электродвигатель, обеспечивающий разгон, вращение с постоянной скоростью, торможение и реверсирование солнечных батарей. В качестве приводных могут использоваться асинхронные, шаговые двигатели, бесконтактные двигатели постоянного тока.

На космических аппаратах «Метеор», «Ресурс», станции «Мир» использовались трехфазные асинхронные двигатели с короткозамкнутым ротором [102, 109]. Питание электродвигателя осуществлялось от электронного преобразователя, преобразующего постоянное напряжение бортовой сети в трехфазное напряжение прямоугольной формы. Направление вращения двигателя зависит от чередования фаз питающего напряжения. Скорость вращения находится в пределах 1200 – 2400 об/мин. На одном валу с электродвигателем расположен синхронный двухфазный тахогенератор с возбуждением от постоянного магнита. Сигнал тахогенератора (изменение чередования фаз напряжения с изменением направления вращения) используется для контроля направления вращения. Для быстрой остановки привода в заданном положении одновременно со снятием напряжения с электродвигателя осуществляется линейное короткое замыкание обмоток тахогенератора.

В [4] исследуется динамика системы ориентации с приводным двигателем постоянного тока. Он имеет беспазовую конструкцию якоря и возбуждение от высококоэрцитивных постоянных магнитов. В качестве датчика положения ротора и датчика частоты вращения двигателя применены пары «излучающий диод-фотодиод» и кодовая маска с определенным количеством отверстий, вращающаяся между ними.

На унифицированной космической платформе планируется применение шаговых двигателей [3]. К их преимуществам по сравнению с моментными двигателями относятся:

- простота регулирования частоты вращения;
- отсутствие датчиков положения ротора;
- наличие удерживающего момента при снятии напряжения питания;
- меньшие габариты, масса и потребление.

Два привода солнечных батарей с блоком электроники разработки ФГУП «НПП ВНИИЭМ» для космического аппарата «Монитор-Э» изображены на рис. 7.16.

Для определения углов поворота солнечных батарей (выходного вала привода) могут использоваться оптические, магнитомодуляционные датчики, синусно-косинусные трансформаторы, потенциометры.

В системах ориентации солнечных батарей существует сложная проблема передачи электрической энергии,



Рис. 7.16. Приводы солнечных батарей

выработанной вращающимися солнечными батареями, в «неподвижный» корпус космического аппарата, где расположены потребители электрической энергии. В результате вращения батарей кабели, передающие электрическую энергию и сигналы управления, подвержены циклическим механическим воздействиям. На протяжении всего полета кабели испытывают многочисленные циклы закручивания и откручивания.

Кабельный барабан служит для укладки транзитных кабелей при вращении привода. Участки кабеля в полости барабана обшиты специальной тканью для предохранения проводников кабеля от износа и уменьшения взаимного трения и трения о внутреннюю поверхность барабана. Неподвижные концы кабелей оканчиваются разъемами и стыкуются с герморазъемами. Угол поворота барабана ограничен упором. Когда кабельный барабан подходит к упору, срабатывает концевой выключатель и осуществляется реверс – поворот солнечных батарей в обратном направлении. Панель кабельного барабана является посадочной поверхностью для солнечных батарей [102, 109].

В современных приводах вместо кабельного барабана применяют кольцевые токоподводы. Они осуществляют электрическую связь подвижных и неподвижных частей системы ориентации.

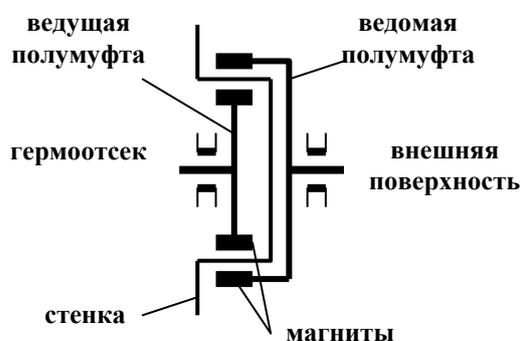


Рис. 7.17. Магнитная муфта

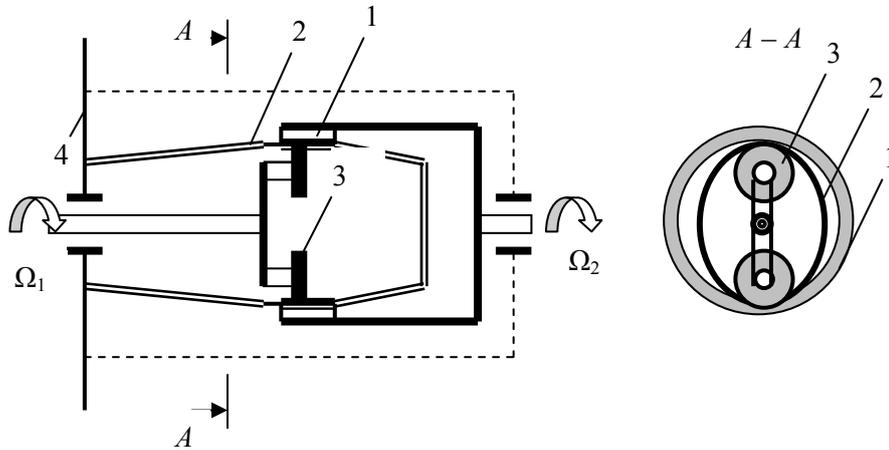
вращающего момента электродвигателя через герметическую стенку к механизму вращения. Муфта состоит из двух полумуфт разделенных герметичной стенкой (рис. 7.17). На ярме каждой полумуфты равномерно установлены по тридцать шесть постоянных магнитов. При повороте ведущей полумуфты, закрепленной на выходном валу редуктора, возникают касательные силы взаимодействия между магнитами полумуфт, вызывающие поворот ведомой полумуфты, связанной с механизмом вращения. Электродвигатель и редуктор расположены в герметичном отсеке станции, механизм вращения, кабельный барабан и солнечные батареи – на внешней поверхности [102, 109].

Понижающий редуктор привода с передаточным числом  $i = 14400$  состоит из пяти ступеней цилиндрических зубчатых передач с наружным зацеплением и шестой (последней) ступени с внутренним зацеплением.

В приводах станции «Мир», модулей «Заря» и «Звезда» международной космической станции предохранительная магнитная муфта является ограничителем момента, действующего на привод со стороны кабельного барабана. Она защищает редуктор с большим передаточным отношением от поломки при испытаниях и нестандартных ситуациях. Одновременно муфта выполняет важную функцию – служит для передачи

В качестве выходного звена кинематической цепи привода может использоваться волновая зубчатая передача, имеющая высокую крутильную жесткость, малый люфт и малую кинематическую погрешность [4].

Волновая передача основана на передаче и преобразовании движения путем волнового деформирования одного из звеньев механизма [52]. Принцип действия волнового редуктора рассмотрим на примере волновой фрикционной передачи (рис. 7.18).



**Рис. 7.18. Волновая передача: 1 – жесткое колесо; 2 – гибкое колесо; 3 – генератор волн деформации; 4 – стенка гермоотсека**

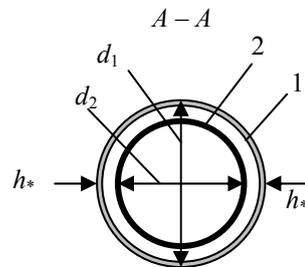
Основными элементами волновой передачи являются генератор волн деформации, гибкое и жесткое колеса. Гибкое колесо выполнено в виде кольца, переходящего в гибкий цилиндр. Кинематическим звеном является гибкое кольцо, а гибкий цилиндр играет роль упругой связи деформируемого кольца с корпусом редуктора.

Генератор волн деформации имеет два ролика, соединенных общим водилом.

Наружный диаметр  $d_2$  гибкого колеса 2 (в недеформированном состоянии) меньше внутреннего диаметра  $d_1$  жесткого колеса 1 (рис. 7.19).

При вращении генератор волн описывает окружность диаметром  $d_1$ . Сцепление жесткого колеса с гибким происходит в местах деформации гибкого колеса, вызванной вращением генератора. В фрикционной передаче связь между колесами осуществляется за счет трения, в редукторах – за счет контакта зубьев. Гибкие колеса имеют наружные зубья, жесткие колеса – внутренние зубья.

В результате деформации точки гибкого колеса совершают колебания вдоль радиуса.



**Рис. 7.19. Размеры колес: 1 – жесткое колесо; 2 – гибкое колесо без генератора волн деформации**

Максимальное перемещение точки гибкого колеса вдоль радиуса составляет

$$h_* = 1/2 (d_1 - d_2). \quad (7.4)$$

Текущее перемещение точки  $h$  зависит от угла поворота генератора  $\varphi_1$ . График  $h(\varphi_1)$  в виде косинусоиды с амплитудой  $h_*$  представляет собой картину поперечной волны (колебания точки происходят в направлении, перпендикулярном распространению волны). При вращении генератора волна бежит по поверхности гибкого колеса. Поэтому передачу называют волновой, а звено с роликами – генератором волн деформации. Период волны зависит от числа деформирующих роликов в генераторе. Передача с двумя роликами является двухволновой, поскольку за один оборот генератора волна деформации «пробегает» дважды.

Когда вращается генератор, гибкое деформированное колесо обкатывается по жесткому. За один оборот генератора при отсутствии скольжения между колесами жесткое колесо поворачивается на угол, определяемый разностью длин окружностей двух колес  $\Delta l$ . С учетом (7.4)

$$\Delta l = \pi d_1 - \pi d_2 = 2\pi h_*.$$

За один оборот генератора ( $\varphi_1 = 2\pi$ ) жесткое колесо повернется в направлении вращения генератора на угол

$$\varphi_2 = \Delta l / d_1 = 2\pi h_* / d_1 = 2\pi (d_1 - d_2) / d_1.$$

Передаточное отношение передачи  $i$  определяется как отношение угловых скоростей или углов поворотов генератора и жесткого колеса

$$i = \Omega_1 / \Omega_2 = \varphi_1 / \varphi_2 = d_1 / 2h_* = d_1 / (d_1 - d_2).$$

Передаточное отношение передачи может быть сделано большим за счет небольшой разности диаметров колес. В зубчатых передачах отношение диаметров колес заменяется отношением чисел зубьев. В волновых редукторах передаточное число может достигать 300. Зубчатую волновую передачу изобрел в 1959 г. американский инженер В. Массер [52]. В [4] описывается привод, в комбинированном редукторе которого наряду с обычными зубчатыми колесами применена двухволновая передача с генератором волн в виде овального кулачка, с посаженным на него гибким шарикоподшипником. Под воздействием кулачка наружное кольцо подшипника принимает овальную форму с двумя возвышениями, деформирующими гибкое колесо и вводящими его в зацепление с жестким колесом в двух диаметрально противоположных зонах. В них обеспечивается многозубчатое зацепление при минимальных зазорах. Это предопределяет малую кинематическую погрешность передачи (0,6'), незначительный мертвый ход (4,5') выходного вала, достаточно высокую жесткость кинематической цепи (3400 Н·м/рад). Цилиндрическая часть редуктора и волновая передача ( $i = 104$ ) обеспечивают общее передаточное отношение  $i = 61409$ .

Волновой редуктор обеспечивает передачу движения без нарушения герметичности: быстровращающиеся части привода расположены в герметичном отсеке (позиция 4 на рис. 7.18) и работают в условиях нормальной атмосферы.

**ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС  
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА**

- ◆ Уравнения движения центра масс космического аппарата
  - ◆ Небесная сфера, экваториальная система координат и элементы орбиты
- ◆ Управление движением центра масс космического аппарата

Возможность раздельного изучения движения центра масс космического аппарата и движения вокруг центра масс является важным свойством космического аппарата, которое отличает его от других движущихся объектов.

При исследовании орбитального движения космических аппаратов обычно пренебрегают их размерами, полагают, что вся масса космического аппарата сосредоточена в одной точке, называемой центром масс. После этого движение космического аппарата рассматривается как движение материальной точки. Движение материальной точки под действием одной центральной силы гравитационного притяжения называется *невозмущенным* или *кеплеровским*. Полагают, что притягивающее тело однородно и имеет форму сферы, а его гравитационное поле совпадает с центральным полем притягивающей точки.

### 8.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Траектория движения космического аппарата определяется величиной и направлением действующих на него сил. К этим силам относятся тяга реактивных двигателей, сила притяжения Земли, силы взаимодействия космического аппарата с окружающей средой.

Уравнение движения центра масс космического аппарата как абсолютно твердого тела с массой  $m$  можно записать в виде

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (8.1)$$

где  $\mathbf{a}$  – вектор ускорения космического аппарата;  $\mathbf{F}$  – главный вектор внешних сил.

Если на космический аппарат действует только тяга двигателей  $\mathbf{P}$  и сила притяжения  $\mathbf{G}$ , то из уравнения (8.1) получим

$$m d\mathbf{V}/dt = \mathbf{P} + \mathbf{G}, \quad (8.2)$$

где  $\mathbf{V}$  – вектор скорости центра масс космического аппарата.

Тяга реактивного двигателя пропорциональна секунднему расходу массы топлива  $m_c$  и скорости истечения  $\mathbf{w}$ , т. е.

$$\mathbf{P} = -m_c \mathbf{w} = -\mathbf{w} dm/dt.$$

Интегрирование уравнения (8.2) при условии, что сила притяжения отсутствует ( $\mathbf{G} = 0$ ), а направление тяги реактивного двигателя остается неизменным, дает известную формулу К.Э. Циолковского, связывающую изменение скорости космического аппарата с расходом массы [81]:

$$V_k - V_n = w \ln(m_n/m_k),$$

где  $V_n, V_k$  – начальная и конечная скорости космического аппарата;  $m_n, m_k$  – начальная и конечная массы космического аппарата.

Применительно к задачам ориентации ближе другой случай, когда реактивные двигатели выключены и движение космического аппарата происходит под действием силы притяжения Земли. При  $\mathbf{P} = 0$  из уравнения (8.2) получим

$$m d\mathbf{V}/dt = \mathbf{G}. \quad (8.3)$$

Если поле тяготения является *центральной* (его особенность заключается в том, что в любой точке пространства сила притяжения направлена к центру Земли и величина ее для данного расстояния от центра Земли постоянна), то имеет место случай так называемого *кеплерова движения* космического аппарата [64, 78, 81].

При расчете кратковременных движений космического аппарата можно считать Землю твердым сферическим телом с равномерно распределенной массой. Тогда потенциальная энергия космического аппарата  $E_n$  и сила притяжения  $\mathbf{G}$  могут быть вычислены по формулам [1, 81]

$$E_n = -\mu m/r;$$

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g} = -\mu m\mathbf{r}/r^3,$$

где  $\mathbf{g} = -\mu/r^2$  – ускорение силы тяжести;  $\mu \cong 4 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$  – гравитационный параметр.

Так как

$$\mathbf{G} = -\frac{\partial E_n}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

то уравнение движения (8.3) примет вид

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\partial E_n}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (8.4)$$

Перемножая равенство (8.4) и

$$\mathbf{V} = d\mathbf{r}/dt,$$

получим

$$m\mathbf{V} \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\partial E_n}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Поскольку

$$m\mathbf{V} \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{V^2}{2} \right)$$

и

$$\mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r \frac{dr}{dt},$$

то

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mV^2}{2} \right) = - \frac{\partial E_n}{\partial r} \frac{dr}{dt}.$$

Выражение в скобках определяет *кинетическую энергию* космического аппарата

$$E_k = \frac{1}{2} mV^2.$$

Поэтому

$$\frac{dE_k}{dt} = - \frac{dE_n}{dt}.$$

Отсюда следует, что в процессе кеплерова движения полная энергия космического аппарата остается постоянной, т. е.

$$E_k + E_n = \text{const.}$$

Умножим обе части равенства (8.4) векторно на  $\mathbf{r}$ :

$$m \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) = - \frac{\partial E_n}{\partial r} \frac{1}{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}).$$

Поскольку

$$\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0} \text{ и } \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}),$$

то

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) = \mathbf{0}$$

или

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{V} = \mathbf{H}, \tag{8.5}$$

где  $\mathbf{H}$  – постоянный вектор.

Левая часть формулы (8.5) определяет момент количества движения космического аппарата.

Таким образом, кеплерово движение характеризуется постоянством полной энергии  $E_k + E_n$  и постоянством кинетического момента  $\mathbf{r} \times m\mathbf{V}$ . Из равенства (8.5) следует, что траектория кеплерова движения лежит в плоскости, проходящей через центр притяжения и перпендикулярной вектору  $\mathbf{H}$ .

Чтобы найти траекторию движения центра масс космического аппарата, удобно рассматривать его плоское движение в полярной системе координат. Положение центра масс космического аппарата определяется радиусом  $r$  и полярным углом  $\vartheta$ , который отсчитывается от некоторой оси. Выражение, связывающее эти величины, имеет вид [53, 81]

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}.$$

Это уравнение в полярных координатах конического сечения с эксцентриситетом  $e$  и фокальным параметром  $p$ . Величины  $e$  и  $p$  вычисляются через начальные условия  $r_0$  и  $V_0$ . Полярный угол  $\vartheta$  называется *истинной аномалией*.

Форма орбиты зависит от эксцентриситета  $e$ . Если  $e = 0$ , то  $r = p = \text{const}$  и траекторией космического аппарата является окружность. Если  $0 < e < 1$ , то траектория – эллипс, при  $e = 1$  – парабола, при  $e > 1$  – гипербола. Из уравнения невозмущенного движения космического аппарата можно определить скорости, необходимые для вывода космического аппарата на круговую, эллиптическую и параболическую орбиты.

*Первая космическая (круговая) скорость*

$$V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \cong 7,9 \text{ км/с}$$

обеспечивает вывод космического аппарата на круговую орбиту ( $e = 0$ ); вторая космическая скорость

$$V_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2}V_1 \cong 11,2 \text{ км/с}$$

– вывод космического аппарата на параболическую траекторию ( $e = 1$ ). Для дальних полетов рассматривается еще третья космическая скорость  $V_3 = 16,6 \text{ км/с}$ , с которой космический аппарат выходит за пределы Солнечной системы.

В небесной механике движение космического аппарата в поле тяготения одной планеты рассматривается как *задача двух тел* [1, 64, 81].

Космические аппараты, вращающиеся вокруг Земли, имеют эллиптические орбиты (рис. 8.1).

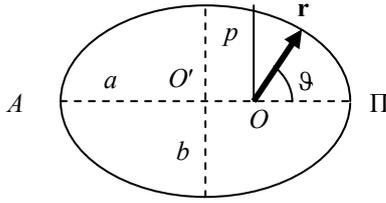


Рис. 8.1. Эллиптическая орбита

Положение космического аппарата на орбите определяется радиусом – вектором  $r$ , проведенным из центра притяжения  $O$  в движущуюся точку – центр масс космического аппарата. Точка  $\Pi$ , ближайшая к центру притяжения, называется *перигеем*, наиболее удаленная точка  $A$  – *апогеем*. Размеры орбиты характеризуют большая полуось эллипса  $a$  и малая полуось  $b$ . Эксцентриситет  $e$  (форма орбиты) определяется как отношение расстояния между центром орбиты  $O'$  и ее фокусом  $O$  к большой полуоси

$$e = OO'/a = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Перигейное  $r_{\Pi}$  и апогейное  $r_a$  расстояния, а также фокальный параметр  $p$ , вычисляются по формулам

$$r_{\Pi} = a(1 - e); \quad r_a = a(1 + e); \quad p = a(1 - e^2).$$

Соответственно большая полуось эллипса

$$a = \frac{1}{2} (r_{\Pi} + r_a)$$

может рассматриваться как среднее расстояние движущегося центра масс от притягивающего центра.

Истинная аномалия  $\vartheta$  отсчитывается от линии, проведенной из центра притяжения в точку  $\Pi$ .

В формулу для вычисления периода обращения космического аппарата  $T$  входят большая полуось эллипса и гравитационный параметр [1, 53]

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}.$$

При  $e = 0$  ( $a = r$ ) эллиптическая орбита становится круговой. На круговые околополярные орбиты высотой 800 – 900 км запускаются метеорологические спутники серии «Метеор» [53].

## 8.2. НЕБЕСНАЯ СФЕРА, ЭКВАТОРИАЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ И ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТЫ

Изучение движения небесных тел и космических аппаратов всегда связано с определенной системой отсчета. Все астрономические системы координат строятся по единому принципу: выбирается основная (фундаментальная) плоскость и указывается направление основной (главной) оси координат. В основу сферической астрономии положено понятие *небесной сферы*, центр которой совпадает с началом  $O$  рассматриваемой системы отсчета, а радиус может быть произвольным (обычно его полагают равным условной единице) [1]. Начало системы координат может находиться на земной поверхности (топоцентрическая небесная сфера, в центре Земли (геоцентрическая небесная сфера) и т. д.

Прямая, проведенная через центр  $O$  параллельно оси суточного вращения Земли, называется *осью мира*. Она пересекает небесную сферу в *полюсах мира*. Полюс  $P_N$ , расположенный ближе к проекции Полярной звезды на небесную сферу, называется северным полюсом мира, другой полюс  $P_S$  – южным (рис. 8.2). Сечение небесной сферы плоскостью, проходящей через центр  $O$  перпендикулярно оси мира  $P_N P_S$ , образует окружность, называемую *небесным экватором*. Экватор делит небесную сферу на два полушария – северное и южное.

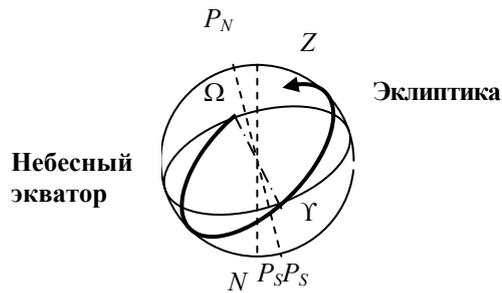


Рис. 8.2. Небесная сфера

В каждой точке на поверхности Земли существует направление, которое может считаться неизменным. Это отвесная линия. Ее направление дает отвес – грузик, висящий на нити. Отвесная линия, проходящая через глаз наблюдателя, пересекает небесную сферу в точке зенита  $Z$ . Зенит есть наивысшая точка над головой наблюдателя. Противоположная зениту точка небесной сферы называется надиром  $N$ . Плоскость, перпендикулярная к отвесной линии, называется горизонтальной. *Математическим горизонтом* называется линия пересечения небесной сферы с горизонтальной плоскостью, проходящей через центр небесной сферы.

Плоскость, проведенная через ось мира и вертикаль (линию отвеса)  $ZN$ , называется плоскостью небесного меридиана. Пересекаясь с небесной сферой, эта плоскость образует линию небесного меридиана. Вертикальная плоскость, проходящая через Полярную звезду и через наблюдателя, будет приблизительно плоскостью меридиана. В любом месте Земли плоскость небесного меридиана совпадает с плоскостью географического меридиана этого же места. Угол между осью мира и линией отвеса зависит от местонахождения наблюдателя на земном шаре [45].

Следом Солнца на небесной сфере при годовом движении Земли является окружность, называемая эклипстикой. Иначе говоря, *эклиптика* есть линия пересечения небесной сферы с плоскостью земной орбиты. Она пересекает небесный экватор в двух равноденственных точках. Точка, в которой Солнце в своем движении по эклиптике переходит из южного полушария в северное (относительно экватора), называется *точкой весеннего равноденствия* (точкой весны) и обозначается знаком зодиакального созвездия Овна  $\Upsilon$  (20 – 22 марта). Вторая точка, в которой Солнце в своем движении по эклиптике переходит из северного полушария в южное, называется точкой осеннего равноденствия (точкой осени) и обозначается знаком зодиакального созвездия Весов  $\Omega$  (23 – 24 сентября).

Двенадцать созвездий, через которые проходит эклиптика, называются *зодиакальными*. Зодиак – слово греческое, означающее «круг животных», так как большинство названий этих созвездий – это названия животных.

Угол, под которым пересекаются плоскости эклиптики и экватора, называется наклоном эклиптики к экватору. Он примерно равен  $23^\circ 26'$ .

В своем суточном вращении вокруг оси мира каждое светило дважды пересекает меридиан. Эти явления называются *кульминациями*. Один раз светило занимает самое высокое положение над горизонтом – это верхняя кульминация, а другой раз самое низкое – это нижняя кульминация. Момент верхней кульминации Солнца называется истинным полднем, момент нижней кульминации – истинной полночью. Высота верхней кульминации над горизонтом меняется в течение года. Самое высокое положение Солнце занимает 22 июня. Этот день называют *днем летнего солнцестояния*. Самое низкое положение Солнце занимает 22 декабря; это *день зимнего солнцестояния* [45].

Положение небесных тел и космических аппаратов на небесной сфере часто определяется в экваториальной системе координат. Основной в ней является плоскость небесного экватора, а главная ось проходит через точку весны [1]. От точки весны ведется отсчет углов по дуге экватора. Положение плоскости экватора и точки весны  $\Upsilon$  с течением времени меняется. Поэтому для определенности

всегда указывают эпоху (момент времени), которой соответствует принятое положение плоскости экватора и точки весны. Положение любой точки на небесной сфере определяется углами  $\alpha$  и  $\delta$  (рис. 8.3). Дуга экватора  $\Upsilon\Sigma'$  называется *прямым восхождением* светила и обозначается  $\alpha$ , угол  $\delta$  называется *склонением*. Углы  $\alpha$  и  $\delta$  в экваториальной системе координат не зависят от суточного вращения небесной сферы.

Склонение выражается в градусах и к северу от экватора считается положительным, а к югу – отрицательным. Прямое восхождение выражается в единицах времени подобно географической долготе.

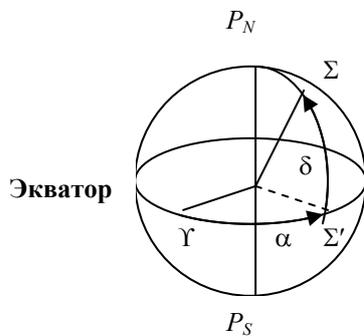


Рис. 8.3. Экваториальная система координат

Элементами орбиты называются величины, характеризующие положение орбиты в пространстве, ее размеры и форму [1, 53, 78, 87]. Элементы, определяющие положение плоскости орбиты и ориентацию орбиты в этой плоскости, вводятся следующим образом. Пусть космический аппарат движется в экваториальной системе координат ( $Oxy$  – плоскость экватора,  $Y$  – точка весеннего равноденствия). Прямая  $NN'$ , по которой пересекаются плоскости орбиты и экватора, называется *линией узлов* (рис. 8.4, а). Если из полюса орбиты  $C$  движение космического аппарата наблюдается происходящим против часовой стрелки, то точка  $N$  называется *восходящим узлом*, а точка  $N'$  – *нисходящим*. Дуга  $YN$ , обозначаемая  $\Omega$ , называется *долготой восходящего узла*. Угол  $i$  под которым пересекаются плоскости орбиты и экватора, называется *наклоном орбиты*. Дуга  $NP'$ , обозначаемая  $\omega$ , называется *угловым расстоянием перигея*, т. е. ближайшей к Земле точки орбиты  $P$  (рис. 8.4, б).

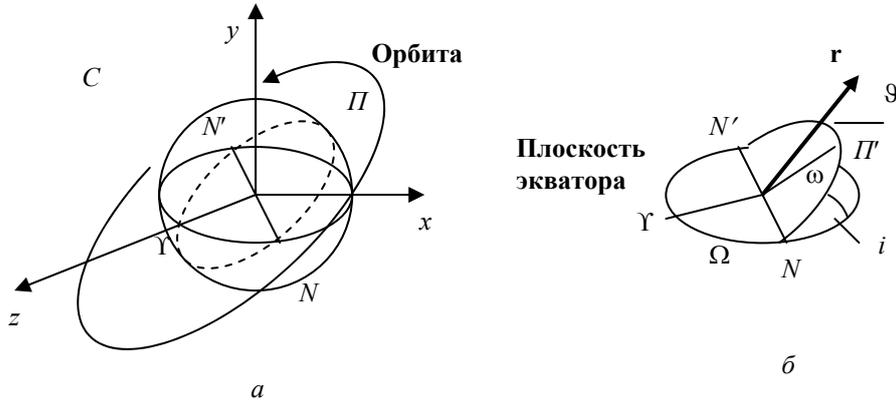


Рис. 8.4. Линия узлов (а) и элементы орбиты (б)

Величины  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\omega$  составляют первую группу элементов орбиты. Величины  $\Omega$ ,  $i$  характеризуют положение плоскости орбиты, а  $\omega$  – ориентацию орбиты в этой плоскости.

Размеры и форму орбиты определяют фокальный параметр  $p$  и эксцентриситет  $e$ . Вместо  $p$  может использоваться большая полуось орбиты  $a$ . Шестым элементом является момент прохождения центра масс космического аппарата через перигей  $\tau$ . Вместо  $\tau$  может использоваться истинная аномалия  $\vartheta$  – угол между радиусом-вектором орбиты и линией, соединяющей начало координат с перигеем.

Величины  $p$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $\tau$  называются *кеплеровскими элементами орбиты*.

По величине наклона  $i$  различают следующие орбиты

- наклонные прямые ( $0^\circ < i < 90^\circ$ );
- наклонные обратные ( $90^\circ < i < 180^\circ$ );
- полярные ( $i = 90^\circ$ );
- экваториальные прямые ( $i = 0^\circ$ );
- экваториальные обратные ( $i = 180^\circ$ ).

Кеплерово движение космического аппарата в точности никогда не осуществляется. На практике при вычислении элементов орбиты приходится учитывать возмущающие факторы, которые вызывают отклонение от кеплеровского движения.

К ним относятся несферичность Земли, силы притяжения Солнца, Луны и планет, аэродинамические и другие силы, световое давление. Различают вековые и периодические возмущения.

Вековые возмущения изменяют элементы орбиты пропорционально времени. Периодические возмущения повторяются через определенные интервалы времени.

Под действием возмущающих сил элементы орбиты непрерывно меняются. Определение элементов орбиты космического аппарата при действии возмущающих сил – одна из трудных задач небесной механики. Возмущающие силы влияют на форму орбиты и вызывают поворот (прецессию) плоскости орбиты. Обычно вследствие прецессии орбиты с большей скоростью изменяется долгота восходящего узла  $\Omega$  и с меньшей скоростью наклон орбиты  $i$ .

Наиболее удобным и распространенным методом учета постоянно действующих возмущений является *метод оскулирующих элементов* [1, 81, 87]. Его сущность заключается в том, что эллиптические элементы  $p, e, i, \Omega, \omega, \tau$ , являющиеся постоянными в невозмущенном (кеплеровском) движении, при расчете возмущенного движения космического аппарата рассматриваются как функции времени. Во многих случаях эти функции оказываются плавными и медленно меняющимися, что облегчает расчет движения космического аппарата в течение длительного времени.

Поскольку кеплерово движение хорошо изучено, бывает удобно при отыскании точных траекторий использовать кеплеровы орбиты в качестве опорных. Задача сводится к корректировке параметров опорной орбиты при действии возмущающих факторов.

Истинная (оскулирующая) орбита представляет собой огибающую семейства эллиптических орбит, элементы которых являются определенными функциями времени. Функции  $p(t), e(t), i(t), \Omega(t), \omega(t), \tau(t)$  называются *оскулирующими элементами* истинного движения космического аппарата. Изменение этих элементов описывается системой дифференциальных уравнений, в которых в качестве независимой переменной обычно используется истинная аномалия  $\vartheta$ .

Космические аппараты для исследования природных ресурсов Земли «Ресурс» запускаются на солнечно-синхронные орбиты высотой 600 – 800 км. Такие орбиты являются наклонными обратными, их наклон к плоскости экватора близок к  $98^\circ$ .

У солнечно-синхронных орбит долгота восходящего узла  $\Omega(t)$  меняется в том же направлении, что и прямое восхождение Солнца  $\alpha_\odot$ . При этом разность  $\Omega - \alpha_\odot$  удерживается в некотором достаточно узком диапазоне изменений.

### 8.3. УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЦЕНТРА МАСС КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Движение, в процессе которого центр масс космического аппарата под действием управляющих сил переходит из некоторого начального положения в заданное конечное положение, называется управляемым. Типичными видами управляемого движения являются маневры, сближение космических аппаратов, снижение в атмосфере планеты, посадка [77, 78, 81, 113].

Маневром называется управляемое движение, в процессе которого космический аппарат переходит с одной орбиты на другую. Различаются маневры в плоскости орбиты, маневры, при которых меняется плоскость орбиты, и пространственные маневры.

Во время маневра управляющая сила действует не постоянно. Траектория движения космического аппарата содержит активные и пассивные участки. Частным случаем маневра является коррекция орбиты – управляемое движение, по окончании которого параметры орбиты принимают заданное значение.

В состав системы управления движением входят чувствительные элементы, бортовая ЦВМ и исполнительные органы. Чувствительные элементы вырабатывают информацию о координатах и скорости центра масс космического аппарата в выбранной системе координат. Для получения необходимой информации могут использоваться радиотехнические, астрономические, инерциальные и другие способы измерения.

Информация, поступающая с чувствительных элементов, обрабатывается в БЦВМ. Сложность алгоритмов управления зависит от характера маневров.

В качестве исполнительных органов используются реактивные двигатели. Чтобы изменять направление силы тяги в выбранной системе координат, необходимо поворачивать реактивные двигатели. Нужное направление силы тяги можно получить путем поворота всего космического аппарата, используя для этой цели систему управления ориентацией. На короткое время движения центра масс и вокруг центра масс оказываются связанными.

Задача синтеза закона управления состоит в нахождении управляющих ускорений, которые переводят космический аппарат из начального положения в заданное конечное и при этом оптимизируют некоторый критерий качества. Высокая стоимость выведения полезной нагрузки на орбиту делает чрезвычайно важным критерием качества расход топлива за время маневра. Другими критериями качества могут служить функционалы, характеризующие точность приведения космического аппарата в конечное состояние. В результате синтеза определяется программа управления. Решить такую задачу в полной постановке не удастся из-за наличия ограничений и наличия случайных факторов. Обычно ищутся приближенные решения.

Для выполнения космических полетов необходимо знать параметры движения космического аппарата. Их непосредственное измерение затруднительно, а порой и невозможно. Определение параметров осуществляют нави-

гационные системы, которые используют обычно косвенные методы измерения. Первичной информацией является текущее время полета, время пролета космического аппарата над определенными ориентирами, составляющие линейных ускорений и скоростей и т. д. Измеренные величины обрабатываются в бортовой ЦВМ с целью получения навигационной информации: координат космического аппарата и его скоростей относительно осей выбранной системы координат [87].

Известны автономные и неавтономные навигационные системы. В первом случае навигационные параметры вычисляются непосредственно на борту космического аппарата. Неавтономные системы используют информацию, поступающую от наземных радиотехнических, оптических и других систем. Создаются навигационные спутники [53].

В настоящее время навигационные задачи решаются при помощи группировок навигационных спутников – российской Глонасс и американской GPS.

Базовое предприятие НПП ВНИИЭМ на протяжении многих лет ведет работы по совершенствованию космических аппаратов дистанционного зондирования Земли, систем ориентации и стабилизации космических аппаратов и их функциональных элементов. В настоящее время предпочтение отдается многофункциональным малым космическим аппаратам и унифицированным системам ориентации. Унифицированная система должна иметь сетевую структуру, позволяющую заменять и комбинировать различные функциональные элементы. Для их подключения к сети могут использоваться универсальные адаптеры на базе современных программируемых логических интегральных схем (ПЛИС). Программирование ПЛИС позволяет подключать к сети различные по физической природе функциональные элементы.

Развитие и распространение цифровых систем ориентации породило новое понятие – «живучесть системы» [71]. Предполагается, что система обладает живучестью, если после временной потери своих целевых характеристик, вызванных сбоями БЦВМ, ошибками бортового программного обеспечения, отказами функциональных элементов, она способна автоматически восстанавливать полностью или частично свои целевые характеристики.

Достижение высокой точности ориентации космических аппаратов связывается с бескарданными инерциальными системами (БИНС), которые корректируются звездными датчиками.

Перспективными исполнительными органами автоматических космических аппаратов по-прежнему остаются электродвигатели-маховики. Они используются во всех динамических режимах системы ориентации и стабилизации, в том числе для многократного восстановления ориентации при сбоях и отказах аппаратуры. Возможны нетрадиционные схемы установки двигателей-маховиков. Применение избыточных маховичных систем (с числом двигателей-маховиков больше трех) способствует повышению надежности и ресурса системы [14].

Для сброса кинетического момента космических аппаратов после их отделения от ракеты-носителя и разгрузки электродвигателей-маховиков на низких орбитах целесообразно использование электромагнитов, взаимодействующих с магнитным полем Земли [60].

Общей тенденцией развития высокоточных систем с длительным сроком эксплуатации является применение бортовых ЦВМ не только в тракте управления исполнительными органами, но также для диагностики, поиска неисправностей и переключения на резерв.

Изучается возможность использования сигналов навигационных спутников (российская группировка «Глонасс» и американская GPS) для целей ориентации.

## ПРЕДМЕТНЫЙ АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

### **А**втоколебания 148

Алгоритмы управления движением  
солнечных батарей 277 – 282  
– гиродинами 217 – 243  
– маховичными системами 161 – 170  
Аномалия истинная 291  
Апогей 292  
Аппарат космический 10, 23, 62, 87  
– малый 53, 258  
– «Метеор» 6, 10, 19, 22, 92, 94, 104,  
108, 258, 263, 274, 292  
– «Омега» 132, 270  
– «Нимбус» 21  
– «Ресурс» 6, 10, 132, 140, 149, 274, 296  
– «Электро» 6, 10, 11, 20, 31, 34,  
104, 108, 132, 141, 149, 281  
Астрономия сферическая 293  
Атмосфера Земли 99, 102, 107

### **Б**инормаль 19, 105, 271

Батарея солнечная 92, 279

### **В**ектор свободный 75, 134

Вертикаль инфракрасная 138  
– местная 20, 27, 31  
Восхождение прямое светила 294  
Время программного поворота 129, 130

### **Г**иродин 60, 184

Гироорбитант 18, 19, 138  
Гироскоп двухстепенный 58, 184  
– силовой 58 – 60, 184  
– трёхстепенный 19, 42, 60, 192  
Гиростабилизатор 51, 184  
Гиростат 89  
Гироузел 36, 43, 59  
Горизонт 20, 105, 272, 293  
– инфракрасный 26, 138  
Гравитационная постоянная 93, 289, 292

### **Д**авление световое 102, 103, 105

Датчик внешней информации 17  
– вертикали Земли 19 – 31

– звёздный 34 – 36  
– инерциальный 18  
– момента 19, 41, 43  
– Солнца 31 – 34, 271  
– угла ориентации 17 – 19  
– прецессии гироина 180  
– угловой скорости 36  
– Холла 142  
– гироскопический 36 – 44  
Двигатель-маховик 51 – 57  
– кольцевой 55  
– постоянного тока 141, 149  
– шаровой 56, 57, 89, 134, 161  
Двигатель реактивный 45, 110  
– электрореактивный 50  
Движение боковое 85, 91  
– кеплеровское 288 – 291  
– космического аппарата,  
содержащего подвижные массы 88  
– невозмущённое 288  
– продольное 85, 91  
– Солнца 272, 280  
Демпфирование колебаний 42, 119, 137  
Динамика 75  
Долгота восходящего узла 295

### **З**адача двух тел 291

Зенит 293

### **И**злучение инфракрасное Земли 21

Имитатор инфракрасного излучения  
Земли 31  
Импульс минимально возможный 49, 50,  
123  
– тяги 121  
– удельный 47, 121, 123, 128

### **К**ватернионы 139

Классификация датчиков угла  
ориентации 19  
– систем ориентации 13, 14  
Колебания двусторонние  
одноимпульсные 119 – 123  
– односторонние 123 – 126

Координатор солнечный  
Косинусы направляющие 68, 73, 78, 93, 134, 162  
Коэффициент использования кинетического момента 167  
– отражения 102  
– расхода массы 122, 128  
– энергии 146  
Кратность изменения управляющего момента 175  
Критерий устойчивости Гурвица 156, 157, 160  
Кульминация светила 294

**Л**иния переключений 116 – 119  
– узлов 295

**М**агнитное поле Земли 258 – 260  
Магнитометр 257, 258  
Магнитопривод 44, 107, 258  
Магнитопровод 141, 142  
Матрица поворота 68 – 71  
Маховик инерционный 51  
– кольцевой 55, 64, 79  
– компенсирующий 276, 277  
– реактивный 46, 51  
– сферический 55  
Меридиан небесный 293  
Метод фазовой плоскости 112  
– компенсации 17, 31, 41  
Моделирование математическое 73, 143, 194  
Модель математическая гиродина 194 – 204  
– двигателя-маховика 143 – 145  
– космического аппарата 83  
Момент аэродинамический 99, 92, 107  
– внутренний 91  
– гироскопический 37, 190, 192, 244  
– гравитационный 92 – 99  
– инерции 62 – 68, 77  
– осевой 63  
– полярный 63  
– центробежный 63  
– относительно произвольной оси 66, 67  
– кинетический 76, 77, 79

– количества движения 76  
– магнитный 107, 260  
– сил светового давления 102 – 106  
– силы 75  
– управляющий 14, 83, 84, 86, 90, 112  
Муфта магнитная 284

**Н**адёжность аппаратуры 16  
Надир 293  
Наклон плоскости орбиты 295  
– эклиптики 294  
Напор скоростной 99, 100  
Настройка гиросиловой системы 226 – 243  
Неустойчивость статическая 85, 95, 101, 102

**О**бласть изменения вектора кинетического момента гиросиловой системы 212, 213  
– – – – – маховичной системы 165  
– – – управляющего момента гиросиловой системы 214, 215  
Определитель Грама 218, 235, 237 – 238  
Органы исполнительные 44 – 46  
– электромеханические 45, 51, 185  
Ориентация 11  
Оси ориентации 12  
– инерции главные 67  
– строительные 68, 136  
– Резаля 196  
Особые состояния гиросиловой системы  
Ось гироскопа главная 189  
– мира 293  
– прецессии 189, 190  
Орбита круговая 14, 291, 292  
– полярная 10, 295  
– солнечно-синхронная 296  
– эллиптическая 291, 292  
Ошибка статическая 154, 160, 176

**П**акет прикладных программ 144, 157, 181, 194  
Параметр орбиты фокальный 291, 292  
Параметры Кейли-Клейна 73  
– кинематические 73

- Родрига-Гамильтона 73
- Передача волновая 285
- Передаточное отношение редуктора 277, 284, 286
- Перигей 292
- Период автоколебаний
  - обращения 106, 156, 181, 292
- Плотность атмосферы 99, 102, 107
- Поворот программный 17
  - – системой гиросиловой 243 – 246
  - – – маховичной 170 – 174
  - – – реактивной 126 – 130
- Погрешность ориентации 115, 146
- Подвес ротора электромагнитный 56, 57, 134, 200 – 203
- Поиск ориентира 16, 127
- Поле зрения датчика 13, 16, 21, 24, 29, 33
  - магнитное Земли 258 – 260
- Полуось орбиты 296
- Полюс мира 293
- Построитель местной вертикали 20
- Правило Крамера 72, 159, 207
- Прецессия орбиты 296
- Прибор оптико-электронный 18, 20
- Привод прецессии гиродина 58, 203, 204
  - солнечных батарей 272, 282 – 286
- Приёмник излучения 18, 21 – 23
- Принцип максимума Понтрягина 129
- Продолжительность включения 148
  - – минимальная 50, 119, 120, 123
- Производная абсолютная 80
  - локальная 80
- Процесс переходный 87
  
- Равноденствия точка** 294
- Радиус-вектор орбиты 93, 258, 292
- Радиус инерции 64, 65
- Разгрузка гравитационная 266 – 268
- Расстояние угловое перигея 295
- Расход топлива 122, 127, 128
  - энергии
- Редуктор 189, 203, 277
  - волновой 285, 286
  - планетарный 284
- Режим ориентации 132, 18
  - начального успокоения 16
  - поиска ориентиров 16
  - программных поворотов 17
  - скользящий 119
- стабилизации 12, 16, 114
- Ротор гиродина 77, 79, 196
- Ротор-маховик 141
  
- Свойство усиления момента** 192, 193
- Сила гравитационного притяжения 288
  - центральная 288
- Система координат базовая 12, 71
  - – геомагнитная 258
  - – инерциальная 34, 140, 181
  - – орбитальная 13, 14, 16, 138, 139
  - – связанная 12, 36, 67, 105
  - – экваториальная 294
- Система ориентации 12
  - – активная 15
  - – бескарданная инерциальная 139
  - – гиросиловая 15
  - – линейная 149 – 161
  - – маховичная 15, 132 – 182
  - – – избыточная 134 – 136, 161 – 171
  - – солнечных батарей 270 – 286
  - – пассивная 14, 96
  - – реактивная 110 – 130
  - – релейная 114, 145 – 149
- Система разгрузки 138, 139
  - – магнитная 256 – 266
  - – реактивная 252 – 256
- Склонение светила 294
- Скорость вторая космическая 291
  - истечения 46, 47
  - линейная 74, 76
  - первая космическая 291
  - прецессии 190, 217, 218
  - угловая 71, 74
  - – орбитальная 14, 71, 87
- Случай Ковалевской 81
  - Лагранжа-Пуассона 81
  - Эйлера-Пуансо 81
- Состояния особые гиросиловых систем 215, 220, 235
- Спутник геостационарный 26
  - метеорологический 132, 270
- Стабилизация угловая 12
- Станция космическая международная 271, 274
  - орбитальная «Алмаз» 6, 55, 184, 250
  - – «Мир» 6, 184, 187, 210, 268, 271
  - – «Салют» 6, 55, 274
  - – «Скайлаб» 60, 188, 268

Статор 142  
Структура сетевая 139  
Сфера небесная 293, 294  
Схема структурная 144, 150, 157, 159  
-- гиродина 191  
-- гиросиловой системы 208  
-- датчика угловой скорости 41  
-- двигателя-маховика 144  
-- маховичной системы 150  
-- реактивной системы 114  
-- расчётная гиродина 195  
Схемы установки гироскопов 185 – 188  
-- двигателей-маховиков 135, 136  
-- реактивных двигателей 110

**Т**ело абсолютно твёрдое 62, 78, 79, 91  
-- чёрное 102  
Тензор инерции 62, 66, 67, 69, 77, 88  
Теорема Гюйгенса-Штейнера 65  
Типы двигателей-маховиков 53 – 56  
-- орбит 295  
Точность ориентации 91  
Траектория фазовая 113, 118

**У**глы Крылова 69, 70, 73, 97  
-- ориентации 69 – 71, 84, 97  
-- Эйлера 73, 74  
Угол крена 14, 23, 26, 70  
-- тангажа 14, 23, 26, 70  
-- полярный 291  
-- прецессии 189, 190  
-- рыскания 14, 70  
Управление ориентацией 89  
Уравнение характеристическое 151, 157, 169, 198  
Уравнения движения гироскопа 89-91  
-- вокруг центра масс 82  
-- Лагранжа 2-го рода 81, 82  
-- кинематические 71, 72  
-- обратные 73  
-- линеаризованные 84  
-- центра масс  
-- Эйлера динамические 79 – 81  
Ускорение угловое 75  
Успокоение 16  
Устойчивость статическая 85, 95, 101, 102

Устройство гиродина 189 – 191  
-- двигателя-маховика 52  
-- статическая датчика вертикали 29

**Ф**азовая плоскость 112  
Форма орбиты 291  
Формула Циолковского 288  
Функция передаточная 87, 151, 154, 160, 209

**Х**арактеристика моментная гиросиловой системы 216, 248  
-- двигателя-маховика 52  
-- статическая датчика вертикали 29  
Характеристики обобщённые динамические 211-216  
-- частотные 40, 154, 155  
-- технические гиродина 60  
-- датчика угловой скорости 44  
-- двигателя-маховика 55-57

**Ц**ентр давления аэродинамических сил 101  
-- светового 106  
-- масс 10, 100, 110, 288  
Цикл колебаний двусторонний одноимпульсный 120 – 123  
-- односторонний 123, 124  
-- симметричный 122, 147  
Цифровая вычислительная машина 137, 138, 207, 270

**Ч**астота нутации 198, 199  
-- прецессии 198, 199  
-- собственная 151, 198

**Э**йлера уравнения динамические 79 – 81  
Экватор небесный 293  
Эклиптика 105, 294  
Эксцентриситет орбиты 291, 292  
Электродвигатель-маховик 51  
Элементы орбиты 295, 296  
Энергия кинетическая 78, 79, 170, 290  
-- полная 290  
-- потенциальная 289

## ЛИТЕРАТУРА

1. Абалашин В.К. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / В.К. Абалашин, Е.П. Аксенов, Е.А. Гребенников [и др.]. – М.: Наука, 1971. – 584 с.
2. Авербух В.Я. Электромеханические устройства космических аппаратов и ракет-носителей / В.Я. Авербух, Д.М. Вейнберг, В.П. Верещагин [и др.] // Труды НПП ВНИИЭМ. – М., 2001. – Т. 100. – С. 89–96.
3. Авербух В.Я. Разработка системы ориентации солнечных батарей унифицированной космической платформы / В.Я. Авербух, Д.М. Вейнберг, Э.А. Лещинский // Труды НПП ВНИИЭМ. – М., 2001. – Т. 100. – С. 97–103.
4. Авербух В.Я. Принципы построения автономной системы ориентации солнечных батарей / В.Я. Авербух, Н.М. Грузов [и др.] // Труды ВНИИЭМ. – М., 1990. – Т. 93. – С. 25–37.
5. Авербух В.Я. Система ориентации солнечных батарей космического аппарата с управлением от бортового вычислительного комплекса / В.Я. Авербух, К.К. Попов, С.А. Стома [и др.] // Труды ВНИИЭМ. – М., 1987. – Т. 83. – С. 70–76.
6. Алексеев К.Б. Экстенсивное управление ориентацией космических летательных аппаратов / К.Б. Алексеев – М.: Машиностроение, 1977. – 120 с.
7. Алексеев К.Б. Управление космическими летательными аппаратами / К.Б. Алексеев, Г.Г. Бебенин. – М.: Машиностроение, 1974. – 340 с.
8. Алексеев К.Б. Система экстенсивного управления вращением твердого тела с шаровым маховиком / К.Б. Алексеев, Н.М. Булекова, В.Н. Васильев // Труды МАИ. – 1972. – Вып. 240.
9. Алексеева Ю.Б. Исследование влияния схемы коммутации аналоговых сигналов на динамику аналого-цифровой модели / Ю.Б. Алексеева, В.Н. Васильев // Труды ВНИИЭМ. – М., 1985. – Т. 79.
10. Алпатов А.П. Динамика космических аппаратов с магнитными системами управления / А.П. Алпатов [и др.]. – М.: Машиностроение, 1978.
11. Афанасьев Ю.В. Феррозондовые приборы / Ю.В. Афанасьев. – Л.: Энергоатомиздат, 1986.
12. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М.И. Бать, Г.Ю. Джанилидзе, А.С. Кельзон. – М.: Наука, 1964. – 664 с.
13. Беленький А.Д. Оптимизация структуры системы стабилизации искусственного спутника Земли посредством электродвигателя-маховика / А.Д. Беленький // Изв. Высших учеб. заведений. Электромеханика. – 1982. – № 6. – С.727–730.
14. Беленький А.Д. Управление минимально избыточной системой электродвигателей-маховиков / А.Д. Беленький, В.Н. Васильев // Известия РАН, МТТ. – 1996. – №2. – С. 75–81.
15. Беленький А.Д. Управление приводами системы ориентации солнечных батарей научно-энергетической платформы международной космической станции / А.Д. Беленький, В.Н. Васильев // Электротехника. – 1999. – № 6. – С. 6–11.
16. Беленький А.Д. Система ориентации солнечных батарей и центрального радиационного теплообменника международной космической станции / А.Д. Беленький, В.Н. Васильев, В.П. Курилович [и др.] // Труды НПП ВНИИЭМ. – М., 2001. – Т. 100. – С. 104–114.
17. Беленький А.Д. Исследование свойств избыточных систем электродвигателей-маховиков / А.Д. Беленький, В.Н. Васильев, М.Ю. Лебедева [и др.] // Труды НПП ВНИИЭМ. – М., 2005. – Т. 102. – С. 93–106.
18. Беленький А.Д. Управление избыточной системой электродвигателей-маховиков / А.Д. Беленький, В.Н. Васильев, М.Е. Семенов // Труды НПП ВНИИЭМ. – М., 2005. – Т.102. – С. 107–115.

19. Беляк В.А. Солнечный координатор для КА «Электро» / В.А. Беляк, О.М. Мирошник // Труды НПП ВНИИЭМ. Геостационарный космический аппарат «Электро». – М., 1998. – Т. 98. – С. 17 – 25.
20. Беляк В.А. Маховичная система управления ориентацией орбитальной станции «Алмаз» / В.А. Беляк, О.М. Мирошник, Н.Н. Шереметьевский // Электротехника. – 1991. – № 9. – С. 47 – 50.
21. Березин Е.Н. Курс теоретической механики / Е.Н. Березин. – 1974. – 646 с.
22. Боднер В.А. Стабилизация летательных аппаратов и автопилоты / В.А. Боднер, М.С. Козлов. – М.: Оборонгиз, 1961. – 508 с.
23. Бортц. Модификация кинематических уравнений для бесплатформенной инерциальной системы с целью снижения требований к БЦВМ / Бортц // Вопросы ракетной техники. – № 5. – С. 972.
24. Бранец В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
25. Бранец В.Н. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. – М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. – 280 с.
26. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть 2. Динамика системы материальных точек / Н.Н. Бухгольц – М: Наука, 1969. – 332 с.
27. Васильев В.Н. Управление пространственным положением вектора вращающего момента / В.Н. Васильев // Труды ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского. – Вып. 1269. – 1970.
28. Васильев В.Н. Управление угловым положением долговременной орбитальной станции при помощи двухстепенных силовых гироскопов / В.Н. Васильев, Д.М. Вейнберг, Н.Н. Шереметьевский // Изв. АН СССР. МТТ. – 1978. – № 5. – С. 3 – 9.
29. Васильев В.Н. Управление системой двухстепенных силовых гироскопов с параллельными осями прецессии / В.Н. Васильев // Изв. АН СССР. МТТ. – 1982. – № 3. – С. 14 – 20.
30. Васильев В.Н. Исследование свойств системы двухстепенных силовых гироскопов / В.Н. Васильев // Изв. АН СССР. МТТ. – 1982. – № 5. – С. 3 – 9.
31. Васильев В.Н. Аналого-цифровая модель для исследования динамики управляемого движения твердого тела вокруг центра масс / В.Н. Васильев, О.А. Крылов, Е.Е. Перцов // Труды ВНИИЭМ. – М., 1985. – Т. 79.
32. Васильев В.Н. Управление системой двухстепенных силовых гироскопов с параллельными осями прецессии при ограниченных углах прецессии / В.Н. Васильев, Д.М. Вейнберг // Изв. АН СССР. МТТ. – 1987. – № 1.
33. Васильев В.Н. Выбор основных динамических характеристик гиродина // Труды НПП ВНИИЭМ / В.Н. Васильев. – Т. 83. – М., 1987. – С. 91.
34. Васильев В.Н. Обобщенные динамические характеристики типовой группы гиродин / В.Н. Васильев, Ю.В. Вершинина // Труды ВНИИЭМ. – М., 1987. – Т. 83.
35. Васильев В.Н. Исследование динамики гиродина с электромагнитными подшипниками / В.Н. Васильев, А.В. Спирин // Труды ВНИИЭМ. – М., 1989. – Т. 89.
36. Васильев В.Н. Исследование динамики гиродина с центробежным тормозным устройством / В.Н. Васильев, О.М. Мажорин, Д.В. Рыжков [и др.] // Труды ВНИИЭМ. – М., 1989. – Т. 91.
37. Васильев В.Н. Частотные характеристики активного подвеса ротора двухстепенного силового гироскопа / В.Н. Васильев // Труды ВНИИЭМ. – М., 1990. – Т. 93.
38. Васильев В.Н. Графический способ построения области особых состояний системы трех гиродин / В.Н. Васильев, Г.А. Гиндоян, С.В. Иванов [и др.] // Труды ВНИИЭМ. – М., 1990. – Т. 93.

39. Васильев В.Н. Обобщенные характеристики гиросиловых систем управления / В.Н. Васильев, Д.М. Вейнберг, С.И. Злочевский // Космич. исслед. – 1991. – Т. 29. – Вып. 2. – С. 231 – 237.
40. Васильев В.Н. Управление кратной минимально избыточной системой гиросилов / В.Н. Васильев // Изв. РАН. МТТ– 1995. – № 3. – С. 3 – 10.
41. Васильев В.Н. Моментные характеристики кратной минимально избыточной гиросиловой системы ориентации / В.Н. Васильев // Труды НПП ВНИИЭМ. – М., 1997. – Т. 97. – С. 101 – 110.
42. Васильев В.Н. Оптимизация настройки минимально избыточной системы гиросилов / В.Н. Васильев // Изв. РАН. МТТ. – 1999. – № 4.
43. Вейнберг Д.М. Системы магнитного подвеса в исполнительных органах управления ориентацией космических аппаратов / Д.М. Вейнберг, В.П. Верещагин, Н.Н. Данилов-Нитусов [и др.] // Известия АН СССР. МТТ. – 1981. – № 3. – С. 152 – 157.
44. Вейнберг Д.М. Особенности управления четырехполюсным радиальным электромагнитным подшипником / Д.М. Вейнберг, В.П. Верещагин, А.В. Спирин // Известия ВУЗов. Электромеханика. – 1983. – № 1. – С. 61 – 64.
45. Воронцов-Вельяминов Б.А. Астрономия / Б.А. Воронцов-Вельяминов. – М.: Учпедгиз, 1954. – 176 с.
46. Гандлевский Ю.М. Опыт разработки и эксплуатации построителей местной вертикали для искусственных спутников Земли природно-ресурсного и метеорологического назначения / Ю.М. Гандлевский, Т.И. Киселева, О.М. Мирошник [и др.] // Электротехника. – 1996. – № 5. – С. 20 – 21.
47. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – Изд. 2-ое, доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. – 576 с.
48. Гречко Г.М. Гравитационная ориентация орбитального комплекса «Салют-6»-«Союз» / Г.М. Гречко, В.А. Сарычев, В.П. Легостаев [и др.] // Космич. исслед. – 1985. – Т. 23. – Вып. 5. – С. 659 – 675.
49. Журавлев В.Я. Электродвигатель-маховик постоянного тока / В.Я. Журавлев, В.Н. Кузьмин, Е.М. Михайлов [и др.] // Труды ВНИИЭМ. – М., 1985. – Т. 78. – С. 67 – 74.
50. Злочевский С.И. Об одном способе построения области управляемости гиросиловой системы ориентации / С.И. Злочевский, А.А. Соколов, В.Н. Васильев [и др.] // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. – 1989. – № 5. – С. 42 – 46.
51. Ивандиков Я.М. Оптико-электронные приборы для ориентации и навигации космических летательных аппаратов / Я.М. Ивандиков. – М.: Машиностроение, 1971. – 200 с.
52. Иванов М.Н. Волновые зубчатые передачи / М.Н. Иванов. – М.: Высшая школа, 1981.
53. Инженерный справочник по космической технике. – М.: Воениздат, 1977. – 430 с.
54. Иосифьян А.Г. Электромеханика в космосе / А.Г. Иосифьян – М.: Знание, 1977. – 64с.
55. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация / А.Ю. Ишлинский. – М.: Наука, 1976. – 670 с.
56. Каргу Л.И. Системы угловой стабилизации космических аппаратов / Л.И. Каргу. – М.: Машиностроение, 1980. – 172 с.
57. Карпачев Ю.А. Равномодульное программно-частотное управление минимально избыточной структурой двухстепенных силовых гироскопов системы ориентации космического аппарата / Ю.А. Карпачев // Изв. РАН СССР. МТТ. – 1986. – № 2. – С. 3 – 10.
58. Карпачев Ю.А. Управление ориентацией космических аппаратов с произвольно-избыточной структурой одноосных электромаховичных двигателей / Ю.А. Карпачев, М.А. Павловский // Космич. исслед. – 1987. – Т. 25. – Вып. 4. – С. 530 – 536.

59. Каструччио, Ирби. Цифровая система стабилизации орбитальной космической станции «Скайлаб» / Ирби, Каструччио // Вопросы ракетной техники. – 1973. – № 10; № 11.
60. Коваленко А.П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами / А.П. Коваленко – М.: Машиностроение, 1975. – 248 с.
61. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы / В.Н. Кошляков. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
62. Крементуло В.В. Об оптимальной стабилизации вращательного движения твердого тела при помощи управляемого гироскопа / В.В. Крементуло, Л.Е. Соколова // Изв. АН СССР. МТТ. – 1969. – № 4, 5.
63. Крэнтон. Маневры изменения ориентации за минимальное время с использованием гироскопов для создания управляющих моментов / Крэнтон // Ракетная техника и космонавтика. – 1970. – Т. 8. – № 8.
64. Ландау Л.Д. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
65. Легостаев В.П. Сильно избыточные гиродинные системы космических аппаратов / В.П. Легостаев, Е.Н. Токарь // Космич. исслед. – 1989. – Т. 27. – Вып. 4. – С. 483 – 490.
66. Лиден. Управление силовыми гироскопами прецизионной системы наведения / Лиден // Вопросы ракетной техники. – 1974. – № 11. – С. 74 – 86.
67. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений / Ю.В. Линник. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958. – 334 с.
68. Лурье А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1973. – 208 с.
69. Малаховский Е.Е. Метод определения возмущающих моментов от сложных приводных устройств / Е.Е. Малаховский [и др.] // Труды ВНИИЭМ. – М., 1988. – Т. 86. – С. 20 – 27.
70. Максимов Г.Ю. Теоретические основы разработки космических аппаратов / Г.Ю. Максимов – М.: Наука, 1980. – 320 с.
71. Мирошник О.М. Проблемы обеспечения живучести систем современных космических аппаратов дистанционного зондирования Земли / О.М. Мирошник // Вопросы электромеханики. Труды НПП ВНИИЭМ. – М., 1999. – Т. 99. – С. 178.
72. Модель верхней атмосферы для баллистических расчетов: Гост 22721. – 77. – 1980. – 320 с.
73. Морозов А.И. Космические электрореактивные двигатели / А.И. Морозов, А.П. Шубин. – М.: Знание, 1975. – 63 с.
74. Нитусов Е.В. Использование двигателей малой тяги для коррекции орбит космических аппаратов геофизического наблюдения / Е.В. Нитусов, В.П. Ходненко // Труды ВНИИЭМ. – М., 1989. – Т. 91. – С. 91 – 98.
75. Новый метод вычислений в цифровых системах управления ориентацией, основанный на применении кватернионов // Экспресс-информация «Астронавтика и ракетодинамика». – 1969. – № 6.
76. Ормсби, Смит. Возможности и ограничения применения сферических реактивных маховиков для управления угловой ориентацией / Смит, Ормсби // Ракетная техника. – 1961. – № 6.
77. Основы теории полета космических аппаратов / под редакцией Нариманова Г.С. и Тихомирова М.К. – М.: Машиностроение, 1972. – 608 с.
78. Остославский И.В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов / И.В. Остославский, И.В. Стражева. – М.: Машиностроение, 1969. – 500 с.
79. Павловский М.А. Теория гироскопов / М.А. Павловский – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986. – 303 с.
80. Пельпор Д.С. Гироскопические системы ориентации и стабилизации: справ. пособие / Д.С. Пельпор. – М.: Машиностроение, 1982. – 165 с

81. Пономарев В.М. Теория управления движением космических аппаратов / В.М. Пономарев – М.: Наука, 1965. – 456 с.
82. Попов В.И. Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов (пассивные и комбинированные системы) / В.И. Попов. – М.: Машиностроение, 1986. – 184 с.
83. Попов М.В. Использование аperiodической обратной связи в системе стабилизации ИСЗ / М.В. Попов // Механика космического полета. – М.: Машиностроение, 1968. – С. 194 – 204.
84. Разыграев А.П. Основы управления полетом космических аппаратов и кораблей / А.П. Разыграев. – М.: Машиностроение, 1977. – 472 с.
85. Раушенбах Б.В. Управление ориентацией космических аппаратов / Б.В. Раушенбах, Е.Н. Токарь. – М.: Наука, 1974. – 600 с.
86. Российский космический бюллетень. – 1998. – Т. 5. – № 4. – 29 с.
87. Селезнев В.П. Системы навигации космических летательных аппаратов / В.П. Селезнев., М.Л. Кирст. – М.: Воениздат, 1965. – 208 с.
88. Сингер С. Ф. Проблемы ориентации искусственных спутников Земли / С. Ф. Сингер. – М.: Наука, 1966. – 452 с.
89. Сорокин А.В. Управление избыточным числом силовых гироскопов / А.В. Сорокин // Изв. РАН СССР. МТТ. – 1979. – № 3. – С. 3 – 6.
90. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Книга 3. Часть 1. Теория нестационарных, нелинейных и самонастраивающихся систем автоматического регулирования / под ред. В.В. Солодовникова. – М.: Машиностроение, 1969. – 607 с.
91. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Книга 3. Часть 2. Теория нестационарных, нелинейных и самонастраивающихся систем автоматического регулирования / под ред. В.В. Солодовникова. – М.: Машиностроение, 1969. – 367 с.
92. Токарь Е.Н. О рациональном построении систем гиросиловых стабилизаторов // Космич. исслед. / Е.Н. Токарь. – 1978. – Т. 16. – Вып. 1. – С. 22 – 30.
93. Токарь Е.Н. Проблемы управления гиросиловыми стабилизаторами / Е.Н. Токарь // Космич. исслед. – 1978. – Т. 16. – Вып. 2. – С. 179 – 187.
94. Токарь Е.Н. Влияние ограничительных упоров на работу гиросиловых стабилизаторов / Е.Н. Токарь // Космич. исслед.. – 1978. – Т. 16. – Вып. 4. – С. 505.
95. Токарь Е.Н. Исследование особых поверхностей систем безупорных гиросиловых / Е.Н. Токарь, В.Н. Платонов // Космич. Исследования. – 1978. – Т. 16. – Вып. 5. – С. 675 – 685.
96. Токарь Е.Н. Управление избыточными гиросиловыми системами / Е.Н. Токарь, В.П. Легостаев, М.В. Михайлов [и др.] // Космич. Исследования. – 1980. – Т. 18. – Вып. 2. – С. 147 – 156.
97. Токарь Е.Н. Критерий настройки гиросиловых систем / Е.Н. Токарь // Космич. исслед. – 1980. – Т. 18. – Вып. 3. – С. 307 – 315.
98. Токарь Е.Н. Кратные гиросиловые системы / Е.Н. Токарь, В.П. Легостаев, В.Н. Платонов [и др.] // Космич. исслед. – 1981. – Т. 19. – Вып. 6. – С. 813 – 822.
99. Токарь Е.Н. Бесконечномерные модели гиросиловых систем / Е.Н. Токарь // Космич. исслед. – 1981. – Т. 19. – Вып. 3. – С. 346 – 358.
100. Токарь Е.Н. Проблема построения пространственных гиросиловых систем / Е.Н. Токарь // Космич. исслед.. – 1989. – Т. 27. – Вып. 3. – С. 368 – 374.
101. Токарь Е.Н. Пространственные гиросиловые системы / Е.Н. Токарь // Космич. исслед. – 1989. – Т. 27. – Вып. 6. – С. 827 – 835.
102. Уникальные электромеханические бортовые системы орбитальной космической станции «Мир». – М.: Наука, 2001. – 55 с.

103. Херинг, Хафнейгель. Система с инерциальной сферой для управления угловым положением искусственных спутников Земли / Хафнейгель, Херинг // Ракетная техника. – 1961. – № 8.
104. Ходненко В.П. Электрореактивные двигатели как исполнительные органы систем управления движением космических аппаратов / В.П. Ходненко // Электротехника. – 1999. – №6. – С. 18 – 21.
105. Цань-Сюэ-Сэнь. Техническая кибернетика / Цань-Сюэ-Сэнь. – М.: Изд-во ин. лит. – 1956. – 462 с.
106. Шереметьевский Н.Н. Электромеханика и мирный космос / Н.Н. Шереметьевский // Электротехника. – 1987. – № 6. – С. 10 – 16.
107. Шереметьевский Н.Н. Всесоюзному научно-исследовательскому институту электромеханики 50 лет / Н.Н. Шереметьевский // Электричество. – 1991. – № 9. – С. 1 – 7
108. Шереметьевский Н.Н. Силовой гироскоп с электромагнитными подшипниками для управления ориентацией орбитальных станций / Н.Н. Шереметьевский, Д.М. Вейнберг, В.П. Верещагин [и др.] // Космич. исслед. – 1983. – Т. 21. – Вып. 1. – С. 139 – 142.
109. Шереметьевский Н.Н. Высоконадежная система ориентации солнечных батарей для орбитальных станций "Салют" и "Мир" / Н.Н. Шереметьевский, С.А. Стома, В.П. Курилович [и др.] // Электротехника. – 1996. – №5. – С. 11 – 19.
110. Шереметьевский Н.Н. Расчетно-экспериментальный способ анализа динамической точности гибких космических аппаратов при действии внутренних источников возмущений / Шереметьевский Н.Н. [и др.] // Космич. исслед. – 1990. – Т. 28. – С. 706 – 714.
111. Шуляка А.А. Метод расчета магнитного момента системы сброса кинетического момента космического аппарата / А.А. Шуляка, А.В. Сенькин, Г.С. Макеич // Труды ВНИИЭМ. – М., 1990. – Т. 93. – С. 19 – 24.
112. Щиголов Б.М. Математическая обработка наблюдений / Б.М. Щиголов. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960. – 344 с.
113. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полетов искусственных спутников Земли / П.Е. Эльясберг. – М.: Наука, 1965.
114. Margulies G. Geometric Theory of Single-Gimbal Control Moment Gyro Systems / G. Margulies, J. N. Aubrun //The Journal the Astronautical Sciences. – Vol. 26. – № 2. – April-June 1978. – Pp. 159 – 191.
115. Oh H.S. Feedback Control and Steering Laws for Spacecraft Using Single Gimbal Control Moment Gyros / H.S. Oh and S.R. Vadali // The Journal the Astronautical Sciences. – Vol. 39. – № 2. – April-June 1991. – Pp. 183 – 203.
116. Фабрикант Н.Я. Аэродинамика. Часть первая / Н.Я. Фабрикант. – М.-Л.: Гос. изд. тех.-теорет. лит., 1949. – 624 с.

Научное издание

*Васильев Владимир Николаевич*

**СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ  
КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ**

Монография

Редактор *А.Б. Алабужева*  
Корректор *О.А. Чунихина*  
Дизайн и верстка *А.М. Пугачева*

---

Подписано в печать 02.09.2009.  
Формат 70x100 1/16.  
Печ. л. 19,5. Тираж 200 экз.

Адрес редакции:  
ФГУП «НПП ВНИИЭМ»,  
101000, г. Москва, а/я 496.  
Телефон: 625-13-81. Факс: 607-49-62.  
E-mail: [vniiem@orc.ru](mailto:vniiem@orc.ru);  
[PugachevaAM@npp.vniiem.ru](mailto:PugachevaAM@npp.vniiem.ru).

Отпечатано в ООО «САМ-ПОЛИГРАФИСТ»  
Москва, Протопоповский пер., д.6.