ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von L. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, L. PRANDTL-Göttingen, H. REISSNER-Charlottenburg und R. RÜDENBERG-Berlin

Band 7

(7. Jahrgang)

Mit rd. 323 Abbildungen im Text

Berlin

V·D·I-VERLAG G. M. B. H., BERLIN NW 7

1927

β Reibungsbeiwert und α der halbe Oeffnungswinkel) gegeben. Im Falle eines zylindrischen Rohres ist $\alpha = 0$ und $\beta = \infty$ und man hat

$$\frac{p}{p_k} + \frac{\mu+1}{2}\frac{\varrho}{\varrho_k} - \frac{\mu-1}{2}\frac{\varrho_k}{\varrho} \quad \ldots \text{ (13).}$$

Im zweiten Falle eines polytropischen Prozesses hat man für ein zylindrisches Rohr

$$\frac{8\,\mu}{\mu+1}\,\xi \cdot \frac{x_K - x}{r} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_K}\right)^2 - 1 - \ln\left(\frac{\varrho}{\varrho_K}\right)^2 \quad \text{(14)}$$

(X Achse || zur Rohrachse, x Koordinate der Stelle bei der $v = c$) und für einen konischen Diffusor.

$$\frac{x}{x'_K} = \sqrt[4]{\frac{\frac{\mu+1}{2\,(1-\mu\,\beta)} - 1}{\frac{\mu+1}{2\,(1-\mu\,\beta)}\left(\frac{\varrho}{\varrho_K}\right)^2 - \left(\frac{\varrho}{\varrho_K}\right)^{\frac{\mu+1}{1-\mu\beta}}}} \quad \text{(15).}$$

(X Achse || zur Konusachse, x Entfernung von der Konusspitze.)

Das **Problem der Reaktionsraumschiffe und der Reaktionsflugzeuge** ist von K. E. Ziolkowsky-Kaluga U.d.S.S.R. untersucht worden (Erforschung der Welteuräume mittels Reaktionsraumschiffe. Verlag der 6. Reichsdruckerei Kaluga U.d.S.S.R. 1926). Das keiner äußeren materiellen Stütze bedürftige Reaktionsraumschiff ist z. Zt. das einzige Fluggerät welches eine lenkbare Bewegung mit vernünftiger Beschleunigung im luftleeren Weltenraum gestattet; das Reaktionsflugzeug dient dem Schnellflug mit teilweiser Ueberschallgeschwindigkeit in der Stratosphäre. Der Luftwiderstand wirkt beim Raumschiff, beim Start hemmend, bei der Landung auf Planeten mit Gashülle kann er die Bewegung verringern. Das Raumschiff fliegt meistens in schwachen Schwerefeldern. Der Rückstoß erfolgt durch Verbrennen eines explosiven Gasgemisches (etwa $H_2 + O_2$), welche beide im verflüssigtem Zustande mitgenommen werden. Wenn

- m_1 das Leergewicht des Raumschiffes
- m_2 die Brennstoffmasse beim Bewegungsanfang ($t = 0$),
- m unverbrannter Brennstoffrest zum Zeitpunkte t_1,
- v Fluggeschwindigkeit,
- v_a Rückstromgeschwindigkeit der Masseteilchen des Gases,
- b Schiffsbeschleunigung
- g Erdschwerebeschleunigung und
- R Erdhalbmesser

bedeuten, so liefert der Impulssatz sofort:

$$d\,v\,(m_1 + m) = -\,v_a\,d\,m \quad \ldots \text{ (1)}$$

und durch Integration:

$$\int \frac{1}{v_a}\,d\,v = -\int \frac{d\,m}{m_1 + m} + c \quad \ldots \text{ (2)}$$

und

$$\frac{v}{v_a} = -\ln(m_1 + m) + c \quad \ldots \text{ (3).}$$

Bis zur ersten Explosion ($t = 0$) ist $m = m_2$, also

$$C = \ln(m_1 + m_2) \quad \ldots \text{ (4),}$$

woraus:

$$\frac{v}{v_a} = \ln\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m}\right) \quad \ldots \text{ (5).}$$

Das Raumschiff erhält seine Höchstgeschwindigkeit wenn $m = 0$, d. h.

$$v_{max} = v_a \ln\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \quad \ldots \text{ (6).}$$

Das Verhältnis $m_2 : m_1$ nennt man Massenverhältnis des Raumschiffes. Die Geschwindigkeit mit der man eine Masse behaften muß, damit das Schwerefeld eines Planeten für immer verläßt, ist die Grenzhubgeschwindigkeit, welche für die Erde

$$\boxed{v_\infty = \sqrt{2\,g\,R} = 11180 \text{ m/sec}} \quad \ldots \text{ (7)}$$

und für andere Planete $v_\infty{}^1 = \sqrt{2\,g_p\,R_p}$ natürlich verschieden ist (z. B. für den Erdmond $v_\infty \approx 3900$ m/sec). Gl. (6) gilt für das Raumschiff im schwerelosen Raum oder praktisch schwachem Schwerefelde in einer Entfernung $> R$ von der Erdoberfläche. Für die Fluggeschwindigkeit im Erdschwerefelde (bei anderen Planeten wird g durch g_p ersetzt) erhält Ziolkowsky den Ausdruck:

$$v_2 = v_a\left(1 - \frac{g}{b}\right)\ln\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \quad \ldots \text{ (8),}$$

wobei man

$$W_{dyn} = \left(1 - \frac{g}{b}\right) \quad \ldots \text{ (9)}$$

als dynamischen Wirkungsgrad bezeichnet. Da $W_{dyn} < 1$, so ist $v_2 < v$, und nur bei einer einzigen großen Explosion (Abschuß) ist, wenn $b \gg g$, $W_{dyn} \sim 1$. Umgekehrt kann trotz größter Brennstoffmasse m_2 bei $b = g$, die Geschwindigkeit gleich 0 sein. Man erhält also für das Erdschwerefeld

$b : g$	W_{dyn}	$b : g$	W_{dyn}
1	0,00	6	0,83
2	0,50	7	0,86
3	0,66	8	0,87
4	0,75	9	0,89
5	0,80	10	0,90

Nun ist aber die vom Menschen erträgliche Höchstbeschleunigung nach H. Oberth, A. Zander, K. E. Ziolkowsky u. a. $b \approx 4\,g$ also $(W_{dyn})_{max} = 0{,}75$, d. h. $v_2 = {}^3/_4\, v$.

Wenn man das Verhältnis der Raketenleistung zur Brennstoffleistung bildet, so erhält man für den schwerelosen Raum

$$\boxed{W_{en} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \left[\ln\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\right]^2} \quad \ldots \text{ (10),}$$

welchen Wirkungsgrad man als energetischen bezeichnet. Im Schwerefelde ist der energetische Wirkungsgrad

$$\boxed{W_{2\,en} = W_{en}\,W_{dyn}} \quad \ldots \text{ (11)}$$

oder nach obengesagtem $W_{2en} = {}^3/_4\, W_{en}$. Das Ergebnis der Berechnungen läßt sich in folgender Zahlentafel zusammenstellen (das Umrechnen der Fluggeschwindigkeiten und Wirkungsgrade auf das Erdschwerefeld erfolgt durch einfaches Multiplizieren mit 0,75).

$\frac{m_2}{m_1}$	v_{max} (m/sec) bei $v_a = 5000$ m/sec	v_{max} (m/sec) bei $v_a = 4000$ m/sec	W_{en} vH
0,1	472	378	8,8
0,2	910	728	16,5
0,3	1 310	1 048	22,9
0,4	1 680	1 344	28,2
0,5	2 025	1 620	32,8
0,6	2 345	1 876	36,7
0,7	2 645	2 116	40,0
0,8	2 930	2 344	42,9
0,9	3 210	2 568	45,8
1,0	3 465	2 772	48,0
2	5 490	4 392	60,3
3	6 900	5 520	63,5
4	8 045	6 436	64,7
5	8 960	7 168	64,1
6	9 730	7 784	63,0
7	10 395	8 316	61,7
8	10 985	8 788	60,5
9	11 515	9 212	58,9
10	11 990	9 592	57,6
15	13 865	11 092	51,2
20	15 220	12 176	46,3
30	17 170	13 736	39,3
50	22 400	17 920	31,0
100	26 480	21 040	21,0
∞	∞	∞	0

Aus dieser Zahlentafel ersieht man folgendes: Im schwerefreien Raum (praktisch bei Planeten mit kleinen Grenzhubgeschwindigkeiten) wird der Höchstwert von $(W_{en})_{max} = 64{,}7$ vH bei einem Massenverhältnis $m_2 : m_1 \approx 4$ (genau 3,997) erreicht; eine Vergrößerung von v_a ergibt größere v_{max} also Uebergrenzhubgeschwindigkeiten bei kleineren Masseverhältnissen. Außerdem steigt bei Vergrößerung von v_a das Gebiet der Uebergrenzhubgeschwindigkeiten ($v_{max} > v_\infty$) immer mehr in den Bereich der wirtschaftlich günstigen Werte von W_{en} ($W_{en} = 51{,}2 \div 58{,}9$ vH). Eine kurze Interpolationsrechnung zeigt, daß das Massenverhältnis eines mit verflüssigtem Wasserstoff und Sauerstoff arbeitenden Raumschiffes um von der Erde wegzukommen, gleich

$$\boxed{m_2 : m_1 \approx 18{,}9} \quad \ldots\ldots (12),$$

wobei

$$\boxed{W_{en} \approx 47{,}3 \text{ vH}} \quad \ldots\ldots (13).$$

Im schwerefreien Raume ist die Arbeit der Brennstoffmasseneinheit

$$A = v_{max}^2 : 2g \quad \ldots\ldots (14),$$

dagegen im Erdschwerefelde

$$A_2 = h + (v_{max}^2 : 2g) \quad \ldots\ldots (15)$$

(h-Hubhöhe).

Wenn wir die Bezeichnung

$$A_3 = v_a^2 : 2g \quad \ldots\ldots (16)$$

einführen und bemerken, daß

$$A_3 : A = 1 - \frac{g}{b} \quad \ldots\ldots (17)$$

ist, so hat man aus Gl. 8 die nötige Brennstoffmasse.

$$m_2 = m_1 \left(e^{\sqrt{\frac{A_2 \cdot b}{A_3 \cdot (b-g)}}} - 1\right) \quad \ldots (18).$$

Hier ist A_2 der summare Posten der Arbeit zur Erlangung einer bestimmten Höhe, der Geschwindigkeit und Ueberwindung des Luftwiderstandes. Wenn wir das zum Abflug von einem bestimmten Himmelskörper nötige Massenverhältnis durch $m_2 : m_1 = c$ bezeichnen, so erfordert der Rückflug ein Massenverhältnis

$$c_1 = m_3 : m_1 = [(1+c)^2 - 1] \approx (1+c)^2 \quad (19),$$

d. h. für ein von der Erde startendes Raumschiff:

$$\boxed{c_1 = 395} \quad \ldots\ldots (20).$$

Darum ist eine Gegengaslandung beim jetzigen Stand der Technik unmöglich und man muß zur Ausnützung der Luftkräfte greifen. Zur Erreichung kleiner Höhen ($e \leq 0{,}7$) kann man $c_1 \approx 2c$ ansetzen. Eine Landung auf einen anderen Himmelskörper mit Rückfahrt zur Erde erfordert ein Massenverhältnis:

$$c_2 = [(1+c_1)^2 (1+c_2)^2 - 1] \quad \ldots (21),$$

wo c_2 dieselbe Bedeutung wie c_1 aber für den anderen Himmelskörper hat. Technisch ist dies noch unmöglicher. Eine bedeutende Verkleinerung des Massenverhältnisses läßt sich durch eine Beschleunigung des Raumschiffes von der Erde erreichen. Dann ist das nötige Massenverhältnis

$$\frac{m_k}{m_1} = 1 - e^{\frac{v_{max} - v_k}{v_a}} \quad \ldots\ldots (22),$$

wo v_k die Anfangsgeschwindigkeit bedeutet. Dann ist stets $m_2 : m_1 > m_k : m_1$, und zwar variiert das Verhältnis zwischen 2 und 5. Wenn wir dies Verhältnis $\frac{m_2}{m_1} : \frac{m_k}{m_1}$ mit q bezeichnen, so haben wir

V_{max} (m/sec) =		8000	11 000	17 000
bei $v_k = 5000$ m/sec	$q =$	5,00	3,46	3,00
bei $v_k = 4000$ m/sec	$q =$	3,22	2,60	2,50
bei $v_k = 3000$ m/sec	$q =$	2,32	2,00	2,00

Da bei der kleinsten Anfangsgeschwindigkeit $v_k = 3000$ m/sec, das der Grenzhubgeschwindigkeit $v_{max} \approx 11\,000$ m/sec entsprechende Massenverhältnis $m_k : m_1 = 4{,}00$ ist, so ist $c_1 = 24$, d. h. eine Gegengaslandung wäre also im Falle einer Anfangsgeschwindigkeit technisch wohl ausführbar (so ist bei $v_{max} = 11\,000$ m/sec und $v_k = 5000$ m/sec, $c_1 = 9{,}92$ was technisch leicht ausführbar wäre).

Wirtschaftlicher als der senkrechte Aufstieg ist der Wagerechtflug (schwach geneigter Aufstieg da dabei nach kurzen Hilfsrechnungen man

$$W_{dyn} = \left[1 - \left(\frac{g}{b}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots (23)$$

erhält; so ist z. B. bei $b:g = 4$, $W_{dyn} \approx 93,8$ vH (gegen 75 vH beim senkrechten Aufstieg). Beim Vernachlässigung des Luftwiderstandes ist dieser schwach geneigte Aufstieg wirtschaftlich.

Die beim geneigten (Resultierende Schiffsbeschleunigung $R = \sqrt{b^2 - g^2}$ ist nicht wagerecht). Aufstieg vom Raumschiff ausgenutzte Arbeit ist

$$\frac{R_a \cdot t^2}{2}\left(\frac{R_a}{g} - \cos\alpha\right) \quad \ldots\ldots (24),$$

wo

$$R_a = (-R\cos\alpha)^2 \quad \ldots\ldots (25)$$

bedeutet (α Winkel zwischen R und der senkrechten und t Explosionsdauer.

Bei Berechnung der Luftkräfte benutzt Ziolkowsky den üblichen Ansatz

$$A = q \cdot F \cdot e_a, \quad W = q \cdot F \cdot e_w \quad \ldots (26)$$

und erhält für die Luftwiderstandsarbeit den Ausdruck

$$A = \frac{F \cdot (b - \sin\beta \cdot g) \cdot c_w}{\sin^2\beta} \cdot \varrho \cdot h^2 \quad \ldots (27)$$

und beim senkrechten Aufstieg ($\measuredangle\, \beta = 90^0$).

$$A = F \cdot (b - g) \cdot c_w \cdot \varrho \cdot h^2 \quad \ldots\ldots (28).$$

(F Hauptspantfläche des Raumschiffes, c_w Widerstandsbeizahl, ζ Luftdichte in Meereshöhe, h Hubhöhe, β Flugbahnneigung zur Wagerechten). Das Verhältnis der Hubarbeit zur Luftwiderstandsarbeit

$$(m_1 + m_2) \cdot g \cdot h : A \quad \ldots\ldots (29)$$

ist sehr klein und an einem Beispiel 5400. Der Luftwiderstand hat also insbesondere bei großen $b:g$-Werten eine zu vernachlässigende Bedeutung. Nach Ansatz (26) werden auch Auftriebskräfte bei Reaktionsflugzeugen berechnet. L. Prandtl gibt zur Auftriebsberechnung bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten ($v:c \longrightarrow 1$) folgende Betrachtungen: ... die Rechnung bezieht sich auf die Umströmung von flachen Profilen mit geringem Auftrieb und stellt fest, daß man mit einem solchen Profil bei einer Strömung in kompressibler Flüssigkeit dieselbe Druckverteilung bekommt wie in inkompressibler Flüssigkeit bei einem anderen Profil, dessen Querdimensionen im Verhältnis

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-2} \quad \ldots\ldots\ldots (30)$$

überhöht sind. Aus dieser Ueberlegung folgt u. a., daß man in der Nähe der Schallgeschwindigkeit viel leichter ein Abreißen der Strömung bekommt als bei den geringen Geschwindigkeiten[1]).

H. Oberth benutzt auch den Ansatz Gl. (26), wobei aber nach Crantz und Becker die Widerstandsbeizahl eine nicht einfache (aber stetige und differenzierbare) Funktion der Geschwindigkeit ist. Bei $v < 300$ m/sec ist $c_w \approx$ const., steigt im Intervall $c < v < 425$ m/sec auf rund das 2,6 fache und nähert sich bei $v > 425$ m/sec dem 1,5 fachen Werte bei Unterschallgeschwindigkeiten.

Durch Erreichung großer v_a Werte könnte man das Verhältnis $m_2 : m_1$ sogar $\ll 1$ machen. So ist bei $v_a = 3 \cdot 10^7$ m/sec (β-Strahlen) und $v_{max} = 1{,}7 \cdot 10^4$ m/sec das Verhältnis $m_2 : m_1 = 0{,}00057$ ($\sim 1:2000$), d. h. bei einem Fluggewicht des Raumschiffes von 10 t wäre das Gewicht der Zerfallstoffmasse rd. 5,7 kg. Diese ist also so klein, daß man sie in den Bewegungsgleichungen vernachlässigen darf — sonst lassen sich alle Gleichungen sinngemäß verändert, auf die zukünftigen durch elektrische Atomzertrümmerung arbeitenden Reaktionsraumschiffe anwenden.

Der Bau der Betriebsstoffbehälter (H und O) ist ein thermisches (Wärmespannungen) und statisches Problem (Schiffsbeschleunigung) und Baustoffrage (desgleichen die Verbrennungskammer und Düse). Der Bestöffnungswinkel der Düse soll 5—6⁰ betragen. Die Massensteuerung erfolgt durch Bewegung von drei zur Raumschiffslängsachse symmetrisch (unter 120⁰) angeordneter Massen — die Steuerung der Massen erfolgt elektrisch mittels eines Selenzellensystems, auf welches durch »Steuerperiskope« die Abbilder der angepeilten Lichtmarken (Fixsterne oder Sonne) fallen.

Berlin. A. B. Scherschevsky. 815

[1]) Nach einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Hrn. Prof. Prandtl vom 15. Dez. 1926 aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.

KLEINE MITTEILUNGEN

Maxwellsche Polyeder und Ausnahmefachwerke. Frau Pollaczek-Geiringer hat vor kurzem unter dem Titel »Ueber die Culmannsche Gerade und Ausnahmefachwerke«[1]) für ebene Fachwerke einen einfachen Beweis für den von H. Liebmann bereits für Raumfachwerke bewiesenen Satz erbracht, daß bei projektiven Transformationen die Eigenschaft eines Fachwerkes, Ausnahmefachwerk zu sein, erhalten bleibt. Es mag vielleicht nicht überflüssig erscheinen, zu zeigen, daß dieser Satz für ebene Fachwerke bei Heranziehung der Theorie der Maxwellschen Polyeder und der Airyschen Spannungsfunktion unmittelbar einleuchtend ist. Da in der Theorie der Maxwellschen Polyeder zwei verschiedene Auffassungen möglich sind und da diese auch sonst oft nützliche Theorie nicht allgemein bekannt ist, so sei sie für das folgende kurz auseinandergesetzt.

Um in einer elastischen Scheibe, welche nur von Kräften beansprucht wird, die in der Ebene dieser Scheibe wirken und am Rande der Scheibe angreifen, die Spannungsverhältnisse geometrisch zur Darstellung zu bringen, denke man sich in einem räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystem, dessen xy-Ebene mit der Scheibenebene zusammenfalle, die zur Airyschen Spannungsfunktion

$$z = \int (x\,Y - y\,X)\,ds - \left[x \int Y\,ds - y \int X\,ds\right]$$

[1]) Diese Zeitschr. Bd. 6 (1926), S. 48 bis 58.