Zeitschrift

für den

Physikalischen und Chemischen Unterricht

Begründet von **Friedrich Poske**

unter Mitwirkung von **Ernst Mach** und **Bernhard Schwalbe**

In Verbindung mit

K. Rosenberg in Graz, **H. Hahn** in Berlin, **L. Doermer** in Hamburg

und der

Staatlichen Hauptstelle für den naturwissenschaftlichen Unterricht

herausgegeben von

K. Metzner

Vierzigster Jahrgang

1927

Mit zahlreichen Textfiguren

Berlin

Verlag von Julius Springer

1927

Zeitschrift

für den

Physikalischen und Chemischen Unterricht.

XL. Jahrgang. 1927. Fünftes Heft.

Die Rakete nach dem Mond.

Von Walter Horn in Ohligs.

Es ist kein Zweifel mehr, daß sich gewisse Kreise ernstlich mit dem Problem beschäftigen, eine Rakete nach unserm nächsten Nachbar im Sonnensystem, dem Monde, zu senden. Man darf mit Recht gespannt sein, ob der Versuch gelingen wird. Denn eine Mondrakete, zumal wenn Beobachter mitfahren, würde uns eine Reihe wertvollster Aufschlüsse bringen. Beobachtungen des Mondes aus größter Nähe und photographische Aufnahmen, vielleicht eine Granate, die von der Rakete aus abgefeuert, auf der Mondoberfläche explodieren und dort die Stoffe zur Weichglut erhitzen würde, so daß spektralanalytische Untersuchungen angestellt werden können, eine Fahrt um den Mond herum (denn landen wird die Rakete wohl vorerst nicht), welche ein Studium der uns abgewandten Mondseite ermöglicht, das sind alles Momente, die von hoher Bedeutung für die Kenntnis unseres Trabanten sind. Daneben können Fragen biologischer, physikalischer und chemischer Natur geklärt werden. Wie verhält sich z. B. der menschliche Organismus, wenn die Schwerebeschleunigung geringer wird oder ganz verschwindet? Wie, wenn sie größer wird? Wie verläuft der Luftdruck, wie die Zusammensetzung der Luft in größerer Höhe? Ist der Raum irgendwo ganz leer, so daß ein Lufdruck nicht mehr gemessen werden kann[1])? Das ist eine kleine Auslese von Fragen, die uns die Mondrakete beantworten soll.

Man kann nun der Meinung sein, daß ein solches Problem, eben weil es Problem ist, nicht in den Unterricht gehört. Aber mir werden fortwährend Fragen nach der Mondrakete vorgelegt. Soll ich sie abweisen? Oder soll ich nicht lieber versuchen, Kapital aus dem Interesse der Schüler zu schlagen? Und das letztere ist sehr leicht; denn es tauchen eine Reihe Fragen ballistischer Natur auf, die mit unserer Schulmathematik gelöst werden können, und die eine hervorragende Anwendung physikalischer Grundbegriffe und Gesetze bilden. Es wäre eine strafbare Unterlassungssünde, wollte ich die günstige Gelegenheit, das Newtonsche Anziehungsgesetz, die Begriffe Energie, Arbeit, Potential, Bewegungsgröße zu wiederholen, vom Interesse der Schüler begleitet, nicht benutzen, nur weil die Schule etwas anderes zu tun hat, als sich mit unreifen, phantastischen Problemen zu befassen. Es sei mir deshalb gestattet zu zeigen, wie man die Mondrakete im Unterricht behandeln kann.

1. Das Newtonsche Anziehungsgesetz mag langweilig sein; aber die Frage: „Wo hört die Anziehungskraft der Erde auf, wo fängt diejenige des Mondes an?“ interessiert im Zusammenhang mit der Mondrakete. Denn bis dahin muß ja die Mondrakete mindestens kommen. Also erörtern wir die Frage. Zunächst wird die Fragestellung kritisch beleuchtet. Hört denn die Anziehungskraft der Erde irgendwo auf? Die einwandfreie Form der Frage lautet also: „Wo liegt der Punkt auf der Verbindungslinie Erdmittelpunkt — Mondmittelpunkt, für den die beiden Anziehungskräfte gleich sind?“

[1]) Diese Frage interessiert die Weltentheoretiker, deren eifrigster Fürsprecher, Valier, sich für eine Mitfahrt zur Verfügung gestellt haben soll.

Unterscheiden wir die auf die Erde, den Mond und die Rakete bezüglichen Bezeichnungen durch die Indizes E, M und R, so ist

$$K_E = f\frac{m_E \cdot m_R}{r_E^2} \text{ und } K_M = f\frac{m_M\, m_R}{r_M^2}.$$

Nun ist $r_E + r_M = 60\ r$, wo r der Erdradius, 6370 km, und $m_M = \frac{1}{80} m_E$ ist. Da nun $K_E = K_M$ sein soll, so folgt

$$\frac{1}{r_E^2} = \frac{1}{80\,(60\,r - r_E)^2}, \text{ also } r_E \sim 54\,r.$$

Der „neutrale" Punkt teilt die Verbindungslinie Erde—Mond im Verhältnis $9:1$ (genauer $\sqrt{80}:1$); er liegt von der Erdoberfläche rund 344000 km, von der Mondoberfläche rund 40000 km entfernt.

2. Nun erhebt sich die zweite Frage: Kann man ein Geschoß bis zu dieser „Höhe" senden? Es wird daran erinnert, daß die Anfangsgeschwindigkeit eines senkrecht empor geworfenen Körpers, die er nötig hat, um die Höhe h zu erreichen, gleich der Endgeschwindigkeit eines aus dieser Höhe frei herabfallenden Körpers ist, abgesehen vom Luftwiderstand (den wir in unserer ganzen Untersuchung nicht berücksichtigen). Es wird eventuell die Formel $v = \sqrt{2gh}$ abgeleitet. Aber wir können diese Formel nicht benutzen, da g nicht konstant ist. (Unsere Fallgesetze haben also nur eine beschränkte Gültigkeit.) Wir müssen neue Formeln entwickeln, indem wir von dem Potential der Erde ausgehen[1]). Zunächst wird der Begriff des Potentials erörtert: es ist die Arbeit, welche nötig ist, um einen Körper der Masse 1 aus dem Unendlichen bis zu der Stelle zu bringen, für welche das Potential berechnet werden soll. Ist x die Entfernung vom Erdmittelpunkt, so ist die dort herrschende Kraft auf die Masse 1

$$\frac{d^2x}{dt^2} = K_E = -f\frac{m_E}{x^2},$$

die Arbeit auf der Strecke dx also

$$K_E dx = -f\frac{m_E}{x^2}\,dx,$$

mithin die Arbeit, um den Körper aus dem Unendlichen bis zu dieser Stelle zu bringen:

$$\int_\infty^x K_E\,dx = f\frac{m_E}{x}.$$

Dies ist also das Potential. Die Geschwindigkeit, die der Körper infolge der Anziehung erlangt hat, ist leicht zu berechnen; denn die geleistete Arbeit ist nach dem Energiegesetz gleich der lebendigen Kraft $\frac{1}{2}v^2$.

Also ist

$$\frac{1}{2}v^2 = f\frac{m_E}{x} \text{ oder } v = \sqrt{2f\frac{m_E}{x}}.$$

Man kann diesen Ausdruck noch etwas umformen. Denn Kraft ist ja Masse mal Beschleunigung. Auf der Erdoberfläche ist mithin

$$g = f\frac{m_E}{r^2}, \text{ also } r^2 g = f\,m_E$$

---

[1]) Der in den Lehrbüchern meist angewandte Kunstgriff zur Auflösung der Gleichung $\frac{d^2x}{dt^2} = -f\frac{m_E}{x^2}$, nämlich mit $\frac{dx}{dt}$ beiderseits zu multiplizieren, besagt physikalisch dasselbe wie diese Potentialbetrachtung.

und deshalb

$$v = \sqrt{\frac{2gr^2}{x}}.$$

Dieser Ausdruck gibt uns also die Geschwindigkeit an, welche ein aus dem Unendlichen auf die Erde fallender Körper in der Entfernung x vom Erdmittelpunkt erreicht, oder welche er nötig hat, um sich von diesem Punkte aus bis ins Unendliche zu entfernen. Wir wollen sie die „kritische" Geschwindigkeit nennen. Für die Erdoberfläche ist $x = r$, also $v = \sqrt{2gr}$ (Ähnlichkeit mit $v = \sqrt{2gh}$), demnach $v = 11\,190 \frac{m}{\sec}$.

Diese kritische Geschwindigkeit wird nun nicht nötig sein, wenn man das Geschoß nach dem Monde schießen will, da der Mond es ja anzieht. Es wird also eine etwas kleinere Anfangsgeschwindigkeit angewandt werden müssen. Um sie zu berechnen, haben wir nur statt des Potentials der Erde die Summe aus diesem und dem Potential des Mondes zugrunde zu legen. Die Berechnung des Mondpotentials für die Erdoberfläche verläuft in derselben Weise wie vorher bei der Erde, sie ist eine gute Übung für den Schüler, kann aber hier füglich übergangen werden. Es ergibt sich der Wert $\frac{gr}{80 \cdot 54} = \frac{gr}{4320}$, also wird $\frac{1}{2}v^2 = gr - \frac{gr}{4320}$, woraus man sieht, daß der Wert für v nur um wenige Meter geringer ist als vorher.

3. Nachdem wir wissen, welche Anfangsgeschwindigkeit wir dem Geschoß erteilen müssen, damit es den neutralen Punkt erreicht, fragen wir, ob es möglich ist, diese Anfangsgeschwindigkeit zu erzielen. Im 3. Heft dieses Jahrgangs der Zeitschrift (S. 97) behandelt H. LORENZ diese Frage und kommt zu dem Resultat, daß es nicht möglich sei, einem Geschoß durch Abschuß aus einem Rohre die erforderliche Anfangsgeschwindigkeit zu erteilen, weil die augenblicklich bekannten Treibmittel nicht die hinreichende Energie besitzen. Es ist also müßig, sich mit der Aufzählung der technischen Schwierigkeiten zu befassen, die sich einer Steigerung der Anfangsgeschwindigkeit entgegenstellen, solange es uns an dem Treibmittel fehlt, und wir gehen deshalb zur Betrachtung der Rakete über.

4. Die Rakete wird vorwärts getrieben durch den „Rückstoß". (Beispiele: Schlag des Gewehrkolbens, Rohr-Rücklauf-Geschütze, Segners Wasserrad). Die Theorie des Rückstoßes gründet sich auf das Gesetz von der Erhaltung der Bewegungsgröße. Der Schwerpunkt eines Systems, auf das keine äußeren Kräfte wirken, bewegt sich gradlinig und gleichmäßig vorwärts; eine Beschleunigung eines Teils des Systems kann nur eintreten, wenn ein anderer Teil des Systems gleichzeitig eine entsprechende Beschleunigung in der entgegengesetzten Richtung erfährt, so daß die Gesamtbewegungsgröße unverändert bleibt.

Es sei m_R die Masse der Rakete, dm_R diejenige Pulvermenge, die in der Zeit dt abbrennt, v_R die Geschwindigkeit der Rakete, dv_R die Zunahme der Geschwindigkeit durch die Explosion, v_a die Geschwindigkeit der ausgestoßenen Pulvergase in bezug auf den Schwerpunkt des Systems. Dann ist die Zunahme der Bewegungsgröße der Rakete $m_R\,dv_R$ (wobei von der Abnahme der Raketenmasse durch die Explosion, die ja gering ist, abgesehen werden soll), die Bewegungsgröße der Pulvergase (genauer die Abnahme derselben) $dm_R \cdot v_a$, also

$$m_R \cdot dv_R = dm_R \cdot v_a \text{ oder } \frac{dv_R}{dt} = \frac{1}{m_R}\frac{dm_R}{dt} v_a.$$

Dieser Ausdruck gibt uns als die Beschleunigung der Rakete durch die mit der Geschwindigkeit v_a in bezug auf den Schwerpunkt des Systems austretenden Pulvergase an. Dazu treten noch 2 Beschleunigungen, die von der Erde und die vom

Monde herrührende, für welche wir schon die Ausdrücke aufgestellt haben, so daß die Gesamtbeschleunigung

$$\gamma = \frac{1}{m_R}\frac{d m_R}{dt} v_a - \frac{g r^2}{x^2} + \frac{g r^2}{75 (60 r - x)^2} \text{ ist.}$$

Solange x nicht sehr groß ist (und wir werden sehen, daß wir nur mit Werten zwischen $1r$ und $2r$ zu rechnen haben), so lange können wir das Mondglied vernachlässigen; also haben wir

$$\gamma = \frac{1}{m_R}\frac{d m_R}{dt} \cdot v_a - \frac{g r^2}{x^2}.$$

5. Beschränken wir uns zunächst auf den Vorgang in den ersten Sekunden, dann ist x kaum von r verschieden, und wir haben

$$\gamma = \frac{1}{m_R}\frac{d m_R}{dt} v_a - g \text{ oder } \frac{1}{m_R}\frac{d m_R}{dt} = \frac{g+\gamma}{v_a}.$$

Man kann diese Gleichung in zweierlei Weisen behandeln; entweder man nimmt an, daß m_R sich nicht sehr rasch ändert, betrachtet also m_R in den einzelnen Sekunden als Konstante und untersucht die Vorgänge innerhalb der einzelnen Sekunden. Das ist zwar nicht genau, liefert aber eine gute Einsicht in den Mechanismus des ganzen Vorgangs. Oder aber man betrachtet m_R als Funktion der Zeit, was es ja auch in Wirklichkeit ist, und dann kann man über beliebige Zeitintervalle integrieren.

5a. Untersuchen wir zunächst den Vorgang während der ersten Sekunde. In der Gleichung

$$\frac{1}{m_R}\frac{d m_R}{dt} = \frac{g+\gamma}{v_a}$$

steht links das Verhältnis des abgebrannten Pulvers zur Masse der ganzen Rakete. Wie man sieht, nimmt dieses Verhältnis zu, wenn die Gesamtbeschleunigung wächst, was ja natürlich ist; will man eine große Beschleunigung haben, so muß viel Pulver verbraucht werden. Es kommt nun darauf an, wie groß diese Beschleunigung genommen werden soll; bei unbemannten Raketen ist dafür keine Grenze gesetzt. Aber denkt man daran, Raketen zu konstruieren, welche Beobachter mitnehmen sollen, so verbietet die Rücksicht auf die Insassen eine zu große Beschleunigung. Versuche in dieser Hinsicht sind wohl noch nicht gemacht worden. Wir wollen deshalb willkürlich 2 Werte für γ herausgreifen, nämlich $\gamma = 2g$ und $\gamma = 3g$. Die Größe v_a im Nenner besagt, daß bei großer Ausströmungsgeschwindigkeit der Pulvergase das Verhältnis der pro Sekunde verbrannten Pulvermenge zur Gesamtmasse der Rakete klein genommen werden kann. Man wird also einen Explosivstoff wählen, dessen v_a recht groß ist. Zur Zeit sind größere Werte von v_a als 2000 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ nicht bekannt, und wir wollen deshalb $v_a = 2000$ setzen. Dann wird

$$\text{für } \gamma = 2g\colon \frac{1}{m_R}\frac{d m_R}{dt} = \frac{3g}{2000} = 0{,}01471 \text{ und}$$

$$\text{für } \gamma = 3g\colon \frac{1}{m_R}\frac{d m_R}{dt} = \frac{4g}{2000} = 0{,}01962.$$

D. h.: Bei $v_a = 2000$ muß in der ersten Sekunde 1,471 % der Gesamtmasse der Rakete als Pulver abgebrannt werden, um eine Beschleunigung von $2g$ zu erhalten, während für eine Beschleunignng von $3g$ 1,962 % verbrannt werden müssen. Die nach der ersten Sekunde übrigbleibende Masse der Rakete beträgt also 98,529 % bzw. 98,038 % der ursprünglichen. Nach der 2. Sekunde ist der übrigbleibende Teil noch $(0{,}98529)^2$ bzw. $(0{,}98038)^2$ der ursprünglichen Masse, nach t Sekunden also

$$(0{,}98529)^t \text{ bzw. } (0{,}98038)^t.$$

5 b. Rechnet man nach der strengen Weise, so muß man beachten, daß die Masse der Rakete abnimmt, also $\frac{dm_R}{dt}$ negativ ist. Deshalb ist

$$-\frac{1}{m_R}\frac{dm_R}{dt} = \frac{g+\gamma}{v_a} \text{ oder } -\int_{m_a}^{m_e}\frac{1}{m_R}dm_R = \frac{g+\gamma}{v_a}\int_0^t dt,$$

wobei m_a und m_e die Masse der Rakete zu Anfang und zu Ende der beschleunigten Bewegung ist (das Ende der beschleunigten Bewegung ist der Augenblick, wo die kritische Geschwindigkeit erreicht ist). Integriert man, so ergibt sich

$$-l\,\text{nat}\,\frac{m_e}{m_a} = \frac{g+\gamma}{v_a}t \text{ oder } m_e = m_a e^{-\frac{g+\gamma}{v_a}\cdot t},$$

oder nach Eintragung der Werte für g, γ und v_a

$$m_e = m_a e^{-0{,}01471\cdot t} \text{ bzw. } m_e = m_a\cdot e^{-0{,}01962\cdot t}.$$

Hieraus ergeben sich für kleine Werte von t dieselben Resultate wie in 5 a.

6. Es kommt jetzt nur noch darauf an, in den Formeln 5 a und 5 b, welche die Verbrennung des Pulvers beschreiben, die Zeit t zu bestimmen. Denn die Verbrennung muß so lange fortgesetzt werden, bis die kritische Geschwindigkeit erreicht ist. Nun ist aber angenommen, die Bewegung der Rakete sei gleichmäßig beschleunigt, nämlich $\gamma = 2g$ bzw. $3g$. (Diese Annahme ist nicht widersinnig; man hat es vielmehr in der Hand, durch besondere Konstruktion des Raumes, in dem das Pulver abgebrannt wird, die Menge des sekundlich verbrannten Pulvers genau zu regulieren.) Bei einer solchen Bewegung ist aber die Geschwindigkeit

$$v = \gamma\cdot t$$

und der zurückgelegte Weg

$$(x-r) = \frac{1}{2}\gamma t^2$$

(x ist die Entfernung vom Erdmittelpunkt)

Nun soll v die kritische Geschwindigkeit in der Entfernung x sein, also ist nach den Formeln in 2:

$$v = \sqrt{\frac{2gr^2}{x}}.$$

Eliminiert man aus diesen 3 Gleichungen t und v, so bekommt man

$$\gamma\cdot\sqrt{\frac{2(x-r)}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2gr^2}{x}} \text{ und hieraus}$$

$$x = \frac{r}{2} \pm r\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{g}{\gamma}}.$$

Das negative Zeichen hat hier keinen Sinn, da x nicht negativ ist. Wird nun $\gamma = 2g$ bzw. $3g$ gesetzt, so hat man

$$x = \frac{r}{2}(1+\sqrt{3}) \text{ bzw. } x = \frac{r}{2}\left(1+\sqrt{\frac{7}{3}}\right),$$

oder nach Einsetzung des Wertes $r = 6370$ km

$$x - r = 2331\,\text{km bzw. } x - r = 1678\,\text{km}.$$

Daraus $v = 9565\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ „ $v = 9944\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$

und $t = 487{,}5$ sec „ $t = 336{,}9$ sec.

Jetzt ergibt sich auch die Menge des verbrannten Pulvers bzw. der übrigbleibende Teil der Rakete. Rechnet man nach 5 a), so hat man $(0{,}98529)^{487{,}5}$ bzw. $(0{,}98038)^{337{,}9}$, also kann dafür geschrieben werden: 0,00073 „ 0,00123.

Im ersten Ealle hat man nur noch $\frac{73}{100\,000}$, im zweiten $\frac{123}{100\,000}$ der ursprünglichen Raketenmasse. Das bedeutet, daß man rund 1370 bzw. 813 mal soviel Pulver als

Nutzlast mitführen muß. Dieses sehr ungünstige Resultat könnte man geneigt sein, auf Kosten der ungenauen Rechnung zu setzen. Wir wollen deshalb die genauere Berechnung (5b) nachholen. Man hat

$$m_e = m_a \cdot e^{-0{,}01471 \cdot 487{,}5} \quad \text{bzw.} \quad m_e = m_a \cdot e^{-0{,}01962 \cdot 337{,}9}$$
$$= m_a \cdot e^{-7{,}171} \quad \text{„} \quad = m_a \cdot e^{-6{,}626}$$
$$= \frac{m_a}{1301} \quad \text{„} \quad = \frac{m_a}{754},$$

und diese Ergebnisse weichen nicht wesentlich von den obigen ab.

7. Wie aus diesen Resultaten hervorgeht, wird das Verhältnis der Pulvermenge zur Gesamtmasse der Rakete um so kleiner, je größere Beschleunigungen wir der Rakete erteilen. Wenn man in der Sekunde 1,471% Pulver abbrennt, so muß die Pulverladung etwa 1300mal so schwer sein wie der übrige Teil der Rakete. Ist aber die Menge des sekundlich verbrauchten Pulvers 1,96%, so wiegt die Gesamtpulverladung nur noch 750mal so schwer wie die Nutzlast. Man könnte also recht viel Pulver sparen, wenn man die Beschleunigung vergrößern würde. Bei bemannten Raketen ist dafür eine Grenze gesetzt in der Rücksicht auf die Mitreisenden. Aber bei unbemannten Raketen darf man die Beschleunigung beliebig steigern. Wir wollen deshalb die Frage zu beantworten suchen, wie groß die Pulverladung sein muß, wenn man dem Geschoß die Beschleunigung 11190 m/sec oder eine noch größere erteilt.

Wir betrachten die Formel $\frac{m_e}{m_a} = e^{-\frac{g+x}{v_a} t}$. Wenn $\gamma = 11190$ ist, so kommt $g = 9{,}81$ nicht mehr in Betracht. Die Zeit t wird aber gleich 1, da ja in 1 Sek. die kritische Geschwindigkeit erreicht wird. Also hat man $\frac{m_e}{m_a} = e^{-\frac{11190}{2000}} = \frac{1}{269}$.

Wählt man γ noch größer, so wird t in demselben Verhältnis kleiner, also ändert sich $\frac{m_e}{m_a}$ nicht mehr. Die kleinste mögliche Trieblast beträgt also immer noch das 268-fache der Nutzlast. Dieses günstigste Verhältnis wird man aber wohl kaum erreichen, da man nicht unbegrenzt große Mengen Pulver in beliebig kurzer Zeit zur Explosion bringen kann.

8. Es bleibt uns jetzt noch übrig, den Einfluß der Sonne zu untersuchen. Wir stellen die Frage: Wo liegt der „neutrale" Punkt zwischen Sonne und Erde? Die Sonnenmasse sei gleich 330000 m_E angenommen; dann folgt, ähnlich wie oben,

$$\frac{f m_E}{x^2} = \frac{f \cdot 330000 \, m_E}{y^2},$$

wo x und y die entsprechenden Entfernungen des neutralen Punktes von der Erde bzw. der Sonne sind. Also wird $\frac{y}{x} = \frac{574}{1}$, d. h. der neutrale Punkt teilt die Entfernung Erde-Sonne im Verhältnis 1:574. Daraus berechnet sich seine Entfernung von der Erde zu rund 260000 km. Er liegt also beträchtlich näher als der neutrale Punkt Erde-Mond. Man kann das drastisch so ausdrücken: Es ist leichter, eine Rakete zur Sonne zu schicken als zum Mond!

Man ist geneigt anzunehmen, daß hierin ein wichtiger Umstand liegt, der uns unter Umständen große Ersparnisse an Trieblast zu machen gestatten würde. Man brauche nur die Zeit des Neumonds als Startzeit zu wählen. Der gemeinsame Einfluß von Sonne und Mond verlegt dann den neutralen Punkt um beinahe 90000 km näher an die Erde, und die Rakete hätte dann nur eine Entfernung von 260000 km statt 344000 km aus eigener Kraft zu erreichen. Doch ist die Ersparnis nicht so beträchtlich, wie es zuerst den Anschein hat. Das läßt sich leicht in bekannter Weise zeigen.

Nehmen wir die Zeit des Neumonds an, und seien die Entfernungen eines Punktes auf der annähernd geraden Linie Erde-Mond-Sonne von diesen 3 Körpern bzw. $x, y, z,$

so wird die Bewegung eines Körpers in diesem Punkte dargestellt durch die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{f m_E}{x^2} + \frac{f m_E}{75 \cdot y^2} + \frac{f\, 330000\, m_E}{z^2}.$$

Wie man sieht, sind die beiden letzten Glieder klein und kommen gegen das erste überhaupt nicht in Betracht, wenn x klein ist. Wenn wir also von $x = 1r$ bis $x = 40r$ ($\sim$ 260000 km) integrieren, können wir den Einfluß der beiden letzten Glieder vernachlässigen und erhalten genau wie oben

$$+\int_{40r}^{1r} K\,dx = g r^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{40r}\right) = g r \cdot \frac{39}{40},$$

während

$$+\int_{\infty}^{1r} K\,dx = g r^2 \frac{1}{r} = g r \text{ ist.}$$

gr ist nun die Energie, um die Rakete ins Unendliche zu senden, während $gr \cdot \frac{39}{40}$ die Energie ist, um sie bis zum neutralen Punkt in 260000 km Entfernung zu bringen. Die Ersparnis ist also höchstens $\frac{1}{40}$ oder 2,5 %. Natürlich läßt sich auch die benötigte Anfangsgeschwindigkeit sowie die kritischen Geschwindigkeiten berechnen. Sie weichen nicht sehr von den Werten der vorhergehenden Betrachtungen ab und können deshalb hier übergangen werden.

Nehmen wir zum Schluß ein bestimmtes Beispiel an. Es handle sich um eine Rakete, deren Nutzlast einschl. Insassen 2000 kg wiegt, und wir dürften ihr eine Beschleunigung von $3g = 29{,}43$ m/sec erteilen. Dann muß (nach 6) die Pulverladung 1,5 Millionen kg betragen. Diese Pulverladung wird in der Zeit 337,9 Sekunden abgebrannt werden müssen, pro Sekunde stets 1,961 % der jeweils vorhandenen Gesamtraketenmasse. In einer Höhe von 1642 km erreicht sie dann die kritische Geschwindigkeit von 9944 m/sec, mit welcher sie imstande ist, an den neutralen Punkt zu gelangen (der Einfluß der Sonne bleibt außer acht).

Bei unseren Untersuchungen ist vom Luftwiderstand abgesehen worden. Ferner ist stillschweigend vorausgesetzt, daß Erde und Mond ruhen, und daß die Rakete senkrecht nach oben geschossen wird. Auf die Schwierigkeiten einzugehen, die entstehen, wenn diese Voraussetzungen fallen gelassen werden, dürfte sich erübrigen. Denn erstens geht das über den Rahmen des Unterrichts hinaus, und zweitens sind die Versuche noch nicht so weit vorgeschritten, daß diese Fragen aktuell wären.

Eine eingehende Kritik des Problems findet man bei Cranz, Lehrbuch der Ballistik II, Springer, Berlin 1926, die auch diesem Aufsatz zugrunde liegt. Die Abweichungen der Resultate dieses Aufsatzes von denen des angeführten Werkes erklären sich durch die Vereinfachungen, die ich im Interesse der leichteren Verständlichkeit treffen mußte.

Gleichgewichtsfiguren elektrischer Pendel.

Von Dr. W. Grosch in Sondershausen.

Werden in einem Punkte mehrere gleiche Pendel aufgehängt und elektrisch geladen, so bilden sich im Gegenspiel der elektrischen Abstoßung und der zurücktreibenden Schwerkraft bemerkenswerte Gleichgewichtsfiguren, die in einigen Beziehungen Verwandtschaft mit Atommodellen zeigen, so in der Ausbildung konzentrischer Ringe und in der Möglichkeit verschiedener Gleichgewichtsstellungen bei gegebener Anzahl von Pendeln mit gegebenen Ladungen. Jede dieser Stellungen hat dann einen ganz bestimmten Energieinhalt, so daß beim Übergang von einer