# Zeitschrift

für den

# Physikalischen und Chemischen Unterricht

Begründet von **Friedrich Poske**

unter Mitwirkung von **Ernst Mach** und **Bernhard Schwalbe**

In Verbindung mit

**K. Rosenberg** in Graz, **H. Hahn** in Berlin, **L. Doermer** in Hamburg

und der

**Staatlichen Hauptstelle für den naturwissenschaftlichen Unterricht**

herausgegeben von

## K. Metzner

**Vierzigster Jahrgang**

**1927**

Mit zahlreichen Textfiguren

**Berlin**

Verlag von Julius Springer

1927

# Zeitschrift
für den
# Physikalischen und Chemischen Unterricht.

XL. Jahrgang. 1927. Drittes Heft.


## Die Möglichkeit der Weltraumfahrt.


Von H. Lorenz in Danzig.


Nachdem der uralte Traum der Luftfahrt durch die Flugtechnik im Verfolg der Entwicklung starker Leichtmotoren in kurzer Zeit in Erfüllung gegangen ist, richten sich die Blicke vieler, darunter auch einzelner Ingenieure, auf das weitere Ziel der Befahrung des Weltraumes zum Zwecke des Besuches anderer Himmelskörper. Der Gedanke tauchte wohl zuerst in einer Erzählung Jules Vernes auf, der den Flug eines aus einem Rohr abgeschossenen, mit Menschen besetzten Hohlkörpers nach dem Monde schilderte, wogegen der bekannte Physiker und Philosoph Kurd Lasswitz in seinem Roman „Auf zwei Planeten" die Fahrten von Raumschiffen beschrieb, die durch Raketenwirkung getrieben und gesteuert werden. Die letztere Bewegungsart liegt auch einigen neueren Schriften von Goddard [1]), Oberth [2]) und Hohmann [3]) zugrunde, die schon durchaus wissenschaftlich gehalten sind und teilweise bestimmte Bauvorschläge enthalten. Daran schließen sich naturgemäß gemeinverständliche Darstellungen, z. B. eine solche von Valier [4]), sowie Bestrebungen weiterer Kreise, die sich zur Verwirklichung schon in einer „Gesellschaft für Weltraumforschung" zusammengefunden haben.

Angesichts dieser Sachlage dürfte eine nüchterne Prüfung der Ausführbarkeit der Weltraumfahrt an Hand der Mechanik am Platze sein. Es handelt sich dabei um die Erhebung eines Körpers bis zu beliebigen Abständen von der Erdoberfläche, bzw. aus dem Bereiche der Erdschwere überhaupt, ferner um die Bewegung im Raume und schließlich um die Rückkehr zur Erde, wobei der Widerstand beim Durchfahren der Lufthülle ein merkliches Hindernis in mechanischer und thermischer Hinsicht bildet. Wir wollen indessen hiervon vorläufig absehen und zunächst prüfen, ob die gewünschte und notwendige Erhebung im luftleeren Raume mit den zur Verfügung stehenden irdischen Energiequellen möglich ist.

Da die Erde selbst im Raume fortschreitet und sich um eine Achse dreht, so hat der Ausgangspunkt schon eine bestimmte Geschwindigkeit mit einem in die Bewegungsrichtung des Raumfahrzeugs fallenden Anteil $v_0$. Wir betrachten daher einmal zwei Massen $m_1$ und $m_2$ mit der gemeinsamen Anfangsgeschwindigkeit $v_0$, welche durch eine zwischen ihnen wirkende Kraft die absoluten Endgeschwindigkeiten $v_1$ und $v_2$ annehmen. Alsdann gilt für gleiche Richtung aller $v$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 - (m_1 + m_2) v_0 = 0, \qquad (1)$$

während die hierzu nötige Arbeit sich zu

$$L = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot v_0^2 \qquad (2)$$

[1]) Rob. H. Goddard: „A method of reaching extreme altitudes." Smithsonian Institut Washington 1919.

[2]) H. Oberth: „Die Rakete zu den Planetenräumen." 2. Aufl. München und Berlin 1925. R. Oldenbourg.

[3]) W. Hohmann: „Die Erreichbarkeit der Himmelskörper." Ebenda 1925.

[4]) M. Valier: „Der Vorstoß in den Weltenraum." 5. bis 7. Tausend. Ebenda 1925.

berechnet. Fügen wir hierzu die mit $v_0$ erweiterte Gleichung (1), so wird

$$L = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} - v_0 (m_1 \cdot v_1 + m_2 v_2) + \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot v_0^2$$

oder

$$L = \frac{m_1}{2}(v_1 - v_0)^2 + \frac{m_2}{2}(v_2 - v_0)^2 \quad \ldots \ldots \quad (2\,\mathrm{a})$$

so daß also die **Arbeiten für die Änderung der Absolut- und der Relativbewegung miteinander übereinstimmen.** Schreiben wir an Stelle von (1)

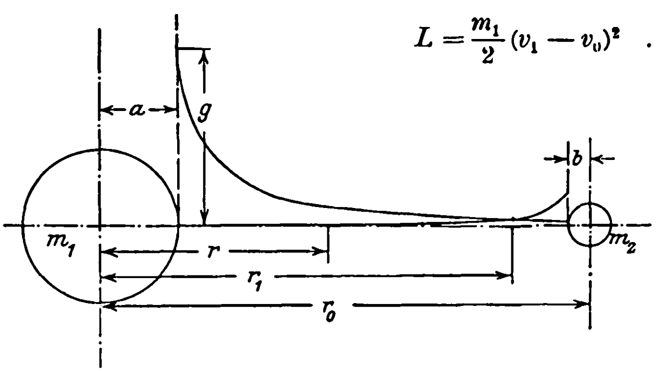
$$m_1 (v_1 - v_0) + m_2 (v_2 - v_0) = 0, \quad \ldots \ldots \quad (1\,\mathrm{a})$$

so folgt aus (2a) durch Ausschalten von $(v_2 - v_0)$

$$L = \frac{m_1}{2}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)(v_1 - v_0)^2 \quad \ldots \ldots \quad (2\,\mathrm{b})$$

Aus (1a) ergibt sich ferner, daß für $m_2 = \infty$ $v_2 = v_0$ ist, womit die Arbeit sich in

$$L = \frac{m_1}{2}(v_1 - v_0)^2 \quad \ldots \ldots \quad (2\,\mathrm{c})$$




vereinfacht. Dieses trifft z. B. für den Fall des Abschusses von der Oberfläche des Erdballes aus zu, dessen Masse gegen die des Geschosses stets praktisch unendlich groß ist und daher keine Arbeit aufnimmt.

Befindet sich ein Körper zwischen zwei Himmelskörpern von den Massen $m_1$ und $m_2$ mit dem Abstande $r$ vom ersteren und $r_0 - r$ vom zweiten (siehe Figur), so unterliegt er einer Beschleunigung nach $m_2$ im Betrage

$$q = k\frac{m_1}{r^2} - k\frac{m_2}{(r_0 - r)^2} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

worin $k$ die Gaußsche Gravitationszahl ist. Mit der Oberflächenbeschleunigung $g$ auf $m_1$ vom Halbmesser $a$ ergibt sich dann $k$ aus

$$k \cdot m_1 = g \cdot a^2, \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

so daß wir auch an Stelle von (3) haben

$$q = g \cdot a^2 \left[\frac{1}{r^2} - \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{1}{(r_0 - r)^2}\right] \quad \ldots \ldots \quad (3\,\mathrm{a})$$

Dieser Wert verschwindet für den **neutralen Punkt** $r_1$, gegeben durch

$$\frac{r_0 - r_1}{r_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}; \quad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_0}\left(1 + \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right) \quad \ldots \ldots \quad (3\,\mathrm{b})$$

Die Arbeit zur Hebung einer Masse $m$ von der Oberfläche des Körpers $m_1$ bis zum Abstande $r$ ergibt sich alsdann aus (3a) zu

$$L = m \int_a^r q\,dr = m g a^2 \int_a^r \left[\frac{1}{r^2} - \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{1}{(r_0 - r)^2}\right] dr$$

$$L = m g a^2 \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{r} + \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{1}{r_0 - a} - \frac{1}{r_0 - r}\right)\right] \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Setzen wir hierin $r = r_1$, so wird hieraus mit (3b) für die Hubarbeit bis zum neutralen Punkt

$$L_1 = m g a \left[1 - \frac{a}{r_0}\left(1 + \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right) + \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{a}{r_0 - a} - \frac{a}{r_0} - \frac{a}{r_0}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right)\right]$$

oder wegen $a \ll r_0$ hinreichend genau

$$L_1 = m g a \left[1 - \frac{a}{r_0}\left(1 + 2\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} - \frac{a}{r_0}\cdot\frac{m_2}{m_1}\right)\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5\,a)$$

Mit $r_0 - r = b$ erhalten wir die Hubarbeit bis zur Oberfläche des Körpers $m_2$ vom Halbmesser $b$

$$L_2 = m g a \left[1 - \frac{a}{r_0 - b} + \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{a}{r_0 - a} - \frac{a}{b}\right)\right]$$

oder wegen $b \ll r_0$

$$L_2 = m g a \left[1 - \frac{a}{r_0}\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) - \frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{a}{b} - \frac{a^2}{r_0^2}\left(\frac{b}{a} - \frac{m_2}{m_1}\right)\right] \quad . \; . \; . \quad (5\,b)$$

und schließlich mit $r = \infty$, $m_2 = 0$ aus (5) die Gesamtarbeit zur Entfernung der Masse $m$ aus dem Schwerebereich von $m_1$

$$L_0 = m g a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5\,c)$$

Nun ist für Erde und Mond

$$r_0 : a = 63\,; \quad b : a = 0{,}27\,; \quad m_1 : m_2 = 80\,; \quad \sqrt{m_1} : \sqrt{m_2} \approx 9\,;$$

also wird unter Vernachlässigung von $a^2 : r_0^2$ sowie $\frac{a}{r_0}\cdot\frac{m_2}{m_1}$

$$L_1 = L_0\left(1 - \frac{1}{51{,}5}\right); \quad L_2 = L_0\left(1 - \frac{1}{16{,}1}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Man erkennt hieraus, daß durch die Mondanziehung an der Hubarbeit bis zum neutralen Punkt im Abstande $r_1 = \frac{9}{10} r_0$ rund 2% und bis zur Mondoberfläche wenig über 6% der Gesamtarbeit zur Entfernung aus dem Erdschwerebereich gespart werden. Diese Beträge sind aber so unerheblich, daß sie bei der Berechnung des Arbeitsaufwands ganz außer Betracht bleiben können, insbesondere, wenn es sich um die Erreichung anderer Weltkörper handelt, die sich praktisch außerhalb des Schwerefeldes der Erde befinden. In allen solchen Fällen muß also die durch (5 c) gegebene Hubarbeit $L_0 = m g a$ geleistet werden, der eine Änderung der kinetischen Energie derart entspricht, daß

$$2 \cdot g \cdot a = w_0^2 - w^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

wird. Soll im Unendlichen $w = o$ sein, so stellt

$$w_0 = \sqrt{2 g a} = 11\,180 \ m\,sec^{-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7a)$$

diejenige Geschwindigkeit dar, mit der ein Körper die luftfreie Erdoberfläche verlassen muß, um dem Bereich der Erdschwere zu entrinnen.

Soll diese Geschwindigkeit durch Abschuß aus einem Rohre erreicht werden, so kann dies nur durch ein Treibmittel geschehen, dessen in mechanische Arbeit umwandelbare Energie, bezogen auf die Gewichtseinheit, wir mit $h$ bezeichnen wollen. Es ist dies nichts anderes als die Hubhöhe in Metern, auf die sich die Gewichtseinheit des Treibmittels durch ihre eigene Energie erheben kann. Da der Abschuß in einem Rohre erfolgt, so hat beim Verlassen der Geschoßmasse $m_0$ mit der Geschwindigkeit $w_0$ die Gesamtmasse $m$ des Treibmittels, welche dem Geschoß folgt, die mittlere Geschwindigkeit $\frac{w_0}{2}$ entsprechend der mittleren kinetischen Energie $\frac{m w_0^2}{6}$, so daß also die Arbeitsgleichung besteht:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m w_0^2}{6} + \frac{m_0 w_0^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

oder wegen (7a)

$$\frac{m_0}{m} = \frac{h}{a} - \frac{1}{3} \quad \text{(8a)}$$

Da das Massenverhältnis naturgemäß positiv sein und bleiben muß, so besteht die Bedingung

$$h > \frac{a}{3} \quad \text{(8b)}$$

d. h. die freie Hubhöhe des Treibmittels muß größer sein als ein Drittel des Erdhalbmessers. Die folgende kleine Zahlentafel enthält nun die entsprechenden Werte für die stärksten beiden Treibmittel, nämlich Nitroglyzerin und Schießwolle, denen noch zwei ideelle, nämlich Wasserstoff mit Sauerstoff und Kohle mit Sauerstoff hinzugefügt sind. Darin bedeutet $Q$ die gesamte Wärmetönung und $h_0$ den Arbeitswert, von dem aber nur $h = \frac{2}{3} h_0$ als freie Hubhöhe nach den Erfahrungen der Ballistik in Frage kommt, während mindestens $\frac{1}{3} h_0$ auf die von den Abgasen mitgeführte Wärme zu rechnen ist. Da nun $\frac{a}{3} = 2162$ km ist, so steht uns zur Zeit kein ausreichendes Treibmittel für den Abschuß mit der notwendigen Anfangsgeschwindigkeit zur Verfügung, womit dieses Verfahren überhaupt ausscheidet. Es hat darum auch keinen Zweck, etwa die Beschleunigungsverhältnisse mit Rücksicht auf die Rohrlänge oder den Einfluß der Luft zu untersuchen, die schon dem Austritt aus dem Rohr mit planetarischer Geschwindigkeit ein gewaltiges Hindernis durch scheinbare Vergrößerung der Masse $m_0$ entgegenstellt, an der Bedingung (8a) aber nichts ändert.

Zahlentafel I.

| Treibstoff | $Q$ Cal./kg | $h_0$ km | $h$ km | $w$ m/Sek. |
|---|---|---|---|---|
| $H_2 + O$ | 3550 | 1516 | 1010 | 4430 |
| $C + O_2$ | 2930 | 1251 | 835 | 4040 |
| Nitroglyzerin | 1580 | 675 | 450 | 2950 |
| Schießwolle | 1100 | 470 | 315 | 2450 |

Wir gehen darum sogleich zur Raketenwirkung, d. h. zum Antrieb durch den Rückstoß der Abgase des Treibmittels über, deren relative Auspuffgeschwindigkeit wir mit $w$ bezeichnen, während $v$ die veränderliche Geschwindigkeit der durch den Gasaustritt ebenfalls veränderlichen Masse $m$ gegen die Erde bedeutet. Ist dann wieder $h$ die wirksame Hubhöhe des Treibmittels, so ist zunächst

$$w^2 = 2g \cdot h \quad \text{(9)}$$

(Die dieser Formel entsprechenden Werte sind für die einzelnen Treibmittel ebenfalls in die Zahlentafel eingetragen.)

Außerdem aber dient der Rückdruck der mit der Geschwindigkeit $w$ in der Zeiteinheit austretenden Gasmasse: $w \cdot dm : dt$ zur Beschleunigung der Gesamtmasse $m$ und zur Überwindung der Erdbeschleunigung, so daß wir für eine radiale Bewegungsrichtung haben:

$$w \cdot \frac{dm}{dt} = -m\left(\frac{dv}{dt} + g\,\frac{a^2}{r^2}\right) \quad \text{(10)}$$

Erweitern wir diese Gleichung mit $dr = v \cdot dt$, so folgt:

$$w \cdot v \frac{dm}{m} = -v \cdot dv + g a^2 d\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{(10a)}$$

Dafür dürfen wir aber auch unter Hinzufügen und Abziehen von $\frac{w^2 \cdot dm}{2} = g \cdot h \cdot dm$ schreiben:

$$-g \cdot h \cdot dm = m \cdot v \cdot dv - \frac{dm}{2}[(v-w)^2 - v^2] - m g a^2 d\left(\frac{1}{r}\right) \quad . \; . \; . \; (10\,b)$$

Es ist dies nichts als die Energiegleichung, nach welcher die links stehende mechanische Energieentwicklung des Gaselements $dm$ zur Änderung der kinetischen Energie von $dm$ selbst, sowie von $m$ und zur Leistung der Hubarbeit im letzten Gliede rechts dient. Da die Formeln (10a) und (10b) aber drei Variable $m$, $v$ und $r$ enthalten, so ist — wenigstens die linke Seite von (10a) nicht ohne weiteres integrabel. Da wir aber wissen, daß die Gesamtmasse $m$ durch den Auspuff unter Zunahme der Geschwindigkeit $v$ stetig abnimmt, so wollen wir mit einer noch unbestimmten Geschwindigkeit $v_0$ und der anfänglichen Gesamtmasse $m_0$ setzen:

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{v}{v_0}}, \quad \frac{dm}{m} = -\frac{dv}{v_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

womit (10a) übergeht in:

$$\left(1 - \frac{w}{v_0}\right) v \cdot dv = g \cdot a^2 d\left(\frac{1}{r}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

und integriert mit den Anfangsbedingungen $v = 0$ an der Erdoberfläche für $r = a$

$$v^2 = \frac{2g \cdot a^2 v_0}{w - v_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12\,a)$$

ergibt. Für $r = \infty$ erhalten wir daraus die Endgeschwindigkeit $v_1$:

$$v_1^2 = \frac{2g \cdot a \cdot v_0}{w - v_0} \text{ oder } v_0 = \frac{w \cdot v_1^2}{v_1^2 + 2ga} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12\,b)$$

Damit aber wird aus (11):

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v}{w}\left(1 + \frac{2ga}{v_1^2}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

und für $r = \infty$, also $v = v_1$:

$$\frac{m_0}{m_1} = e^{\frac{1}{w}\left(v_1 + \frac{2ga}{v_1}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13\,a)$$

Dieser Ausdruck besitzt einen Kleinstwert für

$$v_1^2 = 2ga \text{ oder nach (12b) } v_0 = \frac{w}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13\,b)$$

im Betrage von

$$\frac{m_0}{m_1} = e^{\frac{2v_1}{w}} = e^{\frac{2\sqrt{2ga}}{w}} = e^{2\sqrt{\frac{a}{h}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13\,c)$$

während nach (12b) und (13) allgemein gilt:

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{2v}{w}}, \quad v^2 = 2ga^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

Daraus folgt schließlich die Bahnbeschleunigung $\frac{dv}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dr} = g\frac{a^2}{r^2}$ und die durch den Rückdruck der Auspuffgase erzeugte Gesamtbeschleunigung

$$q = \frac{dv}{dt} + g\frac{a^2}{r^2} = 2g\frac{a^2}{r^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

die mithin an der Erdoberfläche, d. h. bei Beginn der Bewegung, mit der doppelten Erdbeschleunigung $g$ übereinstimmt, welche bei kurzer Wirkungsdauer auch für Fahrgäste im Liegen als erträglich anzusehen ist. Für die in der früheren Zahlentafel I enthaltenen Treibstoffe erhalten wir alsdann nach Gleichung (13a) die nachstehenden Werte:

Zahlentafel II.

| Treibmittel | a : h | $2\sqrt{a:h}$ | $m_0 : m_1$ |
|---|---|---|---|
| $H_2 + O$ | 6,37 | 5,05 | 156 |
| $C + O_2$ | 7,63 | 5,53 | 252 |
| Nitroglyzerin | 14,28 | 7,56 | 1920 |
| Schießwolle | 20,82 | 9,10 | 8900 |

Daraus geht hervor, daß auch im günstigsten Falle und ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes nur ein verschwindender Bruchteil der ursprünglichen Raketenmasse dem Schwerefelde der Erde entrinnen kann, woran die Verwirklichung des Raketenfluges vorläufig scheitern dürfte.

Zum Schluß mag noch die Zeit vom Abfluge von der Erdoberfläche bis zu einem bestimmten Abstande $r$ berechnet werden, und zwar mit Hilfe der Gleichung (14), in Verbindung mit $dr = v \cdot dt$. Daraus folgt:

$$dt \cdot \sqrt{2\,g\,a} = dr \sqrt{\frac{r}{r-a}} \qquad (15\,a)$$

oder integriert mit $t = o$ für $r = a$:

$$t = \sqrt{\frac{a}{2g}} \left[ \frac{r}{a} \sqrt{1 - \frac{a}{r}} - ln \left( \sqrt{\frac{r}{a}} - \sqrt{\frac{r}{a} - 1} \right) \right], \qquad (15\,b)$$

worin

$$\sqrt{\frac{a}{2g}} = 570 \text{ Sek. ist.}$$

Damit erhält man für die Abstandsverhältnisse $\frac{r}{a}$: 1, 2, 3, 4, 10, 25, 50, 63 (Mondabstand) die Flugzeiten:

$t$: 0, 21′55″, 34′10″, 45′25″, 1 h 47′20″, 4 h 15′, 8 h 15′, 10 h 21′.

---

# Messung der Winkel eines Glasprismas mit nahezu gleichseitigem Hauptschnitt.

Von Dr. P. Werner in Iglau.

Im folgenden soll eine Methode entwickelt werden, die es gestattet, mit einfacher Apparatur, ohne Spektrometer oder Goniometer, bloß mit Hilfe eines einfachen Prismenbinokels mit Stricheinteilung die Winkel eines optischen Prismas mit nahezu gleichseitigem Hauptschnitt auf ungefähr 15″ genau zu bestimmen. Diese Methode wird sicherlich gute Dienste leisten, wenn man die Messung des Brechungsexponenten mit einfachen Mitteln durchführen will, wie sie etwa in dieser Zeitschr., Jg. XXXIII, 1920, S. 16 beschrieben ist.

Blicken wir durch ein Prisma, dessen Flächenwinkel nicht ganz genau gleich sind, auf ein entferntes Objekt, etwa ein Licht, einen Blitzableiter oder eine Kirchturmspitze, so daß wir dasselbe Objekt in der dritten Fläche des Prismas streifend gespiegelt sehen, so erblicken wir in der Regel das Objekt doppelt. Die Erklärung dieser Erscheinung ist an der Hand der Fig. 1 leicht. Die vom fernen Objekt $O$ herkommenden, annähernd parallelen Strahlen werden teils an der Fläche $BC$ gespiegelt, teils an der Fläche $AC$ gebrochen, an $BC$ im Innern total reflektiert und treten aus der Fläche $AB$ aus. Die ins Auge gelangenden Strahlen sind fast parallel; sie müßten es genau sein, wenn $O$ unendlich weit entfernt und $\sphericalangle B = \sphericalangle C$ wäre. Mit freiem Auge