ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von L. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, L. PRANDTL-Göttingen, H. REISSNER-Charlottenburg und R. RÜDENBERG-Berlin

Band 7
(7. Jahrgang)

Mit rd. 323 Abbildungen im Text

Berlin
V·D·I-VERLAG G. M. B. H., BERLIN NW 7
1927

11. Über eine mit dem Problem der Rakete zusammenhängende Aufgabe der Variationsrechnung.

Von G. HAMEL in Berlin.

Läßt man einen starren Körper von der augenblicklichen Masse M unter der Wirkung der Schwere, des Luftwiderstandes W und der Reaktionswirkung ausströmender Materie (also eine Rakete) in die Höhe steigen, so erhält man aus dem Newtonschen Grundgesetz der Mechanik und dem Gesetz der Massenerhaltung die Differentialgleichung

$$M\frac{du}{dt}+C\frac{dM}{dt}+W(s,u)+Mg=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Dabei ist s der Weg, t die Zeit, $u=\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit, C die relative Ausströmgeschwindigkeit der Raketenfüllung.

Es sind folgende Vernachlässigungen gemacht: 1. In Anbetracht dessen, daß man nur Höhen von 100 bis 200 km erreichen will, ist g konstant genommen. 2. In W ist der Einfluß der ausströmenden Masse fortgelassen. 3. Die Aenderung des Impulses im Innern der Rakete durch Fortschreiten der Brennfläche (oder Aehnliches) ist als belanglos weggelassen. 4. Von der Erdrotation ist abgesehen.

M_e sei die Endmasse, M_a die Anfangsmasse. Gegeben seien: M_e, die gesamte Steighöhe h, ferner die Anfangsgeschwindigkeit u_a zur Zeit $t_a=0$, $s_a=0$, die konstante Ausströmgeschwindigkeit C. Gefragt ist nach dem Minimum von M_a, der Anfangsmasse.

Diese Aufgabe wurde von Goddard[1]) gestellt und zu lösen versucht, aber mit anfechtbaren mathematischen Hilfsmitteln. Sie soll hier mit den Mitteln der Variationsrechnung gelöst werden.

Aufgefaßt als lineare Differentialgleichung in M, läst sich Gl. (1) integrieren und nach Einsetzen der Endwerte nach M_a auflösen:

$$M_a=e^{-\frac{u_a}{C}}\int_0^{t_e}\frac{1}{C}\,W(s,u)\,e^{\frac{u}{C}+\frac{gt}{C}}\,dt+M_e\,e^{-\frac{u_a}{C}+\frac{u_e}{C}+\frac{g\,t_e}{C}}.$$

t_e, u_e, s_e sind die Endwerte, wo das freie Steigen einsetzt ($s_e \leqq h$). Ich beschränke mich auf das reine Raketenproblem und setze dementsprechend $u_a=0$. Allerdings hat das zur Folge, daß ein eigentliches Extrem nicht existiert, sondern nur eine untere Grenze, der man aber beliebig nahe kommt, wenn man zu Anfang u recht schnell von null auf einen wohlbestimmten Wert anwachsen läßt. Wenn hinfort von Minimum die Rede ist, ist diese untere Grenze gemeint. Es ist ein wahres Minimum.

Es liegt also ein Problem folgender Art vor:

$$M_a=\int_0^{t_e} f(u,s,t)\,dt+F(u_e,t_e)=\text{Min.}$$

Dabei sind s_e, t_e frei $\left(u=\frac{ds}{dt}\right)$.

Dagegen besteht eine Gleichung zwischen u_e, s_e. Wenn das Pulver verschossen ist, d. h. $M=M_e$ geworden, wird die Rakete mit der noch vorhandenen kinetischen Energie weiter steigen. Dieses freie Steigen wird man ausnutzen. Bei diesem freien Steigen ist

$$M_e\frac{du}{dt}+W(s,u)+M_e g=0,$$

was mit $f+\frac{dF}{dt}=0$ identisch ist. Diese Gleichung hat die Form $u\frac{du}{ds}=f_1(u,s)$ und sei mit der Endbedingung $u=0$ für $s=h$ zu

$$u=\psi(s)$$

integriert. Für große h ist sie, falls s auch groß ist, wegen des geringen W in großen Höhen nahezu mit

$$u=\sqrt{2g(h-s)} \qquad \text{identisch.}$$

Es kommt also noch die Grenzbedingung $u_e=\psi(s_e)$ hinzu. Diese können wir ohne weiteres in F einsetzen, so daß das Zusatzglied die Form $F[\psi(s_e),t_e]$ bekommt. Wenn

[1]) A method of reaching extreme altitudes, Washington 1919, Smithsonian Institut.

wir aber das Minimum von M_a suchen, dürfen wir in dem Integral von der Grenzbedingung zunächst keinen Gebrauch machen, da man bekanntlich ein anderes u_e am Ende der Extremalen so zu $\psi(s_e)$ abbiegen kann, daß sich das Integral beliebig wenig ändert.

Bei fest gehaltenem s_e, t_e muß das Integral ein Minimum sein. Dies ist ein gewöhnliches Variationsproblem, liefert eine Eulersche Gleichung, reguläre Extremalen ohne konjugierten Punkt, auch ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} > 0,$$

wenn wir, was wohl zulässig ist, $W \geqq 0$, $\frac{\partial W}{\partial u} \geqq 0$, $\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} > 0$ annehmen und das Gleichheitszeichen nur für $u = 0$. Alle allgemeinen Ergebnisse folgen aus diesen Annahmen, zu denen noch $\frac{\partial W}{\partial s} < 0$ hinzutritt.

Also liefert das Integral für sich ein starkes Minimum. Die Schwierigkeiten beginnen erst, wenn wir s_e, t_e resp. s_e, u_e variieren. Es zeigt sich nun:

1. Es gibt einen einzigen stationären Endpunkt $s_e = s_0$, $u_e = u_0$, für den $\frac{\partial M_a}{\partial s_e} = 0$, $\frac{\partial M_a}{\partial t_e} = 0$ sind. Er liegt auf der Kurve $u = \psi(s)$, so daß diese Endbedingung eine natürliche ist im Sinne Courants.
2. Variiert man s_e, u_e auf der Kurve $u = \psi(s)$, so liegt im Punkte s_0, u_0 ein wirkliches Minimum vor.
3. Bei beliebiger Variation ist die Diskriminante der Glieder zweiter Ordnung, d. h. $\left[\frac{\partial^2 M}{\partial s_e^2}\frac{\partial^2 M}{\partial t_e^2} - \left(\frac{\partial^2 M}{\partial s_e \partial t_e}\right)^2\right]_0 = 0$, so daß möglicherweise spitzenförmige Gebiete an s_0, t_0 heranreichen, wo M_a kleinere Werte hat als in s_0, u_0.
4. Ein solches spitzenförmiges Gebiet kann aber nur von außen an die Kurve $u = \psi(s)$ heranreichen.

Diese Außenpunkte kommen aber als Endwerte s_e, u_e nicht in Frage, da sonst die Rakete überflüssige Geschwindigkeit am Ende durch plötzliche Aufnahme von Materie stoppen müßte, was physikalisch unmöglich ist. Mathematisch wird das Minimum durch die Ungleichheit $\frac{dM}{dt} \leqq 0$ garantiert. Es besteht also ein wirkliches Minimum.

Für die numerische Rechnung soll $W = C\,\delta_0\,e^{-\frac{s}{l}}\,u^2$ zugrunde gelegt werden, mit $l = 6^2/_3$ km. Es zeigt sich, daß u_0 sehr wenig von C abhängt ($C = 1000$ und 2000 m/sec genommen), auch wenig von $C\delta_0$ und M_e, wenn man plausible Werte zuläßt. Es liegt u_0 sehr nahe bei 1000 bis 1100 m/sec, s_0 sehr nahe bei $^1/_2\,h$ (alles gerechnet für $h = 100\,000$ m). Das Minimum selbst, ebenso der Wert $\lim u$ (für $t \to 0$) ist noch nicht berechnet. Bei den Rechnungen unterstützt mich freundlicherweise Herr Dipl.-Ing. Roßmann, Assistent von Geh.-Rat Cranz, der auch veranlaßt hat, daß über den Gegenstand in unserem Seminar für Mechanik an der Technischen Hochschule Charlottenburg vorgetragen wurde, wodurch ich auf das Problem aufmerksam wurde. Die nötigen Integrationen lassen sich überraschend leicht durchführen. 845, 11

12. Bestimmung der Stromverteilung in zylindrischen Leitern von allgemeiner Querschnittsform.

Von F. NOETHER in Breslau.

Während die Berechnung der Wechselstromverteilung in kreiszylindrischen Leitern eine bekannte einfache Aufgabe ist, wurde die entsprechende Berechnung bei allgemeiner Querschnittsgestalt noch nicht in befriedigender Form durchgeführt. Praktisch kommen in der Elektrotechnik z. Z. rechteckförmige Querschnitte vor; auch der Fall des Kabels, wo mehrere kreisschnittige Leiter nahe beieinander liegen, gehört zu dieser Fragestellung.

Die Querschnittsebene des Leiters sei die x-y-Ebene, und die senkrecht dazu gerichtete Stromdichte sei mit $J(x\,y)$ bezeichnet. In der Querschnittsebene liegen dann die Komponenten der magnetischen Feldstärke: $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$. Wenn noch λ die Leitfähigkeit, μ die Per-